Análisis comparativo de tres enfoques para el estudio de la radiación electromagnética

ARNULFO CASTELLANOS MORENO
Departamento de Física, Universidad de Sonora
Apartado postal 1626, 83000 Hermosillo, Sonora, México

Recibido el 23 de abril de 1990; aceptado el 16 de enero de 1992

RESUMEN. Se presenta un modelo de radiación electromagnética en una cavidad que la considera formada por fotones y trata a la densidad de los mismos como un proceso estocástico de nacimiento y muerte. Se obtienen las principales magnitudes termodinámicas de la radiación y una expresión para calcular todos sus momentos estadísticos. Se hace ver que la distribución de probabilidad de que haya m fotones por unidad de volumen es igual a la probabilidad promedio de que haya m fotodetecciones en un intervalo finito de tiempo, obtenida por A.M. Cetto y L. de la Peña, de donde se infiere que el concepto de fotón requiere investigación.

ABSTRACT. A model for electromagnetic radiation formed by photons in a cavity is considered, such that the density of photons, m, is taken as a birth and death stochastic process. The main thermodynamical properties of electromagnetic radiation and an expression for statistical moments $\langle m^k \rangle$ are obtained. The probability distribution of photons in a unit of volume found in this paper is equal to the average probability to find m photodetections in a finite interval time given by A.M. Cetto and L. de la Peña. I conclude that further investigation for the concept of photon is needed.

PACS: 03.65.Bz; 05.40.+j

1. INTRODUCCIÓN

Aunque la mayoría de los libros de texto sobre física moderna [1] otorgan al concepto de fotón un papel bien establecido y aceptado, un análisis de la literatura científica arroja resultados diferentes. Más aún, como señalan Kid, Ardini y Anton [2], no existe un acuerdo único entre los físicos acerca del concepto de fotón, pues desde 1905 hasta la fecha se han manejado cuando menos los cuatro siguientes:

- El fotón como una partícula análoga al electrón, pero sin carga, ni masa, espín distinto, etc.
- El fotón como una singularidad en el espacio.
- El modelo de fotón como un paquete de onda o un pulso electromagnético.
- El modelo de fotón de la electrodinámica cuántica, que lleva a tomarlo como aumentos y decrementos discretos de coeficientes de Fourier.

Esta visión parcial de los libros de texto acerca del *status* del fotón en la física lleva al estudiante a la creencia de que sin este concepto resultan inexplicables los fenómenos de intercambio de energía entre la radiación electromagnética y las partículas atómicas.

Sin embargo, un análisis exhaustivo de la literatura especializada indica todo lo contrario, por ejemplo, sobre la base de la llamada teoría neoclásica [3], que trata a los átomos con la ecuación de Schrödinger y a la radiación mediante funciones continuas en el espacio y en el tiempo como soluciones de las ecuaciones de Maxwell, ha sido posible explicar: el efecto fotoeléctrico, el efecto Compton, el corrimiento Lamb, etc.

En lo que se refiere a las propiedades termodinámicas de la radiación electromagnética contenida en una cavidad, se crea la imagen —en los libros de texto— de que su comprensión es imposible sin el concepto del quantum. En contra de este supuesto, varios autores [4] han hecho ver desde hace varios años, que la sola introducción del concepto de campo de radiación de fondo a cero grados Kelvin reproduce la ley de Planck para la radiación, de modo tal que el concepto del quantum en su forma usual no es precisamente imprescindible.

Por consiguiente, deberíamos admitir que el *status* del fotón en la física no es el de un concepto bien establecido y bien entendido por la comunidad de los físicos, como se concluye de la lectura de los textos de física; sino que se trata de un asunto polémico que debería recibir más atención.

Para contribuir a reforzar esta situación polémica del status del fotón en la física, en este artículo desarrollo los siguientes puntos:

1) En la segunda sección sintetizo [5] un modelo que trata a la radiación como un fenómeno de nacimiento y muerte al azar de fotones y discuto brevemente resultados importantes; 2) en la tercera sección presento un estudio estadístico más exhaustivo de la radiación; 3) en la cuarta sección comparo mis resultados con el llamado enfoque metaclásico para estudiar la radiación y con el enfoque de fotodetecciones discutido por A.M. Cetto y L. de la Peña [6]. En la quinta sección se revisa un modelo que Barut [7] presenta para modelar el fotón mediante ondas electromagnéticas y la sexta sección se dedica a las conclusiones.

2. Los fotones en una cavidad mediante procesos de nacimiento y muerte

Consideremos un gas compuesto de átomos cuyo espectro de energía consta de dos niveles discretos, con probabilidades de ocupación $R_i(t)$ para el nivel de energía E_i y $R_j(t)$ para el nivel de energía E_j, tal que se cumple la condición

$$\lim_{t\to\infty} R_{i,j}(t) = Z^{-1}\exp(-E_{i,j}/kT), \tag{1}$$

donde

$$Z = \int \exp(-E/kT)\, d^3p\, d^3q/h^3 \qquad \text{o} \qquad Z = \exp(-E/kT),$$

según se trate de espectro discreto o continuo.

Tomando la condición $E_i < E_j$, postulamos que las transiciones de los electrones entre ambos estados energéticos dan lugar a una radiación monocromática de frecuencia $\omega = (E_j - E_i)/\hbar$.

No es posible especificar cuántos fotones hay por unidad de volumen en un instante t, pero podemos asociar a la emisión de un fotón (nacimiento) una probabilidad por unidad de tiempo $g_m(t)$ y a la absorción de un fotón (muerte) una probabilidad $r_m(t)$, tal que la probabilidad $P_m(t)$ de que al tiempo t haya m fotones por unidad de volumen obedece la siguiente ecuación maestra [5]:

$$P_m(t) = r_{m+1}P_{m+1}(t) + g_{m-1}P_{m-1}(t) - (r_m + g_m)P_m(t). \tag{2}$$

Siguiendo el razonamiento utilizado por Einstein en 1917 [7] para obtener la ley de Planck y predecir la transferencia de momento cuando se intercambia radiación, podemos construir fenomenológicamente estas probabilidades g_m, r_m:

1) La muerte de un fotón debe darse mediante el proceso de absorción de energía $\hbar\omega$ que permite a un átomo pasar del nivel E_i al E_j, luego, $r_m(t)$ debe ser proporcional a la probabilidad $R_i(t)$ de que un átomo se encuentre en el nivel E_i, así como al número de fotones $m(t)$ por unidad de volumen. Resulta, entonces,

$$r_m(t) = \alpha_{ij}R_i(t)m(t), \tag{3}$$

donde α_{ij} es independiente de la temperatura.

2) El nacimiento de un fotón debe darse mediante el proceso de emisión de energía $\hbar\omega$ que lleva a un átomo del nivel E_j al E_i, luego, si la emisión es inducida, el razonamiento expresado en el inciso 1 lleva a

$$g'_m(t) = \beta_{ji}R_j(t)m(t),$$

pero si la emisión es espontánea, es decir, sin presencia de radiación incidente, debe tenerse

$$g''_m(t) = \gamma_{ji}R_j(t),$$

de donde resulta que la probabilidad total $g_m(t)$ está dada por

$$g_m(t) = g'_m(t) + g''_m(t) = \beta_{ji}R_j(t)m(t) + \gamma_{ji}R_j(t), \tag{4}$$

con β_{ji}, γ_{ji} independientes de la temperatura.

Estas probabilidades $g_m(t), r_m(t)$ deben ser tales que, cuando la densidad de fotones alcanza su valor estacionario (de equilibrio), m_e, resultan iguales. Se tiene entonces que

$$\lim_{t\to\infty} g_m = \lim_{t\to\infty} r_m. \tag{5}$$

Sustituyendo (4) en (5) y utilizando (1), se obtiene

$$\alpha_{ij}Z^{-1}\exp(-E_i/kT)m_e = \beta_{ji}Z^{-1}\exp(-E_j/kT) + \gamma_{ji}Z^{-1}\exp(-E_j/kT). \tag{6}$$

Suponiendo que $\lim_{T\to\infty} m_e = \infty$, resulta $\alpha_{ij} = \beta_{ji}$; usando este resultado en (6) y resolviendo para m_e, resulta

$$m_e = \frac{\gamma_{ji}}{\alpha_{ij}} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}, \tag{7}$$

de forma que la energía por cada modo de la radiación será

$$\rho(\omega, T) = \frac{\gamma_{ji}}{\alpha_{ij}} \hbar\omega \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}. \tag{8}$$

Para ω/T pequeña se tiene

$$\rho(\omega, T) = \frac{\gamma_{ji}}{\alpha_{ij}} kT,$$

la cual coincidirá con la predicción de la ley de equipartición de la energía siempre que $\alpha_{ij} = \gamma_{ji}$.

Las probabilidades de transición son entonces

$$\begin{aligned} g_m(t) &= \beta_{ji} R_j(t)[m(t) + 1], \\ r_m(t) &= \alpha_{ij} R_i(t) m(t). \end{aligned} \tag{9}$$

En lo sucesivo haremos

$$\begin{aligned} a &= \alpha_{ij} R_i(t), \\ b &= \beta_{ji} R_j(t). \end{aligned} \tag{10}$$

De la ecuación maestra dada en (2) es fácil obtener [8] la siguiente ecuación diferencial de primer orden para el promedio $\langle m(t) \rangle$:

$$\frac{d\langle m(t) \rangle}{dt} = \langle g_m - r_m \rangle, \tag{11}$$

donde $\langle m(t) \rangle = \sum_{m=0} m(t) P_m(t)$. Usando (9) y (10) en (11) se tiene

$$\frac{d\langle m(t) \rangle}{dt} + (a - b)\langle m(t) \rangle = b. \tag{12}$$

También se puede demostrar (véase la Ref. [8]) que el segundo momento cumple con la ecuación diferencial

$$\frac{d\langle m^2(t) \rangle}{dt} + 2(a - b)^2 \langle m(t) \rangle = (a + 3b) \left[\langle m(t = 0) \rangle - \frac{b}{a - b} \exp[(b - a)t \right] + \frac{b(a + 3b)}{(a - b)} + b. \tag{13}$$

En el caso de equilibrio $d\langle m\rangle_0/dt = 0$ y $d\langle m^2\rangle_0/dt = 0$ y entonces de (12) resulta

$$\langle m\rangle_0 = \frac{1}{(a/b) - 1} \tag{14}$$

y de (13) y (14) se obtiene

$$\langle m^2\rangle_0 = \frac{(a+3b)\langle m\rangle_0 + b}{2(a-b)}. \tag{15}$$

La varianza $D_m^{0\;2}$ resulta ser

$$D_m^{0\;2} = \langle m^2\rangle_0 - \langle m\rangle_0^2 = \frac{ab}{(a-b)^2}, \tag{16}$$

tal que con

$$\langle m\rangle_0 = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kt) - 1} \tag{17a}$$

tenemos

$$D_m^{0\;2} = \frac{\exp(\hbar\omega/kt)}{[\exp(\hbar\omega/kt) - 1]^2}, \tag{17b}$$

que coincide con el resultado que se obtiene a partir de la física estadística cuántica.

Multiplicando en (17a) por $V\hbar\omega^3/\pi^2c^3$ e integrando sobre las frecuencias se obtiene la energía total de la radiación en la cavidad:

$$E = \frac{V\hbar}{\pi^2c^3}\int_0^\infty \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}\omega^3\, d\omega. \tag{18}$$

La entropía del proceso estocástico $m(t)$, en el estado de equilibrio, se puede calcular a partir de la definición [8]

$$S(\omega, T) = -k\langle \ln P_m^s\rangle, \tag{19}$$

con P_m^s la solución en equilibrio de la ecuación maestra dada en (2) y que es tal que $dP_m^s/dt = 0$.

En este caso se tiene [8]

$$P_m^s = \frac{P_0^s g_{m-1}g_{m-2}\cdots g_0}{r_m r_{m-1}\cdots r_1}, \tag{20a}$$

con

$$P_0^{s-1} = 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{g_{m-1} \cdots g_0}{r_m \cdots r_1}, \tag{20b}$$

donde N es un número que puede ser muy grande y que tomaremos como infinito. Usando (9), (10) y la condición (1) en las Ecs. (20) se obtiene

$$P_m^s = [1 - \exp(-\hbar\omega/kT)] \exp(-m\hbar\omega/kT), \tag{21}$$

que sustituida en (19) lleva a la expresión

$$S(\omega, T) = -k \ln[1 - \exp(-\hbar\omega/kT)] + \frac{\hbar\omega}{T} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}, \tag{22}$$

para la entropía por unidad de volumen y por modo de una radiación monocromática. Multiplicando (22) por $V\omega^2/\pi^2 c^3$ e integrando sobre todas las frecuencias, se obtiene la entropía total de la radiación en la cavidad:

$$\begin{aligned} S(V,T) = &-\frac{kV}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^2 \ln[1 - \exp(-\hbar\omega/kT)]\, d\omega \\ &+ \frac{\hbar V}{\pi^2 c^3 T} \int_0^\infty \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1} \omega^3\, d\omega. \end{aligned} \tag{23}$$

La energía libre de Helmholtz, $F = E - TS$, que se puede calcular a partir de (18) y (23), resulta de la forma

$$F = \frac{kTV}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^2 \ln[1 - \exp(\hbar\omega/kT)]\, d\omega. \tag{24}$$

Las expresiones (18), (23) y (24) son idénticas a los resultados que se obtienen a partir de la física estadística cuántica para un gas de fotones [9], pero aquí solamente hemos utilizado la física estadística clásica a través de la condición (1). Nótese también que no hemos introducido explícitamente un concepto de indistinguibilidad de los fotones. A partir de la Ec. (24) pueden obtenerse las propiedades termodinámicas del gas de fotones [9].

3. Otras propiedades estadísticas de la radiación. Consideraciones sobre el caso fuera de equilibrio

Multiplicando la ecuación maestra por m^k, con $k = 1, 2, \ldots$ un número natural, y sumando sobre m se obtiene

$$\frac{d\langle m^k \rangle}{dt} = \left\langle g_m[(m+1)^k - m^k] \right\rangle - \left\langle r_m[m^k - (m-1)^k] \right\rangle$$

y usando la fórmula de Newton para el binomio resulta

$$\frac{d\langle m^k\rangle}{dt} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \left[\langle m^i g_m\rangle + (-1)^{k-i}\langle m^i r_m\rangle\right], \tag{25}$$

con

$$\binom{k}{i} = \frac{k!}{i!(m-i)!}.$$

Sustituyendo g_m y r_m en (25) y reacomodando resulta

$$\frac{d\langle m^k\rangle}{dt} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \left\{\left[b + (-1)^{k-1}a\right]\langle m^{i+1}\rangle + b\langle m^i\rangle\right\}, \tag{26}$$

que es la ecuación diferencial para la evolución temporal del k-ésimo momento de la densidad de fotones. Como puede verse, ésta puede ser resuelta siempre que se conozcan las probabilidades de transición y hayan sido resueltas con anterioridad las $(k-1)$-ésimas ecuaciones para los momentos $\langle m^i\rangle$, $i = 1, \ldots, k-1$.

Multiplicando (26) por $1/b$, haciendo $ab^{-1} = \exp(\theta(t))$, con $\theta(t) = R_i(t)/R_j(t)$ y reacomodando resulta

$$\frac{1}{b}\frac{d\langle m^k\rangle}{dt} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \langle m^i\rangle + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} [1 + (-1)^{k-i}\exp(\theta(t))]\langle m^{i+1}\rangle,$$

separando el $(k-1)$-ésimo sumando del segundo término del miembro derecho, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{b}\frac{d\langle m^k\rangle}{dt} + k[\exp(\theta(t)) - 1]\langle m^k\rangle &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \langle m^i\rangle \\ &\quad + \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} [1 + (-1)^{k-i}\exp(\theta(t))]\langle m^{i+1}\rangle,\end{aligned} \tag{27}$$

cuya solución es de la forma

$$\langle m^k(t)\rangle = \exp(-A(t))\left\{\langle m(t=0)\rangle + \int_0^t Q(t')\exp(A(t'))\,dt'\right\}, \tag{28}$$

con

$$A(t) = \kappa\int_0^t b(t')[\exp(\theta(t')) - 1]\,dt', \tag{29}$$

y $Q(t')$ igual al miembro derecho de la Ec. (27).

Si $A(t') > 0$, la expresión (28) llevará al valor finito

$$\langle m^k \rangle_0 = \lim_{t\to\infty} \exp(-A(t)) \int_0^t Q(t') \exp(A(t'))\, dt', \tag{30}$$

veamos a continuación bajo qué condiciones ocurre esto.

De

$$\theta(t) = \ln(a/b) = \ln(R_i(t)/R_j(t)), \tag{31}$$

resulta que $\theta(t) > 1$ siempre que $R_i(t) > R_j(t)$. Esto es cierto para el caso de equilibrio pero no necesariamente es así durante un proceso de relajación, por consiguiente, $\langle m^k(t) \rangle$ tenderá a un valor finito para tiempos grandes siempre que la probabilidad de ocupación del nivel más bajo, E_i, sea mayor que la probabilidad de ocupación del nivel más alto, E_j, por lo menos el tiempo suficiente como para que $A(t)$ converja a valores positivos cuando $t \to \infty$.

Estas ecuaciones sugieren que puede existir una radiación electromagnética fuera de equilibrio cuando ésta está en interacción con un gas de sistemas atómicos que se encuentran fuera de equilibrio y en proceso de relajación hacia él. Entre otras cosas, debería observarse una desviación respecto de la ley de Planck durante el tiempo de relajación de la radiación.

En el caso de equilibrio, $d\langle m^k \rangle_0/dt = 0$, se obtiene a partir de (27):

$$\begin{aligned}\langle m^k \rangle_0 = {}& \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} \langle m^{i+1} \rangle_0 \frac{1 + (-1)^{k-i} \exp(\theta)}{\exp(\theta) - 1} \\ & + \frac{1}{k} \frac{1}{\exp(\theta) - 1} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \langle m^i \rangle_0, \end{aligned} \tag{32}$$

que lleva a los siguientes primeros momentos mediante un procedimiento puramente algebraico:

$$\langle m \rangle_0 = \frac{1}{\exp(\theta) - 1}, \tag{32a}$$

$$\langle m^2 \rangle_0 = \frac{\exp(\theta) + 1}{(\exp(\theta) - 1)^2}, \tag{32b}$$

$$\langle m^3 \rangle_0 = \frac{\exp(2\theta) + 4\exp(\theta) + 1}{(\exp(\theta) - 1)^3}, \tag{32c}$$

$$\langle m^4 \rangle_0 = \frac{\exp(3\theta) + 11\exp(2\theta) + 11\exp(\theta) + 1}{(\exp(\theta) - 1)^4}, \tag{32d}$$

$$\langle m^5 \rangle_0 = \frac{\exp(4\theta) + 22\exp(3\theta) + 66\exp(2\theta) + 22\exp(\theta) + 1}{(\exp(\theta) - 1)^5}. \tag{32e}$$

Los mismos momentos pueden obtenerse mediante otro procedimiento que también proviene de la técnica de los procesos estocásticos. Sea la función característica

$$G(\kappa) = \langle \exp(i\kappa m) \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} P_m \exp(i\kappa m); \tag{33}$$

sustituyendo (21) en (33) resulta, luego de un cálculo sencillo,

$$G(\kappa) = \frac{1-\gamma}{1-\gamma \exp(i\kappa)}, \tag{34}$$

con $\kappa = \exp(-\hbar\omega/kT)$. El k-ésimo momento de la densidad de fotones se obtiene mediante la expresión

$$\langle m^k \rangle_0 = i^{-k} G^{(k)}(\kappa = 0), \tag{35}$$

que lleva también a las expresiones dadas en ($32a$ - $32e$).

El k-ésimo momento de la energía de la radiación monocromática, por unidad de volumen y por modo normal, se obtiene mediante la expresión

$$\langle E^k \rangle_0 = (\hbar\omega)^k \langle m^k \rangle_0. \tag{36}$$

Hasta este punto el modelo aquí utilizado se muestra exitoso y apunta hacia la consolidación del concepto de fotón, sea como una partícula más, sea como una singularidad. Especialmente el hecho de considerar a la densidad de fotones como un proceso estocástico revela ser de mucha utilidad, toda vez que hemos podido evitar el formalismo de la física estadística cuántica, e inclusive, hemos podido ir más allá: hasta la predicción de una desviación respecto de la ley de Planck cuando la radiación proviene de la interacción con un gas atómico fuera de equilibrio.

Cabe ahora regresar a la cautela con que me he conducido en la introducción de este trabajo y revisar dos concepciones enteramente diferentes de la radiación en una cavidad.

4. El enfoque metaclásico y el conteo de fotodetecciones

A.M. Cetto y L. de la Peña han reformulado el enfoque utilizado por Einstein en 1906 para estudiar el calor específico de los sólidos, adecuándolo a la radiación electromagnética. En síntesis, su tratamiento es como sigue:

1) Sea un campo electromagnético aleatorio en su estado de máxima entropía, tal que cada uno de sus modos tiene una energía media normalizada a la unidad. Con estas condiciones y definiendo la entropía como $S = k\langle \ln W \rangle$, se obtiene

$$W(E) = Z^{-1} \exp(-\phi E), \tag{37}$$

con $\phi(\beta)$, ($\beta = 1/kT$), una función no especificada de la temperatura.

2) Si $f(E)$ es una función de la energía, se define su promedio como

$$\langle f(E)\rangle = Z^{-1}\int_0^{\infty} f(E)\exp(-\phi E)\,dE. \tag{38}$$

3) Retomando el enfoque utilizado por Einstein en 1906 para estudiar los calores específicos, proponen

$$W(E) = Z^{-1}\exp(-\beta E g(E)), \tag{39}$$

donde $g(E)$ es una densidad de estados energéticos.

4) Encuentran que para obtener la ley de Planck, $g(E)$ tiene que estar dada como

$$g(E) = \sum_n \delta(E - n\gamma), \tag{40}$$

donde $\gamma = \hbar\omega$. Luego calculan

$$\langle E^r\rangle = \sum_n E_n^r W(E) \tag{41}$$

y obtienen la expresión

$$\langle E^r\rangle = (-1)^r Z_T^{-1}\frac{\partial^r Z_T}{\partial \beta^r}, \tag{42}$$

con $Z_T = \langle E\rangle + \hbar\omega$. Esta expresión reproduce los momentos dados en (32a–32e), simplemente dividiendo entre $(\hbar\omega)^k$.

Otro enfoque interesante, debido a los mismos autores, parte de suponer un campo clásico y estocástico que produce *fotodetecciones* sobre un aparato de medición. Tal enfoque es el siguiente:

Sea un haz de luz monocromática incidiendo sobre un aparato de medición con intensidad $I(t)$ al tiempo t. Si $U(t, t+\Delta t)$ es la probabilidad de una fotodetección en el intervalo pequeño de tiempo $(t, t+\Delta t)$, ésta estará dada por

$$U(t, t+\Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} I(t')\,dt'. \tag{43}$$

La probabilidad de n fotodetecciones en un intervalo finito $(t, t+\Delta t)$, está dada por la distribución de Poisson

$$p(n) = \frac{1}{n!}(\alpha U)^n \exp(-\alpha U), \tag{44}$$

siempre que las fotodetecciones sean eventos independientes entre sí.

Si, como ya dijimos, se trata de un campo aleatorio que fluctúa al azar, U deberá ser una variable estocástica, por consiguiente, $p(n)$ debe ser promediada para obtener una probabilidad efectiva $\langle p(n)\rangle$ de que haya n fotodetecciones en $(t, t+\Delta t)$. Se tiene entonces

$$p(n) = \frac{1}{n!}\langle(\alpha U)^n \exp(-\alpha U)\rangle, \tag{45}$$

Por otra parte, de la Ec. (38), Cetto y de la Peña concluyen que $\bar{n} = \alpha\bar{U}$, y desarrollando en serie de Taylor el lado derecho de (45) obtienen

$$\langle p(n)\rangle = \frac{(\bar{n})^n}{(1+\bar{n})^{n+1}}. \tag{46}$$

En particular, si

$$\bar{n} = \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} = \frac{\epsilon}{1-\epsilon}, \tag{47}$$

resulta

$$\langle p(n)\rangle = (1-\epsilon)\epsilon^n, \tag{48}$$

con $\epsilon = \exp(\beta\hbar\omega)$, que coincide con la Ec. (21) obtenida mediante mi enfoque. La diferencia se encuentra en que (48) y (21) se refieren a cosas distintas: mientras que (21) es la probabilidad de que haya m fotones por unidad de volumen cuando la radiación se encuentra en equilibrio, la expresión (48) nos da la probabilidad promedio de que haya n fotodetecciones en un intervalo de tiempo finito.

Si ambas distribuciones de probabilidad son iguales, producirán los mismos momentos estadísticos y, por consiguiente, las mismas propiedades estadísticas. Esto abre entonces la siguiente disyuntiva: ¿Está la radiación electromagnética verdaderamente hecha de fotones, o sucede que por alguna razón los sistemas atómicos detectan *pulsos* provenientes de un campo de radiación clásico y estocástico? Como dijimos en la introducción de este trabajo, el concepto de fotón está lejos de ser universalmente aceptado y necesita ser materia de investigación. En este sentido conviene mencionar un esfuerzo desarrollado por A.O. Barut para modelar el fotón mediante paquetes de radiación que no se dispersan.

5. Un modelo clásico del fotón

Sea un bulto moviéndose con velocidad de grupo $v < c$ y velocidad de fase $u > c$, tal que $uv = c^2$. Como la ecuación de onda

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0, \tag{49}$$

es covariante, puede ser resuelta en el sistema de referencia del bulto y después transformarla al sistema de referencia del laboratorio. Barut [10] propone una solución de la forma

$$\phi(r', t') = \int_0^\infty F(r') \exp(-i\Omega t')\, d\Omega \tag{50}$$

en el marco de referencia del bulto, que no es estática, sino oscilante con frecuencia Ω y tal que $F(r')$ cumple con la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 F - \left(\frac{\Omega}{c}\right)^2 F = 0,$$

y es de la forma

$$F(r') = \sum_{lm} C_{lm} \frac{1}{\sqrt{r'}} J_{l+1/2}(\Omega r'/c) P_{lm}(\cos\theta) \exp(im\phi), \tag{51}$$

para la ecuación de onda escalar y para una frecuencia Ω dada.

Con base en la solución anterior Barut y Grant [11] proponen la siguiente expresión para el potencial vectorial del campo electromagnético:

$$A_\mu(r,t) = \lambda \int \sum_{l,m} C_\mu^{l,m} \frac{1}{\sqrt{r'}} J_{l+1/2}(\Omega r/c) Y_{l,m}(\phi, \psi) f(\Omega) \exp(i\Omega t)\, d\Omega,$$

donde λ es una constante que fija las dimensiones y $f(\Omega)$ es una distribución de frecuencias alrededor de un valor fijo Ω_0.

Los autores hacen ver que mientras en el caso escalar hay soluciones esféricamente simétricas, en el caso tridimensional ya no sucede así. En particular exploran dos soluciones, aquéllas en las cuales $C_1^{l,m}$ y $C_2^{l,m}$ valen cero. Encuentran una relación de recurrencia para $C_0^{l,m}$ y $C_3^{l,m}$ y construyen dos soluciones específicas, que son

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{-i\lambda c\cos\theta}{\sqrt{r}} \int J_{3/2}(\Omega r/c) f(\Omega) \exp(i\Omega t)\, d\Omega, \\ A_3 &= \frac{\lambda c}{\sqrt{r}} \int J_{1/2}(\Omega r/c) f(\Omega) \exp(i\Omega t)\, d\Omega, \end{aligned} \tag{52}$$

que tienen simetría azimutal; y también

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\lambda}{\sqrt{r}} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \exp(i\psi) \int J_{5/2}(\Omega r/c) f(\Omega) \exp(i\Omega t)\, d\Omega, \\ \mathbf{A} &= i\frac{\lambda \exp(i\psi)}{c\sqrt{r}} \int d\Omega\, f(\Omega) \exp(i\Omega t) \left[\hat{r} \operatorname{sen}\theta \cos\theta J_{3/2}(\Omega r/c) - \hat{\theta} \operatorname{sen}^2\theta J_{3/2}(\Omega r/c)\right], \end{aligned} \tag{53}$$

que no tienen simetría azimutal y poseen momento angular distinto de cero.

Pasando al sistema de referencia del laboratorio los autores demuestran que la energía de la solución en movimiento está dada por la expresión

$$E = \lambda\omega,$$

y que el momento cumple con la relación

$$E^2 = c^2 P^2 + U^2,$$

donde $U = \lambda\Omega$.

Barut y Grant consideran que estas soluciones modelan la dualidad onda partícula del comportamiento cuántico.

Los trabajos citados en las Refs. [10–11] podrían clasificarse dentro de una rama similar a la de las referencias dadas en [3], abren un tema interesante que requiere amplia reflexión y refuerzan el hecho de que el fotón no es un concepto plenamente establecido, sino que requiere investigación.

6. Conclusiones

1) Tomando la densidad de fotones $m(t)$ como un proceso estocástico de nacimiento y muerte, se pueden reproducir la termodinámica de la radiación del cuerpo negro y los momentos estadísticos de dicha densidad; además, se predice la existencia de una radiación fuera de equilibrio que presentaría desviaciones respecto de la ley de Planck durante un intervalo de tiempo.

2) Un tratamiento que considere al campo electromagnético como un fenómeno clásico estocástico, que produce pulsos sobre los sistemas atómicos, permite predecir las mismas propiedades estadísticas que el modelo de fotones.

3) Es posible construir paquetes de ondas electromagnéticas que no se dispersan y cuya energía es proporcional a la frecuencia ω.

4) El concepto de fotón necesita ser considerado materia de investigación.

Referencias

1. Ver, por ejemplo, A. Beiser, *Conceptos de Física Moderna*, Mc-Graw Hill (1970); A.P. Arya, *Elementary Modern Physics*, Adisson-Wesley (1975); D. Bohm, *Quantum Theory*, Prentice-Hall (1951); R. Eisberg y R. Resnick, *Física Cuántica*, Limusa (1979).
2. R. Kid, J. Ardini y A. Anton, "Evolution of the Modern Photon", *Am. J. Phys.* **57** (1989) 27.
3. M.D. Crisp and E.T. Jaynes, "Radiative Effects in Semiclassical Theory", *Phys. Rev.* **179** (1969) 1253; M. Cray, M. Shih y P.W. Milonni, "Stimulated Emission, Absorption and Interference", *Am. J. Phys.* **50** (1982) 1016; G. Henderson, "Quantum Dynamic and a Semiclassical Description of the Photon", *Am. J. Phys.* **48** (1980) 48; J. Barwick, "Classical Theory of Radiative Transitions", *Phys. Rev.* **A17** (1978) 1912; P.W. Milonni, "Why Spontaneous Emission?", *Am. J. Phys.* **52** (1984) 340.
4. Ver L. de la Peña, "Stochastic Electrodynamics: Its Development, Present Situation and Perspectives", en *Stochastic Processes Applied to Physics and Other Related Fields*, ed. por B.

Gómez, S.M. Moore, A.M. Rodríguez Vergas y A. Rueda, World Scientific (1983). Ver también las referencias citadas allí.

5. A. Castellanos, "Birth and Death Processes Applied to an AB Coefficients Einstein Model", enviado a publicación.
6. A.M. Cetto y L. de la Peña, "Continuous and Discrete Aspects of Blackbody Radiation", *Found. Phys.* **19** (1989) 419.
7. A. Einstein, "Quantentheorie der Strahlung", *Phys. Zs.* **18** (1917) 121.
8. N.G. Van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, North-Holland (1981).
9. L. Landau y Lifshitz, *Física Estadística*, Reverté (1969).
10. A.O. Barut, "$E = \hbar\omega$", *Phys. Lett.* **A 143** (1990) 349.
11. A.O. Barut y A. Grant, "Quantum Particle-like Configurations of the Electromagnetic Field", *Foundations of Physics Letters* **3** (1990) 303.