Investigación *Revista Mexicana de Física* **38**, *No. 2 (1992) 205–214*

Atractores espacio-temporales en ecuaciones de Klein-Gordon perturbadas

JORGE A. GONZÁLEZ
Departamento de Física, Universidad de Camagüey
Circunvalación Norte Km. 5 1/2, Camagüey 74650, Cuba

Recibido el 13 de agosto de 1991; aceptado el 17 de octubre de 1991

RESUMEN. Se investigan la existencia y la estabilidad de solitones en sistemas generales con rozamiento no lineal. Se muestra que aparecen atractores espacio-temporales y se presentan sistemas con soluciones exactas.

ABSTRACT. The existence and stability of solitons in systems with nonlinear damping are investigated. It is shown that space-time attractors can appear in these systems. Systems with exact solutions are presented.

PACS: 03.40.Kf; 61.70.Rj; 60.30.+d

1. INTRODUCCIÓN

El interés en las ecuaciones de Klein-Gordon no lineales, perturbadas por fuerzas disipativas no lineales y campos externos, ha crecido en los últimos años [1–5] (véanse, además, las referencias en estos trabajos). Esto es debido a varias razones. En primer lugar, la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales no lineales dista mucho de estar completa y los problemas aún no resueltos en este campo llaman poderosamente la atención de los matemáticos y físicos teóricos. Por otro lado, estas ecuaciones describen toda una serie de fenómenos físicos de gran importancia fundamental y práctica.

Con las ecuaciones de Klein-Gordon no lineales pueden ser modeladas, por ejemplo, las paredes de dominio en cuerpos sólidos con transiciones estructurales de fase, diferentes tipos de ondas no lineales en medios condensados, la dinámica de fluxones o cuantos de flujo magnético en líneas de transmisión con contactos superconductores de Josephson, etc. Por cierto, este último fenómeno promete convertirse en la base de muchas nuevas altas tecnologías y ya se habla de nuevas generaciones de computadoras con células de Josephson [1–5]. Estudiando los sistemas no lineales se han descubierto muchos fenómenos interesantes, como las transiciones desorden-orden y la aparición de caos con alta sensibilidad a las condiciones iniciales [6].

En estas investigaciones se han usado principalmente, sistemas que pueden ser descritos por ecuaciones ordinarias. Aunque se están realizando muchos estudios con ecuaciones en derivadas parciales, casi todos son experimentos numéricos. Se ha podido demostrar que existen ecuaciones no lineales en derivadas parciales integrables, las cuales pueden ser resueltas en muchos casos utilizando, por ejemplo, el método del problema inverso de la dispersión [1]. Sin embargo, estas ecuaciones son estructuralmente inestables; cualquier perturbación de las mismas con un término disipativo o un campo externo las hace no integrables.

Pero no todo radica en la no existencia de métodos de solución, sino que la propia dinámica de las ecuaciones no integrables difiere sustancialmente de las integrables. Se dice que el salto cualitativo entre las ecuaciones integrables y no integrables es tan grande como de lo lineal a lo no lineal.

En el presente trabajo se considera la ecuación

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - R\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + G(\varphi) = 0, \tag{1}$$

donde $G(\varphi) = -\frac{\partial u}{\partial\varphi}$ y u es una función analítica de φ que posee, al menos, tres extremos (dos mínimos φ_1, φ_3 y un máximo φ_2; $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$).

Ya en trabajos previos del autor se investigó esta ecuación cuando la fuerza disipativa $R(\varphi, \partial\varphi/\partial t)$ es una función lineal de $\partial\varphi/\partial t$ [7,8]. Allí se estudiaron todas las soluciones solitónicas posibles y la dinámica de la interacción solitón-antisolitón [8]. También se hizo un análisis del grado de libertad interno del solitón [9].

Ahora se supone que, además de $G(\varphi)$, $R(\varphi, \partial\varphi/\partial t)$ puede ser no lineal. Se obtendrán las condiciones de existencia para solitones que se mueven sin variar su forma y velocidad. Se investigará la estabilidad de estos solitones. Se mostrará que algunas soluciones de (1) pueden ser consideradas atractores espacio-temporales. De los resultados obtenidos se podrá deducir la dinámica cualitativa de un solitón a partir de cualquier condición inicial.

2. Solitones clásicos

Llamamos solitones clásicos a los que se mueven sin variar su forma y velocidad.

Introduciendo las variables

$$Z = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad W = \frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \tag{2}$$

donde v es la velocidad de la onda, la Ec. (1) puede ser escrita en la siguiente forma:

$$\frac{d^2\varphi}{dZ^2} - R\left(\varphi, -w\frac{d\varphi}{dZ}\right) + G(\varphi) = 0. \tag{3}$$

A su vez, esta ecuación se puede expresar como un sistema dinámico autónomo

$$\frac{d\varphi}{dZ} = \psi, \tag{4a}$$

$$\frac{d\psi}{dZ} = R(\varphi, -w\psi) - G(\varphi). \tag{4.b}$$

Como fue demostrado anteriormente [7], la existencia de conexiones entre dos puntos silla del sistema (4) determina la existencia de solitones clásicos.

Si la función $R(\varphi, -w\psi)$ tiene la propiedad $R(\varphi, 0) = 0$, entonces los puntos $(\varphi_1, 0)$ y $(\varphi_3, 0)$ en el plano de fase (φ, ψ) son puntos silla, mientras que el punto $(\varphi_2, 0)$ es un foco.

Los valores propios de la matriz de estabilidad que caracterizan cada punto crítico $(\varphi_0, 0)$ están dados por el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \left.\frac{\partial R}{\partial \varphi}\right|_{(\varphi_0,0)} - \left.\frac{\partial G}{\partial \varphi}\right|_{(\varphi_0,0)} & -\left.\frac{\partial R}{\partial \psi}\right|_{(\varphi_0,0)} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

En el caso que $R(\varphi, 0) \neq 0$, entonces los puntos críticos del sistema serán raíces de la ecuación

$$R(\varphi, 0) - G(\varphi) = 0 \tag{6}$$

De aquí se deduce que la primera condición necesaria para que existan soluciones solitónicas es que la Ec. (6) posea, al menos, tres soluciones reales $(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3)$. (Dos de estos puntos deben ser puntos silla.)

Pero esta condición no es suficiente. Es necesario que la separatriz que parte de un punto silla alcance al otro [7].

La solución solitónica tiene las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} &\bar{\varphi}_1 < \bar{\varphi} < \bar{\varphi}_3; \\ &\lim_{Z \to -\infty} \varphi = \bar{\varphi}_1, \quad \lim_{Z \to +\infty} \varphi = \bar{\varphi}_3 \qquad \text{(para el solitón);} \\ &\lim_{Z \to -\infty} \varphi = \bar{\varphi}_3, \quad \lim_{Z \to +\infty} \varphi = \bar{\varphi}_1 \qquad \text{(para el antisolitón).} \end{aligned}$$

Si multiplicamos la Ec. (3) por $d\varphi/dZ$ e integramos respecto a Z de $-\infty$ a $+\infty$ tenemos

$$-\int_{-\infty}^{\infty} R\left(\varphi, -w\frac{d\varphi}{dZ}\right) \frac{d\varphi}{dZ} dZ = U(\varphi_i) - U(\varphi_j), \tag{7}$$

donde $i, j = 1, 3$.

Si consideramos que $R(\varphi, -wd\varphi/dZ)$ toma valores suficientemente pequeños en el intervalo que nos interesa $(\varphi_1 < \varphi < \varphi_3)$ y que $U(\varphi_1) - U(\varphi_3)$ también es una magnitud pequeña, se puede aplicar la teoría de perturbaciones. Para esto escribiremos $U(\varphi)$ y $\varphi(z)$ en la forma

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi_0(z) + \epsilon\varphi_P, \\ U(\varphi) &= U_0(\varphi) + \epsilon U_1(\varphi), \end{aligned}$$

donde $U_0(\varphi_1) = U_0(\varphi_3) = 0$, $\varepsilon \ll 1$, $U_1(\varphi_1) \neq U_1(\varphi_3)$, $d\varphi_P/dZ = 0$ y $\varphi_0(Z)$ es la solución de la Ec. (3) cuando $R = 0, \epsilon = 0$. En tal caso la primera integral de (3) puede ser obtenida y la ecuación se resuelve en cuadratura

$$\frac{d\varphi_0}{dZ} = \pm\sqrt{2U_0\varphi}. \tag{8}$$

El signo + corresponde al solitón y el − al antisolitón.

Después de estas consideraciones, de (7) obtenemos para el solitón

$$-\int_{\bar{\varphi}_1}^{\bar{\varphi}_3} R\left(\varphi, -w\sqrt{2U_0(\varphi)}\right) d\varphi = \Delta, \tag{9}$$

donde $\Delta = U(\varphi_3) - U(\varphi_1) = \epsilon(U_1(\varphi_3) - U(\varphi_1))$. De la misma forma, se puede escribir la relación correspondiente al antisolitón.

La condición de existencia del solitón clásico es que la Ec. (9) tenga solución real respecto a w. A su vez, de (9) puede calcularse de forma aproximada la velocidad del solitón [véase la Ec. (2)].

Cada solución real de (9) respecto a w corresponde a una velocidad posible para que el solitón se mueva con ella uniformemente, pero no toda solución de (9) es estable.

Usando la teoría de perturbaciones se puede investigar la estabilidad de cada estado solitónico, tarea que conduce a un problema de funciones y valores propios de un operador diferencial [2]. Sin embargo, el mismo resultado se obtiene considerando (9) como una ecuación de movimiento, donde Δ juega el papel de fuerza externo [7,8] y

$$S(w) = -\int_{\bar{\varphi}_1}^{\bar{\varphi}_3} R\left(\varphi, -w\sqrt{2U_0(\varphi)}\right) d\varphi \tag{10}$$

es la fuerza de rozamiento dependiente de la velocidad.

La relación (9) muestra un equilibrio entre dos fuerzas. Sea w_0 una solución de (9). Al perturbar el solitón y tomar éste una velocidad diferente a w_0, la fuerza que prevalece tiende a aumentar la diferencia de velocidad respecto a w_0, pues ese estado es inestable. Por esto, la condición de estabilidad es

$$\left.\frac{\partial S(w)}{\partial w}\right|_{w_0} > 0. \tag{11}$$

En caso contrario, el estado es inestable.

Hemos supuesto que $R(\varphi, -wd\varphi/dZ)$ toma valores pequeños. Esto quiere decir que el mayor valor absoluto de $R(\varphi, -wd\varphi/dZ)$ en el intervalo $\varphi_1 < \varphi < \varphi_3$ es mucho menor que el valor del menor extremo local de $G(\varphi)$ en ese mismo intervalo. Sin embargo, cuando estos valores son comparables, para determinado conjunto de puntos en el espacio de parámetros puede ocurrir una bifurcación que hace imposible la conexión de los puntos silla para cualquier w que tomemos.

En el caso general del cual partimos, Ec. (1), es muy difícil formular la condición necesaria y suficiente para que no ocurra esta bifurcación. Lo más que podemos decir, en general, es que si dentro del intervalo que nos interesa el valor absoluto R_m de la función $R(\varphi, \partial\varphi/\partial t)$ es tal que la ecuación $R_m + G(\varphi) = 0$ ya no mantiene sus tres ceros, entonces no existe el solitón clásico. En algunas situaciones, ya para un valor inferior de R_m se produce la bifurcación que impide la conexión.

Expliquemos ahora qué significa "el intervalo que nos interesa". Si por ejemplo $R(\partial\varphi/\partial t)$ posee un cero, $(\partial\varphi/\partial t)_1 > 0$, y en el intervalo $0 < \partial\varphi/\partial t < (\partial\varphi/\partial t)$ toma valores exclusivamente negativos, entonces la condición de existencia del solitón para el cual $0 < -wd\varphi/dZ < (\partial\varphi/\partial t)$, es que en ese intervalo $R(\partial\varphi/\partial t)$ no tome valores absolutos superiores al punto de bifurcación.

La función $R(\partial\varphi/\partial t)$ puede tomar valores superiores fuera de este intervalo, lo que no afecta la condición de existencia. Algunos casos concretos son bastante ilustrativos y permiten hacer consideraciones cualitativas generales usando el concepto de equivalencia topológica.

3. SISTEMAS CON SOLUCIONES EXACTAS

a) Sistema con dos velocidades estacionarias

Como ejemplo de ecuación del tipo (3) escogemos el siguiente

$$\frac{d^2\varphi}{dZ^2} - R\left(-w\frac{d\varphi}{dZ}\right) + \alpha\varphi + \beta\varphi^3 = 0, \tag{12}$$

donde $\alpha > 0$ y $\beta < 0$. Definimos $R(-wd\varphi/dZ)$ paramétricamente:

$$R\left(-w\frac{d\varphi}{dZ}\right) = bw\left[-\sqrt{-\frac{\beta}{2}}\left(\rho^2 + \frac{\alpha}{\beta}\right)\right] - aw^2\left[-\sqrt{-\frac{\beta}{2}}\left(\rho^2 + \frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^2, \tag{13a}$$

$$\frac{d\varphi}{dZ} = F(\rho), \tag{13b}$$

donde $F(\rho)$ es cierta función que determinaremos a continuación. En la Ec. (12) el potencial $U(\varphi)$ es

$$U(\varphi) = -\frac{\beta}{4}\left(\varphi^2 + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2. \tag{14}$$

Si hacemos coincidir $\varphi = \rho$, (13a) es una función cuadrática de $\sqrt{2U(\varphi)}$. Con esto buscamos que $R(-wd\varphi/dZ)$ posea dos ceros.

Sustituyendo (13a) en la condición (7) y en la Ec. (12), obtenemos los valores de w para los cuales existe el solitón clásico

$$w_0 = 0, \tag{15a}$$

$$w_0 = \frac{5}{2}\frac{\sqrt{-\frac{\beta}{2}}}{\alpha}\frac{b}{a}, \tag{15b}$$

y la función $F(\rho)$

$$F(\rho) = -\sqrt{-\frac{\beta}{2}}\left(\rho^2 + \frac{\alpha}{\beta}\right)\sqrt{1 + \frac{5}{4}\frac{b^2}{a}\frac{\beta}{\alpha}\rho}. \tag{16}$$

De esta forma, la Ec. (12), con $R(-wd\varphi/dZ)$ definida por (13) y (16), posee una solución dada por la integral elíptica

$$\int \frac{d\varphi}{-\sqrt{-\frac{\beta}{2}}\left(\varphi^2 + \frac{\alpha}{\beta}\right)\sqrt{1 + \frac{5}{4}\frac{b^2}{a}\frac{\beta}{\alpha^2}\varphi}} = Z - Z_0. \tag{17}$$

Esta solución conecta los puntos silla $-\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}$ y $\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}$ si se cumple la condición

$$\frac{b^2}{4a} \leq \frac{1}{5}\alpha\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}. \tag{18}$$

Las expresiones (15) y (18) son las condiciones necesarias y suficientes para la existencia del solitón clásico. La solución con velocidad cero es inestable.

Ahora se puede comprobar que (13) define una función $R(\partial\varphi/\partial t)$ que se anula para $\partial\varphi/\partial t = 0$ y para un valor de $\partial\varphi/\partial t$ negativo. Esta función es topológicamente equivalente a $R(\partial\varphi/\partial t) = -b\partial\varphi/\partial t - a(\partial\varphi/\partial t)^2$ en el intervalo que nos interesa.

Concretamente para este sistema, la condición para aplicar (9) sería

$$\frac{b^2}{4a} \ll \frac{1}{5}\alpha\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}. \tag{19}$$

b) Sistema con dos velocidades estacionarias, donde el extremo de $R(\partial\varphi/\partial t)$ se alcanza para $\partial\varphi/\partial t = 0$

Sea

$$R\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -b + a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 \qquad (b > 0), \tag{20}$$

y $G(\varphi)$ una función general como se definió en (1). Resulta

$$\frac{d^2\varphi}{dZ^2} + b - aw^2\left(\frac{d\varphi}{dZ}\right)^2 + G(\varphi) = 0. \tag{21}$$

Recordando que $d^2\varphi/dZ^2 = \frac{1}{2}d/d\varphi(d\varphi/dZ)^2$ y haciendo el cambio de variables

$$\theta = \left(\frac{d\varphi}{dZ}\right)^2, \tag{22}$$

obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d\theta}{d\varphi} + b - aw^2\theta + G(\varphi) = 0. \tag{23}$$

Esta ecuación es integrable en cuadratura. La solución que corresponde al solitón es

$$\theta = -2e^{2aw^2\varphi}\int_{\bar{\varphi}_1}^{\varphi}(G(\varphi) + b)e^{-2aw^2\varphi}\,d\varphi. \tag{24}$$

La condición de su existencia se puede obtener sustituyendo (24) en (7) o simplemente exigiendo que (24) se anule en $\bar{\varphi}_1$ y $\bar{\varphi}_3$, manteniendo signo constante en ese intervalo; la condición se puede escribir como

$$\int_{\bar{\varphi}_1}^{\bar{\varphi}_3}(G(\varphi) + b)e^{-2aw^2\varphi}\,d\varphi = 0 \tag{25}$$

Supongamos que $U(\varphi)$ cumple la condición $U(\varphi_1) = U(\varphi_3)$. Entonces, la solución existe siempre que la ecuación

$$G(\varphi) + b = 0 \tag{26}$$

mantenga sus tres ceros. La Ec. (26) representa en este caso a la Ec. (6) para el caso general.

Para el solitón, la velocidad positiva es estable y la negativa inestable. Los solitones clásicos de la Ec. (1), con

$$R\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -b + P(\varphi)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 \tag{27}$$

($P(\varphi)$ es una función general), pueden ser hallados en forma exacta usando el mismo procedimiento.

c) Sistema con tres velocidades estacionarios

Sea

$$R\left(-w\frac{d\varphi}{dZ}\right) = bw\left[-\sqrt{-\frac{\beta}{2}}\left(\rho^2+\frac{\alpha}{\beta}\right)\right] - aw^3\left[-\sqrt{-\frac{\beta}{2}}\left(\rho^2+\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^3, \tag{28}$$

$$\frac{d\varphi}{dZ} = -\sqrt{-\frac{\beta}{2}}\left(\rho^2+\frac{\alpha}{\beta}\right)\sqrt{1+\sqrt{\frac{35}{24}\frac{b}{a}}\frac{b}{\alpha}\left[\frac{5}{6}\frac{\beta^2}{\alpha^2}\rho^3+\frac{11}{6}\frac{\beta}{\alpha}\rho\right]}, \tag{28a}$$

$$G(\varphi) = \alpha\varphi + \beta\varphi^3. \tag{29}$$

Las velocidades estacionarias con las cuales puede moverse el solitón sin variar su forma son

$$w_0 = 0, \tag{30a}$$

$$w_{01} = \sqrt{\frac{35}{12}\left(-\frac{\beta}{\alpha^2}\right)\frac{b}{a}}, \tag{30b}$$

$$w_{02} = -\sqrt{\frac{35}{12}\left(-\frac{\beta}{\alpha^2}\right)\frac{\beta}{a}}. \tag{30c}$$

La solución se obtiene de la integral

$$\int_{-\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}}^{\varphi} \frac{d\rho}{-\sqrt{-\frac{\beta}{2}}\left(\rho^2+\frac{\alpha}{\beta}\right)\sqrt{1+\sqrt{\frac{35}{24}\frac{b}{a}}\frac{b}{\alpha}\left[\frac{5}{6}\frac{\beta^2}{\alpha^2}\rho^3+\frac{11}{6}\frac{\beta}{\alpha}\rho\right]}} = Z - Z_0. \tag{31}$$

La condición para que exista conexión entre los puntos silla es

$$\sqrt{\frac{\beta}{3a}}b < 2\sqrt{\frac{2}{35}}\alpha\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}. \tag{32}$$

El estado de reposo del solitón es inestable. Los otros dos estados con velocidad constante son estables.

$R(\partial\varphi/\partial t)$, definida según (28) y (29), es una función topológicamente equivalente a $R(\partial\varphi/\partial t) = -b\partial\varphi/\partial t + a(\partial\varphi/\partial t)^3$ en el intervalo del espacio de parámetros que nos interesa.

En general, si $R(\partial\varphi/\partial t)$ depende solamente de $\partial\varphi/\partial t$, el hecho que posea ceros es una condición necesaria para la existencia de solitones clásicos.

4. Atractores espacio-temporales

Hemos llamado estables a las soluciones estacionarias que cumplen la desigualdad (11). Realmente, estas soluciones son asintóticamente estables. Una perturbación pequeña no alejará considerablemente a la solución del estado estacionario y todas las soluciones próximas, según las condiciones iniciales, a la solución φ_s asintóticamente estable se aproximan hacia ella ilimitadamente cuando $t \to +\infty$. Es decir, existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier solución de la Ec. (1) que satisface la condición

$$|\varphi(x,t_0) - \varphi_s| < \delta \tag{33}$$

tenemos

$$\lim_{t\to+\infty} |\varphi(x,t) - \varphi_s| = 0. \tag{34}$$

De tal forma que estas soluciones son atractores espacio-temporales (las soluciones se van a aproximar a la estacionaria en el sentido de alcanzar la misma velocidad y la misma forma espacial).

Muy interesante puede resultar la investigación de la Ec. (1) perturbada por una fuerza externa periódica en el tiempo, en el caso de que existan tres o más velocidades estacionarias. En este caso pueden aparecer atractores espacio-temporales que contienen estructuras internas inestables.

5. Conclusiones

En el trabajo se ha realizado la investigación analítica de la Ec. (1), donde la función $R(\varphi, \partial\varphi/\partial t)$ juega el papel de fuerza disipativa no lineal.

Aun existiendo disipación en el sistema pueden formarse solitones que se mueven con velocidad constante y sin variar su forma. Físicamente esto es posible cuando $R(\partial\varphi/\partial t)$ cambia de signo para diferentes valores de $\partial\varphi/\partial t$, lo cual es resultado de la entrada de energía en el sistema (disipación negativa).

Sin embargo, las características de la solución están condicionadas, antes que nada, por la estructura no lineal propia del sistema. Estamos en presencia de un fenómeno de autoorganización.

De los resultados obtenidos se puede juzgar sobre la velocidad estacionaria que adquiere el solitón. En determinados sistemas pueden existir varias velocidades estacionarias, las cuales serán alternativamente estables o inestables. Una velocidad estacionaria estable representa un estado del solitón en el cual éste no varía su energía. Sólo una perturbación suficientemente grande lo hará "saltar" a un nuevo estado estacionario.

Cuando el solitón no se encuentra en uno de estos estados éste sigue existiendo con entidad propia, lo que ocurre es que se va a mover con velocidad variable, su forma también va a depender del tiempo y junto al solitón propiamente dicho aparecerá toda una serie de otras ondas no localizadas de menor amplitud.

Una solución no estacionaria de (1) se va a aproximar hacia la solución asintóticamente estable más cercana. Estas últimas representan atractores espacio-temporales del sistema.

Para valores pequeños de la perturbación general $R(\varphi, \partial\varphi/\partial t)$ respecto a $G(\varphi)$ se obtuvo la condición de existencia de los solitones clásicos y se mostró cómo investigar su estabilidad. Por otro lado, se realizó el estudio exacto de varios casos particulares.

Resulta que para valores absolutos del extremo de $R(\varphi, \partial\varphi/\partial t)$, superiores a cierto valor límite, el solitón no se estabiliza con una velocidad constante. En este caso se produce una interesante bifurcación que puede conducir a un estado no estacionario con movimiento acelerado, donde probablemente el solitón pierde su entidad.

Algunos de los resultados exactos fueron obtenidos usando un método inverso. Este consiste en proponer para $R(\varphi, \partial\varphi/\partial t)$ una función que depende exclusivamente de φ, con el objetivo de poder integrar la ecuación en cuadraturas. En un primer momento no se conoce exactamente la función $R(\varphi, \partial\varphi/\partial t)$, pero su forma cualitativa es predecible substituyendo en lugar de $\partial\varphi/\partial t$ su expresión según la solución de la ecuación no perturbada ($R = 0$). Luego de resolverse la ecuación propuesta, se obtiene la forma de $R(\varphi, \partial\varphi/\partial t)$ y la solución para la ecuación correspondiente. Al conocer el comportamiento del sistema para determinadas funciones típicas, se puede predecir el comportameinto cualitativo para todos los sistemas que son topológicamente equivalentes al resuelto exactamente. Este método puede ser muy útil para el estudio de otros problemas en sistemas no lineales complejos.

REFERENCIAS

1. K. Lonngren, A. Scott (editores), *Solitons in action*, Academic Press, London (1978).
2. V.G. Makhankov, *Phys. Rev.* **35** (1978) 1.
3. A.R. Bishop *et al.*, *Physica* **D1** (1980) 1.
4. A. Mazor, A.R. Bishop, *Physics Letters* **A 119** (1986) 273.
5. J.C. Ariyasu, A.R. Bishop, *Phys. Rev.* **B35** (1987) 3207.
6. J. Guckenheimer, Ph. Holmes, *Nonlinear oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*, Springer Verlag, New York (1983).
7. J.A. González, J.A. Holyst, *Phys. Rev.* **B35** (1987) 3643.
8. J.A. González, J. Estrada-Sarlabous, *Phys. Lett.* **A140** (1989) 189.
9. J.A. González, O. Sánchez, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 387.