

Estados coherentes del campo de radiación

J.O. CORTÉS-TAMAYO

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Instituto Politécnico Nacional

Edificio 9, U.P. Zacatenco, 07738 México, D.F.

Recibido el 25 de junio de 1991; aceptado el 5 de diciembre de 1991

RESUMEN. Se presentan los antecedentes de la teoría cuántica de coherencia. Se discuten los esquemas experimentales y en el contexto de la correlación se definen los estados coherentes. También se introducen los conceptos de agrupamiento y desagrupamiento de fotones, fotoestadística, mínima incertidumbre y su representación en el espacio fase.

ABSTRACT. The antecedents of the quantum theory of coherence are presented. The experimental setup is discussed and in the correlation context the coherent states are defined. Also studied are concepts like photon bunching and antibunching, photon statistics, minimum uncertainty and its phase-space representation.

PACS: 42.50.-p; 03.70.+k; 42.10.Mg

1. INTRODUCCIÓN

Debido a la creciente importancia que cobra el láser por sus trascendentales desarrollos científicos y tecnológicos y los nuevos efectos a que da lugar en la naturaleza, es de fundamental relevancia el estudio y caracterización de la radiación láser coherente. En este artículo la intención del autor es presentar la descripción cuántica de la radiación coherente en láseres para caracterizar sus propiedades fotoestadísticas y fluctuantes. En la Sec. 2 se presenta una perspectiva histórica de su evolución. Antes de entrar en materia se ha considerado necesario incluir la idea del operador de densidad (Sec. 3), como otra manera de representar la máxima información acerca del sistema y también como herramienta para calcular valores medios de variables dinámicas a lo largo del texto. En la Sec. 4 se procede al desarrollo formal de los estados coherentes de la radiación; esto se realiza discutiendo cuánticamente las propiedades de correlación y coherencia de los experimentos que originaron su desarrollo, para después obtener algunas de sus propiedades matemáticas y sus características físicas más importantes en nuestro contexto. En la Sec. 5 se discuten las relaciones de incertidumbre de Heisenberg y el principio de correspondencia de Bohr en el límite clásico de muchos fotones. Finalmente, en la Sec. 6 se obtiene la función de onda para estados coherentes de la radiación y con ésta su función de distribución en el espacio fase para llegar a la representación gráfica del área error en dicho espacio.

2. ANTECEDENTES

Para llegar a un entendimiento de los haces de luz láser y posteriormente al de la interacción radiación-materia con haces de características cuánticas, examinaremos en este

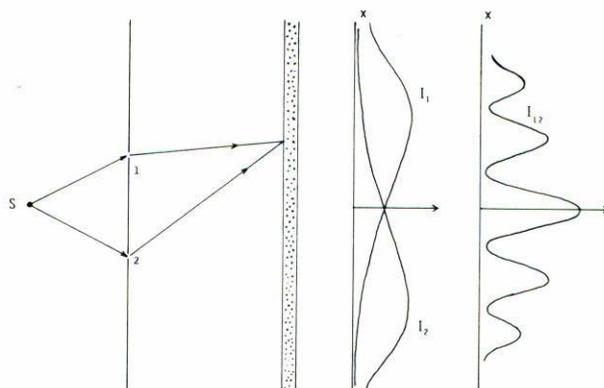


FIGURA 1. Experimento de interferencia de Young.

artículo una de las clases equivalentes de estados de mínima incertidumbre [1]: la de los estados coherentes de Glauber.

Los estados coherentes fueron descubiertos por E. Schrödinger en 1926 en el oscilador armónico simple [2]. Él encontró funciones de onda que siguen el movimiento clásico de una partícula y cuyos perfiles son temporalmente estacionarios. Sin embargo, fueron introducidos en la óptica cuántica por Glauber en 1963 mediante el estudio de la coherencia de los campos de radiación cuantizados; fue en ese contexto que se les denominó estados coherentes [3].

Por un lado, el concepto de coherencia usado convencionalmente en óptica clásica implica que dos valores del campo de un haz de luz a puntos espacio-tiempo muy separados (r_1, t_1) y (r_2, t_2) se encuentran correlacionados y que cuando se usan medios ópticos para superponerlos resultan franjas de intensidad; el ejemplo típico es el experimento de interferencia de Young (Fig. 1). No obstante, este concepto requiere de un solo detector, el cual mide la intensidad o en otras palabras el cuadrado de la amplitud del campo y está confinado a describir haces monocromáticos y estacionarios en el tiempo. Con esto es posible caracterizar todos los experimentos típicos de la óptica clásica, como son los experimentos de difracción e interferencia. Esta coherencia clásica se introduce a través de la función de visibilidad de las franjas de interferencia en el experimento de Young, y se formula mediante la teoría estadística de cuasiprobabilidad [4].

Por otra parte, el desarrollo del máser óptico, también conocido como láser, en 1958 por Schawlow y Townes [5], que consiste de una cavidad resonante y un medio activo que genera haces de luz colimados, de alta potencia y de ancho espectral angosto dio lugar a nuevos experimentos, como el de Hanbury Brown-Twiss en 1955 [6]. El experimento, el primero basado en la detección efectiva de fotones, se realizó utilizando dos detectores situados en puntos espacio-tiempo diferentes (r, t) y (r', t') para registrar correlaciones de fotones (Fig. 2). Lo que se mide en el experimento es el promedio de que se detecte simultáneamente un fotón en los detectores $D1$ y $D2$, esto es el promedio de una expresión de potencia cuarta en las amplitudes del campo, no cuadrática como en el caso clásico

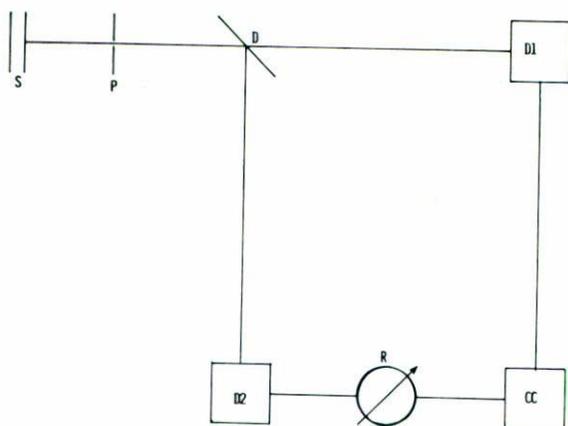


FIGURA 2. Experimento de Hanbury Brown-Twiss.

con un solo detector. Esas cantidades de potencia cuarta o mayores, debidas a los campos de radiación láser, dieron lugar a efectos no lineales observables en la materia [7], y de allí al estudio experimental de una nueva y prometedora disciplina: la óptica no lineal.

Como la coherencia de un haz de luz está relacionada con las correlaciones que éste experimenta en intervalos considerables de distancia y tiempo, la idea de R.J. Glauber en 1963 [8] fue examinar un experimento más general en que se colocan n detectores en diferentes puntos espacio-tiempo para registrar correlaciones de n fotones. Buscando que la teoría fuese consistente en el límite clásico de gran número de fotones, Glauber estudió el problema de radiación y fotoestadística mediante la discusión de sus propiedades de correlación y coherencia. De dicho estudio encontró en forma natural el concepto de estado coherente, el cual resultó único en la descripción de los haces de luz que ocurren en óptica coherente y que cuánticamente corresponden a estados en que el número de fotones es grande e intrínsecamente incierto, lo que no ofrecían otras representaciones de la luz como la formulada mediante los estados de Fock, cuyo número de fotones está bien determinado pero que describen insatisfactoriamente tales problemas. Por ejemplo, las densidades de probabilidad en la localización de los fotones (Fig. 3), muestran diferencias apreciables con los perfiles clásicos correspondientes [9], pero aunque esta diferencia disminuye conforme el número de fotones crece, también crece el nivel de ruido del sistema como se aprecia en la Ec. (A7).

De esa manera, los estados coherentes de Glauber satisfacen el principio de correspondencia de Bohr, es decir, los campos cuánticos coherentes reproducen a las ondas electromagnéticas clásicas con gran precisión en el límite de muchos fotones; son la contraparte cuántica más próxima a un campo clásico en el límite clásico. Además mantienen al sistema con la mínima fluctuación permitida por el principio de incertidumbre de Heisenberg, (Ec. (A6)), correspondiente a la fluctuación del vacío (Ec. (A7) con $k = 0$), justificando que también se les llame estados de mínima incertidumbre. Antes de estudiarlos introduciremos el concepto del operador de densidad como herramienta.

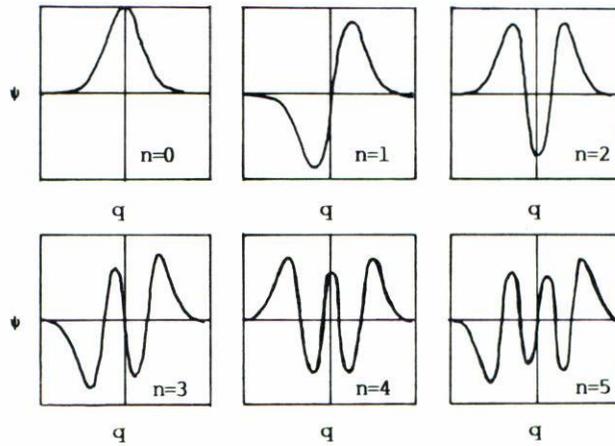


FIGURA 3. Eigenfunciones de la energía para los primeros seis estados del oscilador armónico [9].

3. OPERADOR DE DENSIDAD

Sabemos que los estados cuánticos puros de un sistema dinámico son conjuntos de eigenvalores de operadores que conmutan y que proporcionan la máxima información del sistema a $t = 0$; además, dichos estados dinámicos se representan en notación bra-ket $|k\rangle$ y están bien determinados. Ahora bien, dada la interacción de varios subsistemas, cada uno descrito por un eigenestado puro $|k_i\rangle$ a $t = 0$, el procedimiento usual para encontrar el estado de todo el sistema es efectuar el producto directo de los eigenestados de cada subsistema en la forma

$$|\{k_i\}\rangle = |k_1\rangle|k_2\rangle \cdots \tag{1}$$

Sin embargo, existen situaciones físicas en que el sistema depende de parámetros aleatorios incontrolables que impiden expresar su condición mediante un estado puro $|\{k_i\}\rangle$. En otras palabras, carecemos de la información suficiente para determinar con precisión las variables de uno de los conjuntos completos de eigenvalores de operadores compatibles asociados con el sistema. El hecho de que el estado global del sistema no pueda representarse como un producto de vectores estado puros, como en la Ec. (1), suele interpretarse como una manifestación de que los subsistemas (sus variables aleatorias) interactúan entre sí y por lo tanto están correlacionados.

Aunque no contamos con un bra-ket $|k\rangle$ para representar el estado de un sistema dinámico como el que ya mencionamos, existe la posibilidad de obtener una representación alternativa mediante el empleo de métodos estadísticos y considerando únicamente la información experimental de que disponemos. Generalmente todo lo que conocemos acerca de dicho sistema es que existe un conjunto de probabilidades P_R de que éste se encuentre en un rango de estados bien determinados $|R\rangle$. Con esto, el estado global del sistema es una “mezcla” estadística que puede determinarse a través de una superposición de estados

puros:

$$|u\rangle = \sum_R C_R |R\rangle = \sum_R \langle R|u\rangle |R\rangle. \quad (2)$$

Para calcular la probabilidad de obtener un cierto resultado experimental $\langle O \rangle$ del sistema, se debe calcular la probabilidad P_R de obtener cada uno de los estados puros $|R\rangle$ y luego promediar, asignando a cada estado puro un peso probabilístico P_R :

$$\langle O \rangle = \sum_{R,R'} C_R C_{R'}^* \langle R'|O|R\rangle, \quad (3)$$

en donde

$$P_R = |C_R|^2, \quad \sum_R P_R = 1. \quad (4)$$

Aunque el resultado de la Ec. (3) es correcto, existe otra representación más elegante y que facilita los cálculos, se trata del formalismo del operador de densidad. Puede obtenerse de la expresión (3) desarrollando sus términos:

$$\begin{aligned} \langle O \rangle &= \sum_{R,R'} \langle R|u\rangle \langle u|R'\rangle \langle R'|O|R\rangle \\ &= \sum_R \langle R|u\rangle \langle u|O|R\rangle, \end{aligned} \quad (5)$$

en donde se define el operador de densidad como

$$\begin{aligned} \rho &= |u\rangle \langle u| \\ &= \sum_{R,R'} C_R C_{R'}^* |R\rangle \langle R'|, \end{aligned} \quad (6)$$

el cual contiene, igual que las P_R toda la información del sistema y representa el promedio sobre los parámetros aleatorios. De las Ecs. (5) y (6) encontramos que

$$\langle O \rangle = \sum_R \langle R|\rho O|R\rangle = \text{tr}[\rho O] \quad (7)$$

Es fácil encontrar las propiedades del operador de densidad. Por ejemplo, en la Ec. (7) la hermiticidad de O también implica hermiticidad del operador de densidad:

$$\rho = \rho^\dagger \quad (8)$$

Y cuando $O = 1$,

$$\text{tr}[\rho] = \sum_R \rho_{R,R} = \sum_R P_R = 1, \quad (9)$$

en donde los elementos diagonales de ρ son positivos definidos

$$P_R = \rho_{R,R} = \langle R|\rho|R\rangle = \langle R|u\rangle\langle u|R\rangle = |\langle u|R\rangle|^2 \geq 0. \quad (10)$$

De estos resultados [Ecs. (9) y (10)] se concluye que los $\rho_{R,R}$ están en el rango

$$1 \geq \rho_{R,R} \geq 0 \quad (11)$$

y

$$(\text{tr}[\rho])^2 = \left(\sum_R \rho_{R,R} \right)^2 = 1 \geq \sum_R (\rho_{R,R})^2, \quad (12)$$

$$\text{tr}[\rho^2] = \sum_R |\rho_{R,R}|^2 \leq 1. \quad (13)$$

La igualdad se cumple cuando conocemos con precisión el estado inicial del sistema $|R(t_0)\rangle$, en este caso $P_R = 1$ y

$$\rho = |R(t_0)\rangle\langle R(t_0)|, \quad (14)$$

de manera que

$$\rho^2 = |R(t_0)\rangle\langle R(t_0)|R(t_0)\rangle\langle R(t_0)|, \quad (15)$$

$$\text{tr}[\rho^2] = 1. \quad (16)$$

Cuando se satisface la Ec. (16) decimos que el “ensemble” o conjunto de posibilidades se reducen a un estado puro de máxima información; el estado puro es un caso particular de la mezcla estadística.

Por otra parte, de acuerdo con la ecuación de Schrödinger

$$\frac{\partial}{\partial t}|u\rangle = -\frac{i}{\hbar}H|u\rangle, \quad (17)$$

la evolución temporal del operador de densidad está dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}(H\rho - \rho H) = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho], \quad (18)$$

en donde, en el esquema de Schrödinger,

$$|u(t)\rangle = \exp[-i\hbar^{-1}Ht]|u(0)\rangle \quad (19)$$

y

$$\rho(t) = \exp[-i\hbar^{-1}Ht]\rho(0)\exp[i\hbar^{-1}Ht]. \quad (20)$$

De esta forma, la evolución temporal del valor medio de cualquier observable O se describe mediante las Ecs. (7), (19) y (20) por

$$\langle O \rangle_t = \text{tr}[O\rho(t)] = \text{tr}[O(t)\rho(0)], \quad (21)$$

en el esquema de Schrödinger y de Heisenberg, respectivamente.

En la base $|R\rangle = |E\rangle$ en que el hamiltoniano H es diagonal, el elemento kl de la matriz de densidad toma la forma

$$\rho_{kl}(t) = \rho_{kl}(0)\exp[i\hbar^{-1}(E_l - E_k)t]. \quad (22)$$

Observemos que esta expresión depende de cantidades experimentalmente medibles: las diferencias de energía, las que a su vez son función de las frecuencias de vibración, entre los niveles l y k del oscilador armónico; en conclusión, hemos obtenido a lo largo de esta sección la representación en el operador de densidad del estado dinámico de un sistema cuántico, empleando métodos estadísticos e información experimental.

4. ESTADOS COHERENTES

Para formalizar, las correlaciones se introducen al definir la coherencia cuántica de primer orden mediante el experimento de interferencia de Young (Fig. 1) como un soporte cuántico de la teoría clásica que reproduce patrones de interferencia en la aproximación de un fotón. Para una onda electromagnética monocromática o cuasimonocromática plana en el visible, la intensidad del campo eléctrico

$$I = E^2 \quad (E \text{ real}), \quad (23)$$

es una función temporal altamente oscilante, con períodos del orden de 10^{-15} seg.; demasiado cortos para el tiempo de resolución de los detectores ópticos disponibles. Lo que miden los detectores, en su lugar, es el promedio sobre muchos períodos de oscilación representado por

$$I = E \times E^* \quad (E \text{ compleja}), \quad (24)$$

en donde E es una señal analítica y E^* su conjugada. Es debido a esto y a la descomposición del campo eléctrico real (Ec. (A5)) en la sumatoria de una señal analítica $E^{(-)}$, proporcional a $a \exp[-i\omega t]$, y de su conjugada $E^{(+)}$, proporcional a $a^+ \exp[i\omega t]$, que

podemos interpretar a $E^{(-)}$ como análoga a la señal analítica clásica y la que nos da toda la información acerca del campo; en el dominio cuántico con detectores basados en el efecto fotoeléctrico esta información está relacionada con la absorción de fotones o con la corriente de electrones que genera y a su señal analítica conjugada podemos relacionarla con la emisión de fotones. En estos términos la Ec. (A5) queda en la forma

$$E(r, t) = E^{(-)}(r, t) + E^{(+)}(r, t). \quad (25)$$

A su vez, en el experimento de Young, cada término de la Ec. (25) sobre la pantalla de observación es una superposición de los campos a través de las pequeñas aberturas 1 y 2:

$$E^{(-)}(r, t) = E^{(-)}(r_1, t_1) + E^{(-)}(r_2, t_2). \quad (26)$$

ya que la cantidad medible es la probabilidad por unidad de tiempo de que el detector absorba un fotón del campo en el estado $|i\rangle$ en el punto espacio-tiempo $X = (r, t)$, el resultado es proporcional a

$$\begin{aligned} \sum_f |\langle f | E^{(-)}(X) | i \rangle|^2 &= \sum_f \langle i | E^{(+)}(X) | f \rangle \langle f | E^{(-)}(X) | i \rangle \\ &= \langle i | E^{(+)}(X) E^{(-)}(X) | i \rangle. \end{aligned} \quad (27)$$

Esto es precisamente la intensidad en (r, t)

$$I(X) = \text{tr}[\rho E^{(+)}(X) E^{(-)}(X)]. \quad (28)$$

Expresando cada contribución del campo como una superposición tipo Ec. (26), en la Ec. (28) resultan cuatro funciones de correlación

$$I(X) = G^{(1)}(X_1, X_1) + G^{(1)}(X_2, X_2) + G^{(1)}(X_1, X_2) + G^{(1)}(X_2, X_1), \quad (29)$$

en donde

$$I(X_i) = G^{(1)}(X_i, X_i) = \text{tr}[\rho E^{(+)}(X_i) E^{(-)}(X_i)] \quad (30)$$

es la intensidad del haz a través de la abertura i manteniendo la otra cerrada; el superíndice indica una correlación de primer orden, además

$$G^{(1)}(X_1, X_2) = \text{tr}[\rho E^{(+)}(X_1) E^{(-)}(X_2)] = [G^{(1)}(X_2, X_1)]^+ \quad (31)$$

son cantidades complejas conjugadas entre sí, y representan la correlación de los campos emitidos a través de ambas aberturas. De manera que

$$I(X) = I(X_1) + I(X_2) + 2|G^{(1)}(X_1, X_2)| \cos(X_1, X_2), \quad (32)$$

donde $|G^{(1)}(X_1, X_2)|$ es la envolvente de las oscilaciones cosenoidales, y representa la intensidad de las franjas o el grado de contraste; si esta cantidad se anula, no existe patrón de interferencia ni correlación entre los campos emitidos a través de las aberturas 1 y 2, entonces se dice que ambos haces son incoherentes entre sí. En consecuencia, al aumentar el contraste de las franjas aumenta la coherencia de los haces, esto sucede sólo mientras la intensidad total [Ec. (32)] permanece mayor o igual a cero. El límite de máxima coherencia, en el que la intensidad nunca puede llegar a tomar valores negativos, se obtiene de la relación (32) por el teorema de la desigualdad de Schwarz:

$$G^{(1)}(X_1, X_1)G^{(1)}(X_2, X_2) \geq |G^{(1)}(X_1, X_2)|^2. \quad (33)$$

El máximo contraste de franjas ocurre con el signo de igualdad:

$$G^{(1)}(X_1, X_1)G^{(1)}(X_2, X_2) = |G^{(1)}(X_1, X_2)|^2. \quad (34)$$

A esta ecuación se le conoce como condición de coherencia óptica o de primer orden, porque trata únicamente con la función de correlación de primer orden. Si suponemos que

$$G^{(1)}(X_1, X_2) = \mathcal{E}^*(X_1)\mathcal{E}(X_2), \quad (35)$$

en donde $\mathcal{E}(X)$ es una función ordinaria y $\mathcal{E}^*(X)$ su compleja conjugada, en este caso todo lo anterior también se cumple; esta definición se extiende en forma directa para describir campos no estacionarios, ya que representa un promedio estadístico, proceso que no es tan directo desde el punto de vista clásico.

El siguiente experimento en orden de importancia es el de Hanbury Brown-Twiss [6] (Fig. 2), cuyo arreglo consta de una fuente de luz S de ancho espectral angosto; le sigue una pequeña abertura P , de la cual emerge la luz con suficiente coherencia en el sentido clásico o de primer orden; un divisor de haz D envía señales similares a los detectores $D1$ y $D2$. Finalmente, las señales registradas en ambos detectores se correlacionan en un contador de coincidencias CC , al que pueden llegar retrasadas entre sí debido al efecto del retardador R en una de las señales. El experimento se realizó con dos fuentes distintas: un tubo de descarga y un haz láser estabilizado. Los resultados de medir la razón de coincidencias contra el tiempo de retraso se muestran en la Fig. 4. Para el haz láser estabilizado se observó lo que se prevé cuando las dos señales detectadas son estadísticamente independientes entre sí, es decir, un fondo uniforme de coincidencias, lo cual indica que existe la misma probabilidad de detectar simultáneamente un fotón en cualquier punto y cualquier tiempo; a esto se le conoce como efecto Hanbury Brown-Twiss y se le identifica con desagrupamiento de fotones. En tanto que, para el tubo de descarga, se observó una distribución que exhibe un máximo de coincidencias a tiempo nulo de retraso y al doble del valor obtenido con el haz láser, esto es, la probabilidad de detectar simultáneamente un fotón en $D1$ y $D2$ es mayor en el mismo punto y al mismo tiempo y se le identifica con agrupamiento de fotones. Para definir la coherencia cuántica analicemos enseguida el efecto Hanbury Brown-Twiss.

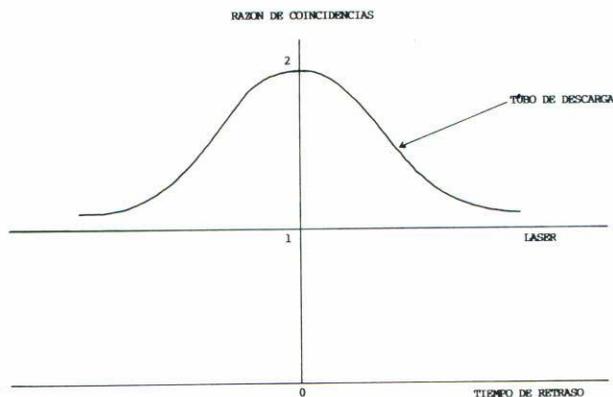


FIGURA 4. Resultados del experimento de Hanbury Brown-Twiss.

La razón en que ocurren las coincidencias retrasadas de fotones polarizados, utilizando la fuente de luz láser, es proporcional a

$$\sum_f |\langle f | E^{(-)}(X') E^{(-)}(X) | i \rangle|^2 = \langle i | E^{(+)}(X) E^{(+)}(X') E^{(-)}(X') E^{(-)}(X) | i \rangle. \quad (36)$$

Esto se interpreta como una probabilidad por unidad de tiempo al cuadrado de que un fotón sea grabado en r al tiempo t y otro en r' al tiempo t' .

En la Ec. (36) podemos definir una función de correlación de segundo orden

$$G^{(2)}(X, X'; X', X) = \text{tr}[\rho E^{(+)}(X) E^{(+)}(X') E^{(-)}(X') E^{(-)}(X)], \quad (37)$$

en la cual se cumple la condición de factorización

$$G^{(2)}(X, X'; X', X) = G^{(1)}(X, X) G^{(1)}(X', X') = \mathcal{E}^*(X) \mathcal{E}^*(X') \mathcal{E}(X') \mathcal{E}(X), \quad (38)$$

que se conoce como condición de coherencia de segundo orden.

En analogía con lo anterior, para discutir experimentos de coincidencias retrasadas de n fotones, para n arbitrario, se define una serie de funciones de correlación

$$G^{(n)}(X_1, \dots, X_n; X_{n+1}, \dots, X_{2n}) = \text{tr}[\rho E^{(+)}(X_1) \dots E^{(+)}(X_n) E^{(-)}(X_{n+1}) \dots E^{(-)}(X_{2n})]. \quad (39)$$

Se dice que un haz con coherencia parcial de orden m cumple con las primeras m condiciones de coherencia

$$\begin{aligned} G^{(m)}(X_1, \dots, X_m; X_m, \dots, X_1) &= \prod_{i=1}^m G^{(1)}(X_i, X_i) \\ &= \mathcal{E}^*(X_1) \dots \mathcal{E}^*(X_m) \mathcal{E}(X_m) \dots \mathcal{E}(X_1) \end{aligned} \quad (40)$$

y corresponde, por ejemplo, a un campo en que el número de fotones en el espacio y en el tiempo está limitado o en que el operador de densidad restringe su número a una cantidad menor o igual a m , como en los pulsos, en este caso $G^{(n)} = 0$ para $n > m$. Un campo completamente coherente se define como aquel que satisface una serie infinita de condiciones de coherencia [ecuaciones tipo (40)] lo cual equivale a un campo de extensión infinita.

Considerando campos puros completamente coherentes, las funciones de correlación, Ecs. (39), se factorizan en la forma de la Ec. (40) si consideramos que no existen eigenestados simultáneos de $E^{(-)}$ y $E^{(+)}$ debido a que éstos no conmutan, de manera que, se cumplen las condiciones suficientes para la factorización

$$E^{(-)}(X)|\eta\rangle = \mathcal{E}(X)|\eta\rangle \quad (41)$$

y

$$\langle\eta|E^{(+)}(X) = \langle\eta|\mathcal{E}^*(X). \quad (42)$$

Debido a la relación que existe entre $E^{(-)}$ y a , estas condiciones también pueden escribirse como

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (43)$$

y

$$\langle\alpha|a^{\dagger} = \langle\alpha|\alpha^*, \quad (44)$$

que definen al estado coherente $|\alpha\rangle$ de un modo ω del campo de radiación con eigenvalor (Ec. (43))

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega\langle Q(0)\rangle + i\langle P(0)\rangle)\exp[-i\omega t] \\ &= \alpha(0)\exp[-i\omega t], \end{aligned} \quad (45)$$

con $\alpha(0)$ en el esquema de Schrödinger y $\alpha(t)$ en el de Heisenberg.

Expandiendo en términos de los estados de Fock, los estados coherentes pueden representarse mediante la serie

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \sum_k \langle k|\alpha\rangle|k\rangle \\ &= \exp[-|\alpha|^2/2] \sum (k!)^{-1/2} \alpha^k |k\rangle, \end{aligned} \quad (46)$$

en donde

$$P(k) = |\langle k|\alpha\rangle|^2 = \exp[-|\alpha|^2] |\alpha|^{2k} (k!)^{-1} \quad (47)$$

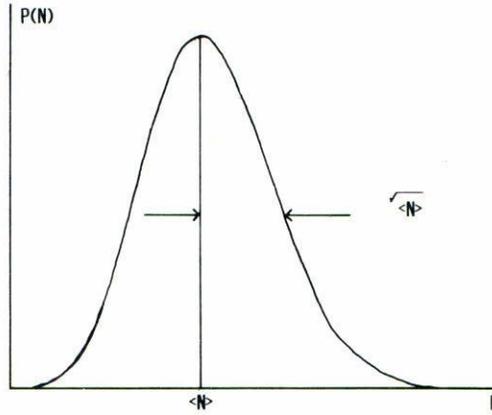


FIGURA 5. Distribución del número de fotones para un haz en estado coherente; es una distribución poissoniana.

representa la distribución del número de fotones en el haz (Fig. 5), obtenida al medir repetidamente el número de fotones por unidad de área y de tiempo en el mismo. Como vemos, es una distribución poissoniana alrededor de la media $|\alpha|^2$ que se obtiene al cumplirse la serie infinita de condiciones de coherencia (Ecs. (40)) es decir, al añadirse un número mayor de condiciones de coherencia que satisface el campo se restringe cada vez el número de fotones presentes en él por unidad de área y de tiempo, hasta obtener una distribución poissoniana. Y como función del estado vacío [Ec. (A8)] tenemos

$$|\alpha\rangle = \exp[-|\alpha|^2/2] \exp[\alpha a^+] |0\rangle. \tag{48}$$

La introducción del operador $\exp[-\alpha^* a]$ en la Ec. (48) al extremo derecho de los demás operadores deja invariante el resultado y hace posible representar, en forma útil, la generación de los estados coherentes:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \exp[-|\alpha|^2/2] \exp[\alpha a^+] \exp[-\alpha^* a] |0\rangle = \exp[\alpha a^+ - \alpha^* a] |0\rangle \\ &= D(\alpha) |0\rangle, \end{aligned} \tag{49}$$

donde $D(\alpha)$ es un operador unitario,

$$D^+(\alpha) D(\alpha) = 1, \tag{50}$$

que trabaja como operador de translación o desplazamiento:

$$\begin{aligned} D^{-1}(\alpha) a D(\alpha) &= a + \alpha, \\ D^{-1}(\alpha) a^+ D(\alpha) &= a^+ + \alpha^*. \end{aligned} \tag{51}$$

De todo ello se deriva una serie de propiedades matemáticas que satisfacen los estados coherentes, por ejemplo, el producto interno de dos estados coherentes diferentes no es ortogonal:

$$\begin{aligned} \langle \beta | \alpha \rangle &= \exp[-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)/2] \sum_{k,r} (k!r!)^{-1/2} \beta^{*k} \alpha^r \langle k|r \rangle \\ &= \exp[-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)/2] \sum_k (k!)^{-1} (\beta^* \alpha)^k \\ &= \exp[-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)/2 + \alpha \beta^*], \end{aligned} \tag{52}$$

por lo que forman una base sobrecompleta de estados y, consecuentemente, un oscilador armónico puede estar en dos estados coherentes a la vez. Debido a la enorme cantidad de estados coherentes, un continuo bidimensional de ellos y a su no ortogonalidad, existen varias formas en que podemos expandir cualquier estado. Por ejemplo, la relación de completez en estado coherente tiene dos representaciones de uso frecuente:

$$1 = \pi^{-2} \int \int |\alpha\rangle \langle \beta| \exp[\alpha^* \beta - (|\alpha|^2 + |\beta|^2)/2] d^2 \alpha d^2 \beta, \tag{53}$$

$$1 = \pi^{-1} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2 \alpha, \tag{54}$$

integradas sobre todo el espacio. Sin embargo, como todas esas representaciones son equivalentes, cualquier estado del campo puede representarse en forma simple y única en términos de estados coherentes:

$$|\psi\rangle = \pi^{-1} \int |\alpha\rangle \langle \alpha | \psi \rangle d^2 \alpha; \tag{55}$$

aunque esto tiene importancia, la aplicación más útil está en la simplificación que se introduce al evaluar los promedios estadísticos o valores esperados de las observables. Esto se logra mediante el empleo del operador de densidad, expresado como una mezcla estadística de estados coherentes puros, en lo que se llama la *P*-representación de Glauber-Sudarshan [10]:

$$\rho = \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2 \alpha, \tag{56}$$

en donde $P(\alpha)$ es una función de peso (Ecs. (A12)) de suerte que el promedio de una función $F(a^+, a)$ de operadores normalmente ordenados, aquella que contiene todos sus operadores de creación a la izquierda y los de aniquilación a la derecha, es

$$\begin{aligned} \langle F(a^+, a) \rangle &= \text{tr}[\rho F(a^+, a)] = \int P(\alpha) \langle \alpha | F(a^+, a) | \alpha \rangle d^2 \alpha \\ &= \int P(\alpha) F(\alpha^*, \alpha) d^2 \alpha, \end{aligned} \tag{57}$$

y se convierte en el promedio de una expresión que depende de números complejos ordinarios; procedimiento bastante similar al del promedio estadístico utilizado en la teoría clásica de probabilidad. En caso de que $F(a^+, a) = 1$, se cumple que

$$\text{tr}[\rho 1] = \int P(\alpha) d^2\alpha = 1. \quad (58)$$

Las relaciones (57) y (58) le confieren a $P(\alpha)$ propiedades de una densidad de probabilidad; sin embargo, debido a la no ortogonalidad de los estados coherentes, un estado base depende linealmente de los demás, en la Ec. (58) no sumamos probabilidades mutuamente exclusivas, además, tampoco se puede medir experimentalmente como densidad de probabilidad porque depende del eigenvalor α del operador no hermiteano a . Por lo tanto, $P(\alpha)$ es simplemente una función de peso, no es una densidad de probabilidad excepto asintóticamente en el límite clásico. También existe la posibilidad de que $P(\alpha)$ pueda tomar valores negativos sin violar el carácter positivo definido que ρ debe tener. Esta posibilidad aparece al examinar las fluctuaciones de intensidad de los campos descritas mediante la función de correlación de segundo orden normalizada

$$g^{(2)}(X, X'; X', X) = \frac{\langle E^{(+)}(X)E^{(+)}(X')E^{(-)}(X')E^{(-)}(X) \rangle}{\langle E^{(+)}(X)E^{(-)}(X) \rangle^2}. \quad (59)$$

En términos de a y a^+ ,

$$g^{(2)}(X, X) = g^{(2)}(0) = \frac{\langle a^+ a^+ a a \rangle}{\langle a^+ a \rangle^2}, \quad (60)$$

o también (Ecs. (A4, A9-10))

$$g^{(2)}(0) - 1 = \frac{\langle (\Delta N)^2 \rangle - \langle N \rangle}{\langle N \rangle^2}; \quad (61)$$

introduciendo la P -representación

$$\begin{aligned} g^{(2)}(0) - 1 &= \frac{\int P(\alpha) \langle \alpha | (\Delta N^2 - N) | \alpha \rangle d^2\alpha}{\left(\int P(\alpha) \langle \alpha | N | \alpha \rangle d^2\alpha \right)^2} \\ &= \frac{\int P(\alpha) \{ \langle a^+ a^+ a a \rangle - \langle a^+ a \rangle^2 \} d^2\alpha}{\left(\int P(\alpha) \langle \alpha | a^+ a | \alpha \rangle d^2\alpha \right)^2}. \end{aligned} \quad (62)$$

Si el campo está en estado coherente $|\alpha\rangle$, $P(\alpha) = (2\pi|\alpha|)^{-1}\delta^{(2)}(|\alpha| - |\beta|)$, se satisface

$$g^{(2)}(0) - 1 = 0. \quad (63)$$

En otro caso, cuando $P(\alpha)$ es una función positiva, entonces

$$g^{(2)}(0) - 1 > 0. \quad (64)$$

Decimos en este caso que el campo muestra agrupamiento de fotones, característica de los campos que tienen análogo clásico, como es el caso de los campos con estadística termal, $P(\alpha) = (\pi\langle N \rangle)^{-1} \exp(-|\alpha|^2/\langle N \rangle)$. Un campo de radiación en el que $P(\alpha)$ es negativa cumple la desigualdad

$$g^{(2)}(0) - 1 < 0, \quad (65)$$

y sus fotones a menudo obedecen una estadística sub-poissoniana y se encuentran desagrupados, lo cual es un efecto puramente cuántico y característico de los campos que no tienen análogo clásico.

5. RELACIONES DE INCERTIDUMBRE

Demostremos en esta sección que los estados coherentes son estados con la mínima incertidumbre de Heisenberg y que reproducen los perfiles de los modos de cavidad clásicos en el límite de muchos fotones.

Usando las Ecs. (A1), (43) y (44), para haces en estado coherente $|\alpha\rangle$, evaluamos $\langle(\Delta Q)^2\rangle$ y $\langle(\Delta P)^2\rangle$:

$$\langle Q \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(\alpha + \alpha^*), \quad (66)$$

$$\langle P \rangle = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(\alpha - \alpha^*), \quad (67)$$

$$\langle Q^2 \rangle = \frac{\hbar}{2\omega}[(\alpha + \alpha^*)^2 + 1], \quad (68)$$

$$\langle P^2 \rangle = \frac{\hbar\omega}{2}[1 - (\alpha - \alpha^*)^2]. \quad (69)$$

Por lo tanto,

$$\langle(\Delta Q)^2\rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \quad (70)$$

y

$$\langle(\Delta P)^2\rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} = \omega\langle(\Delta Q)^2\rangle^{1/2}. \quad (71)$$

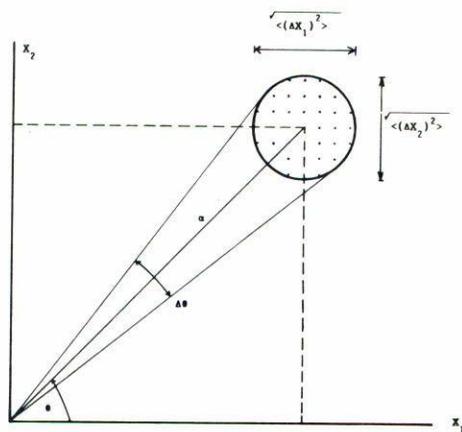


FIGURA 6. Región de incertidumbre en el espacio fase para un campo en estado coherente. El círculo error del vacío se desplaza $D(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle$, debido a la excitación coherente.

Vemos que la relación de incertidumbre, Ec. (A6), toma su valor mínimo:

$$\langle (\Delta P)^2 \rangle^{1/2} \langle (\Delta Q)^2 \rangle^{1/2} = \frac{\hbar}{2}. \tag{72}$$

Ya que Q y P tienen unidades diferentes, su comparación es más efectiva utilizando sus componentes adimensionales en cuadratura, Ecs. (A2),

$$\langle (\Delta X_1)^2 \rangle^{1/2} = \langle (\Delta X_2)^2 \rangle^{1/2} = \frac{1}{2}, \tag{73}$$

$$\langle (\Delta X_1)^2 \rangle^{1/2} \langle (\Delta X_2)^2 \rangle^{1/2} = \frac{1}{4}. \tag{74}$$

Como resultado, los estados coherentes tienen la misma incertidumbre en ambas cuadraturas minimizando su producto (Fig. 6).

Haciendo uso de estos resultados, los valores medios de los campos eléctrico y magnético, Ecs. (A5), y de sus cuadrados en estado coherente son, tomando en cuenta que $\alpha(t) = \alpha(0) \exp[-i\omega t] = |\alpha| \exp[i\theta] \exp[-i\omega t]$,

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \{ \alpha \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \alpha^* \exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \} \\ &= -2 \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} |\alpha| \text{sen}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \theta), \end{aligned} \tag{75}$$

$$\langle E^2 \rangle = \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \{ 4|\alpha|^2 \text{sen}^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \theta) + 1 \}; \tag{76}$$

por lo tanto,

$$\langle(\Delta E)^2\rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}. \quad (77)$$

Para el campo magnético

$$\begin{aligned} \langle B \rangle &= i\sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\mu_0 V \omega}} \{ \alpha \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \alpha^* \exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \} \\ &= -2\sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\mu_0 \omega V}} |\alpha| \operatorname{sen}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \theta), \end{aligned} \quad (78)$$

$$\langle B^2 \rangle = \frac{\hbar c^2}{2\mu_0 \omega V} \{ 4|\alpha|^2 \operatorname{sen}^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \theta) + 1 \}, \quad (79)$$

obtenemos

$$\langle(\Delta B)^2\rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\mu_0 \omega V}}; \quad (80)$$

llegando a la relación de incertidumbre electromagnética

$$\langle(\Delta E)^2\rangle^{1/2} \langle(\Delta B)^2\rangle^{1/2} = \frac{\hbar c}{2V \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (81)$$

Observemos que en la Ec. (75), considerando la Ec. (84), la amplitud del valor medio $\langle E \rangle$ (lo mismo para $\langle B \rangle$) depende del número medio de fotones $\langle N \rangle$ y de su incertidumbre $\langle(\Delta E)^2\rangle^{1/2}$ en la forma

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= -2\langle(\Delta E)^2\rangle^{1/2} \langle N \rangle^{1/2} \operatorname{sen}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \theta) \\ &= -E_0 \operatorname{sen}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \theta), \end{aligned} \quad (82)$$

de manera que cuando $\langle N \rangle$ es pequeño, la amplitud E_0 del valor medio del campo es del orden de magnitud de su incertidumbre $\langle(\Delta E)^2\rangle^{1/2}$, con lo cual sus fluctuaciones cuánticas se hacen relevantes (Fig. 7). Por el contrario, cuando $\langle N \rangle$ aumenta, también crece la amplitud E_0 de tal forma que respecto a ésta su incertidumbre $\langle(\Delta E)^2\rangle^{1/2}$ viene a ser pequeña (Fig. 7). Al límite de muchos fotones, en que los efectos cuánticos son despreciables, se le conoce como límite clásico porque se recuperan las ecuaciones clásicas del oscilador armónico:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle Q \rangle = q(t) \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle P \rangle = p(t); \quad (83)$$

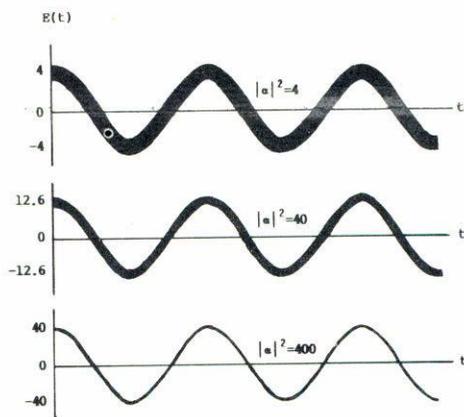


FIGURA 7. Esquema del comportamiento temporal del campo eléctrico en un estado coherente con diferente número de fotones $\langle N \rangle = |\alpha|$.

definiéndose perfectamente el perfil del campo. Se dice entonces que los estados coherentes tienen análogo clásico.

Examinemos ahora la relación de incertidumbre en amplitud y fase. La amplitud es proporcional al número medio de fotones:

$$\langle N \rangle = |\alpha|^2. \tag{84}$$

Además

$$\langle N^2 \rangle = \langle a^+ a + a^+ a^+ a a \rangle = |\alpha|^2 + |\alpha|^4, \tag{85}$$

de donde obtenemos la incertidumbre en el número de fotones:

$$\langle (\Delta N)^2 \rangle^{1/2} = |\alpha|. \tag{86}$$

La incertidumbre en fase corresponde al ángulo subtendido al origen por el círculo error en el espacio fase (Fig. 6); para el caso en que $\theta \ll |\alpha|$ tenemos

$$\Delta\theta = \frac{1}{2|\alpha|}, \tag{87}$$

entonces los estados coherentes satisfacen la relación de incertidumbre constante en amplitud y fase:

$$\langle (\Delta N)^2 \rangle^{1/2} \Delta\theta = \frac{1}{2}, \tag{88}$$

lo cual se representa físicamente por la parte eléctrica del campo de radiación en la Fig. 8.

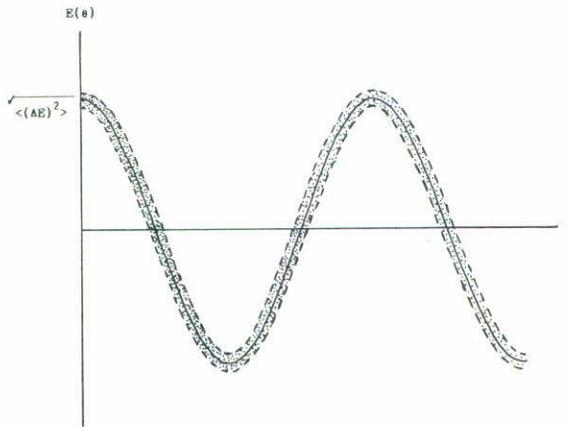


FIGURA 8. Incertidumbre en amplitud y fase alrededor del valor medio del campo eléctrico para un haz en estado coherente.

6. FUNCIÓN DE ONDA

La función de onda $\psi(\alpha, q)$ que caracteriza al estado coherente $|\alpha\rangle$ en la representación coordenada $|q\rangle$, puede obtenerse de la Ec. (49) multiplicando al estado coherente $|\alpha\rangle$ por $\langle q|$ a su izquierda:

$$\psi(\alpha, q) = \langle q|\alpha\rangle = \langle q|D(\alpha)|0\rangle. \quad (89)$$

Se representa el argumento de la exponencial de $D(\alpha)$ en términos de Q y P :

$$\alpha a^+ - \alpha^* a = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}(\alpha - \alpha^*)Q - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}}(\alpha + \alpha^*)P; \quad (90)$$

y luego se usa el teorema de Baker-Hausdorff

$$\exp[A]\exp[B] = \exp[A + B]\exp[[A, B]/2], \quad (91)$$

dada la condición $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$, para expresar a $D(\alpha)$ en la forma

$$D(\alpha) = \exp[\alpha a^+ - \alpha^* a] = \exp[(\alpha^{*2} - \alpha^2)/4] \exp\left[\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}(\alpha - \alpha^*)Q\right] \\ \times \exp\left[-i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}}(\alpha + \alpha^*)P\right]. \quad (92)$$

Luego, se sustituye la Ec. (92) en la (89):

$$\begin{aligned}
 \psi(\alpha, q) &= \exp[(\alpha^{*2} - \alpha^2)/4] \langle q | \exp \left[\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} (\alpha - \alpha^*) Q \right] \\
 &\quad \times \exp \left[-i \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}} (\alpha + \alpha^*) P \right] | 0 \rangle \\
 &= \exp[(\alpha^{*2} - \alpha^2)/4] \exp \left[\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} (\alpha - \alpha^*) q \right] \\
 &\quad \times \langle q | \exp \left[-i \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}} (\alpha + \alpha^*) P \right] | 0 \rangle; \tag{93}
 \end{aligned}$$

pero $\exp[-i\lambda P/\hbar]$ es el operador de translación en λ a lo largo de Oq :

$$|\lambda\rangle = \exp[-i\lambda P/\hbar] | 0 \rangle \tag{94}$$

$$|q + \lambda\rangle = \exp[-iqP/\hbar] \exp[-i\lambda P/\hbar] | 0 \rangle = \exp[-iqP/\hbar] |\lambda\rangle, \tag{95}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
 \langle q | \exp \left[-i \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (\alpha + \alpha^*) P/\hbar \right] | 0 \rangle &= \left\langle q - \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (\alpha + \alpha^*) \middle| 0 \right\rangle \\
 &= \psi_0 \left(q - \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (\alpha + \alpha^*) \right) \\
 &= \psi_0(q - \langle Q \rangle) \tag{96}
 \end{aligned}$$

es la función de onda del estado base del oscilador armónico.

De acuerdo con la función de onda del vacío, Ec. (A11), escribimos la expresión (96) en la forma

$$\psi_0(q - \langle Q \rangle) = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{\omega}{2\hbar} (q - \langle Q \rangle)^2 \right], \tag{97}$$

y definiendo el factor de fase global como

$$\exp[i\theta(\alpha)] = \exp[(\alpha^{*2} - \alpha^2)/4], \tag{98}$$

obtenemos la función de onda a $t = 0$:

$$\psi(\alpha, q) = \exp[i\theta(\alpha)] \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp[i\langle P \rangle q/\hbar - \omega(q - \langle Q \rangle)^2/2\hbar]. \tag{99}$$

Esta es una gaussiana en el oscilador armónico desplazada del origen en $\langle Q \rangle$, con fase proporcional a q y con una anchura $(\hbar/2\omega)^{1/2}$, correspondiente a la del estado base. Después de un poco de álgebra, considerando las Ecs. (A1) y (A2), tenemos que

$$\psi(\alpha, q) = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp[-\text{Im}^2(\alpha) + i \text{Im}(\alpha) \text{Re}(\alpha)] \exp[-(X_1 - \alpha)^2], \quad (100)$$

para calcular finalmente la función de distribución en el espacio fase, dada por

$$W(X_1, X_2) = \frac{1}{\pi} \int \psi^*(X_1 + y)\psi(X_1 - y) \exp[2iX_2y] dy, \quad (101)$$

cuya solución es [11]

$$W(X_1, X_2) = \sqrt{\frac{\omega}{4\hbar\pi^2}} \exp[-2(X_1 - \text{Re}(\alpha))^2 - 2(X_2 - \text{Im}(\alpha))^2]. \quad (102)$$

Esta es una función concentrada en la región circular del espacio fase descrita por la ecuación

$$(X_1 - \text{Re}(\alpha))^2 + (X_2 - \text{Im}(\alpha))^2 = 1, \quad (103)$$

y representada gráficamente en la Fig. 6.

7. APÉNDICE

Operadores de posición y momentum del oscilador armónico en términos de los operadores de creación y aniquilación:

$$Q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(a + a^+), \quad P = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(a^+ - a). \quad (A1)$$

Operadores adimensionales del sistema, en cuadratura:

$$X_1 = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}Q = \frac{1}{2}(a + a^+), \quad X_2 = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}}P = \frac{1}{2}(a - a^+). \quad (A2)$$

Operadores de creación y aniquilación dependientes del tiempo:

$$a(t) = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}}(\omega Q(0) + iP(0)) \exp(-i\omega t),$$

$$a^+(t) = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}}(\omega Q(0) - iP(0)) \exp(i\omega t). \quad (A3)$$

Relaciones de conmutación:

$$[Q, P] = i\hbar, \quad [a, a^\dagger] = 1. \quad (A4)$$

Operadores de campo eléctrico y magnetico [12]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}} \{a_k \exp(-i\omega_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - a_k^\dagger \exp(i\omega_k t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\} \mathbf{e}_k, \\ \mathbf{B} &= i\sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\mu_0 V \omega_k}} \{a_k \exp(-i\omega_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - a_k^\dagger \exp(i\omega_k t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\} \mathbf{k} \times \mathbf{e}_k, \end{aligned} \quad (A5)$$

\mathbf{k} es el vector de onda, ω_k es la frecuencia del modo k , ϵ_0 es la permitividad eléctrica y μ_0 la permeabilidad magnética.

Relación de incertidumbre de Heisenberg:

$$\langle (\Delta Q)^2 \rangle^{1/2} \langle (\Delta P)^2 \rangle^{1/2} \geq \hbar/2. \quad (A6)$$

Relación de incertidumbre para estados de Fock:

$$\langle (\Delta Q)^2 \rangle^{1/2} \langle (\Delta P)^2 \rangle^{1/2} = (k + \frac{1}{2})\hbar. \quad (A7)$$

Estados de Fock como función del estado vacío:

$$|k\rangle = \sqrt{\frac{1}{k!}} a^\dagger{}^k |0\rangle. \quad (A8)$$

Operador de número de fotones:

$$N = a^\dagger a. \quad (A9)$$

Operador de dispersión en el número de fotones:

$$\Delta N = N - \langle N \rangle. \quad (A10)$$

Función de onda para el estado vacío del oscilador armónico:

$$\psi_0(q) = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp[-\omega q^2/2\hbar]. \quad (A11)$$

Funciones de peso de la P -representación para los casos coherente y térmico respectivamente:

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= \frac{1}{2\pi|\alpha|} \delta^{(2)}(|\alpha| - |\beta|), \\ P(\{\alpha_k\}) &= \prod_k \frac{1}{\pi \langle N_k \rangle} \exp[-|\alpha_k|^2 / \langle N_k \rangle], \end{aligned} \quad (A12)$$

$\delta^{(2)}(\gamma)$ es una función bidimensional δ , esto es el producto de dos funciones δ unidimensionales: $\delta(\text{Re}(\gamma))\delta(\text{Im}(\gamma))$.

REFERENCIAS

1. D. Stoler, *Phys. Rev.* **D1** (1970) 3217; **D4** (1971) 1925; **D4** (1971) 2309.
2. E. Schrödinger, *Naturwiss.* **28** (1926) 664.
3. R.J. Glauber, *Phys. Rev.* **131** (1963) 2766.
4. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford, Inglaterra (1987).
5. A.L. Schawlow and C.H. Townes, *Phys. Rev.* **112** (1958) 1940.
6. R. Hanbury Brown and R.Q. Twiss, *Nature (London)* **177** (1956) 27.
7. W. Kaiser and C.G.B. Garrett, *Phys. Rev. Lett.* **7** (1961) 229; P.A. Franken, A.E. Hill, C.W. Peters and G. Weinreich, *Phys. Rev. Lett.* **7** (1961) 118.
8. R.J. Glauber, *Phys. Rev.* **131** (1963) 2766; *Phys. Rev. Lett.* **10** (1963) 84.
9. L. Pauling and E.B. Wilson, Jr., *Introduction to Quantum Optics*, McGraw-Hill, New York (1935).
10. J.R. Klauder and E.C.G. Sudarshan, *Fundamentals of Quantum Optics*, W.A. Benjamin, New York (1968).
11. M. Hillery, R.F. O'Connell, M.O. Scully and E.P. Wigner *Phys. Rep.* **106** (1986) 121; W. Schleich, D.F. Walls and J.A. Wheeler, *Phys. Rev. A* **38** (1988) 1177; D. Han, Y.S. Kim and M.E. Noz, *Phys. Rev. A* **37** (1988) 807; D. Han, E.E. Hardekopf and Y.S. Kim, *Phys. Rev. A* **39** (1989) 1269; G.S. Agarwal, *J. Mod. Opt.* **34** (1987) 909.
12. R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*, Clarendon, Oxford (1973).
13. W.H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, John-Wiley, New York (1973).
14. H.M. Nussenzveig, *Introduction to Quantum Optics*, Gordon and Breach, New York (1973).
15. P.L. Knight and L. Allen, *Concepts of Quantum Optics*, Pergamon, Oxford (1983).
16. J. Perić, *Coherence of Light*, Van Nostrand, London (1971).
17. L. Mandel and E. Wolf, *Rev. Mod. Phys.* **37** (1965) 231.
18. H. Risken, en *Progress in Optics*, **VIII**, ed. por E. Wolf, North Holland, Amsterdam (1970), 239.