

## Fuerza tangencial de contacto en movimiento de rodamiento

ANGEL MANZUR

*Departamento de Física*

*Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa*

*Apartado postal 55-534; 09340 México, D.F.*

Recibido el 7 de junio de 1991; aceptado el 26 de febrero de 1992

**RESUMEN.** Se presenta un experimento de demostración que ilustra cómo la fuerza tangencial de contacto en un movimiento de rodamiento depende de factores geométricos del cuerpo rodante y del punto de aplicación de la fuerza externa. Estos objetivos se logran con un yoyo colocado sobre una superficie horizontal, con el eje en posición horizontal, y al que se le jala por medio de la cuerda manteniendo fijo el ángulo con la horizontal. Se obtienen dos intervalos angulares en que el yoyo rueda trasladándose hacia la región donde la fuerza se aplica, otro intervalo en que el yoyo rueda en dirección opuesta, un ángulo específico en que el yoyo resbala sin rodar y otro en que la fuerza tangencial se anula.

**ABSTRACT.** The demonstration experiment here presented illustrates how the tangential force of contact in a rolling motion depends on the geometrical factors of the rolling body and the point of application of the external force. These objectives are satisfactorily gotten using a yo-yo, resting on a horizontal surface with the symmetry axis horizontal, which is pulled through the string holding fixed the angle respect to the horizontal. There are two angular intervals where the yo-yo rolls without slipping in the direction in which it is pulled, in another interval it rolls without slipping in the opposite direction; at a specific angle the yo-yo slips without rolling, and at other specific angle the tangential force of contact is zero.

PACS: 01.50.My; 01.40.Gm

### INTRODUCCIÓN

Usualmente en los libros de texto de cursos introductorios de física se menciona que, para dos cuerpos en contacto en movimiento relativo, la componente tangencial de la fuerza de contacto (también llamada fuerza de fricción) se opone al movimiento y nunca lo favorece; esto es cierto siempre en movimientos de deslizamiento, pero no en movimientos de rodamiento. Respecto a este último tipo de movimiento es poco lo que se menciona. Aquí se presenta un experimento de demostración en que la fuerza tangencial en un movimiento de rodamiento depende tanto de la geometría del cuerpo como de los puntos de aplicación de las fuerzas externas y que, además, puede apuntar hacia donde el cuerpo se traslada. Teniendo en cuenta las características que distinguen a una demostración [1,2], aquí se presenta en forma de un problema que se resuelve experimental y teóricamente. En algunos libros de texto [3-6] se hacen preguntas relacionadas con el problema que aquí se está considerando, pero en ninguno de ellos se pide analizar la fuerza tangencial.

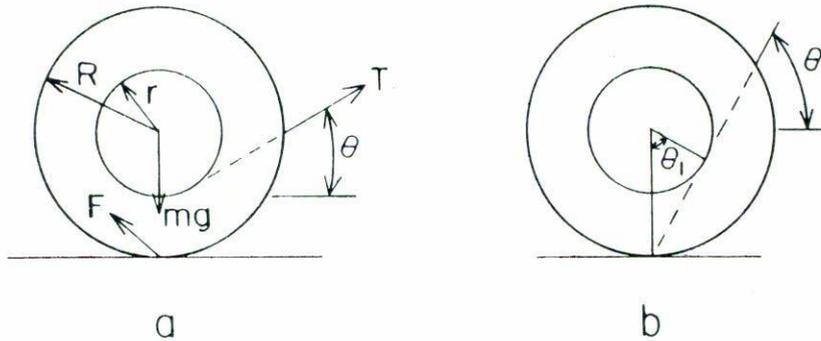


FIGURA 1. (a) Diagrama de la geometría del yoyo y de las fuerzas que sobre él actúan. (b) Cuando la cuerda forma el ángulo  $\theta_1$  con la horizontal, ninguna fuerza produce torca sobre el yoyo.

#### PROBLEMA

Sobre una superficie horizontal se encuentra un yoyo en reposo con su eje también horizontal. Se jala de la cuerda formando un ángulo  $\theta$  con la horizontal, ¿hacia dónde gira el yoyo y por qué?

#### OBJETIVO

Analizar la componente horizontal de la fuerza de contacto entre el yoyo y la mesa en términos del ángulo de inclinación de la cuerda y de los factores geométricos del yoyo.

#### DESCRIPCIÓN EXPERIMENTAL

En este experimento de demostración, el cual es cualitativo, el interés radica en mostrar el movimiento del yoyo cuando la fuerza de tensión se aplica en ángulos diferentes. Para realizar el experimento sólo basta jalar la cuerda manualmente, trasladando la mano conforme el yoyo se traslada, manteniendo un ángulo  $\theta$  fijo respecto a la horizontal; el experimento se repite para distintos ángulos. Se observa que, en el intervalo entre 0 y  $\pi/2$ , existe un ángulo  $\theta_1$  tal que para  $\theta < \theta_1$  el yoyo rueda sin resbalar hacia la región donde se aplica la fuerza  $T$ , (Fig. 1a); en cambio, para  $\theta > \theta_1$  el yoyo rueda sin resbalar en dirección opuesta; pero cuando  $\theta = \theta_1$  solamente resbala. Para ángulos mayores o menores que  $\theta_1$  el yoyo rueda; acompañando a este movimiento puede haber deslizamiento, lo cual es muy difícil de detectar visualmente. En cambio, en  $\theta = \theta_1$  el movimiento que se observa visualmente, sin lugar a dudas, es el de deslizamiento puro.

## DESCRIPCIÓN TEÓRICA

Para facilitar la explicación teórica de estos resultados, supóngase que tanto el eje del yoyo como los discos no tienen espesor; esta idealización tiene la ventaja de que las líneas de contacto de los discos con la mesa se reducen a un punto, con lo cual solamente es necesario considerar una fuerza de contacto. Estrictamente, el radio del eje no es constante ya que crece o disminuye al enrollarse o desenrollarse la cuerda; en lo que sigue se supone que es constante, con lo cual se obtienen ecuaciones sencillas que describen el movimiento del yoyo cuando empieza a rodar. Supongamos que el eje tiene radio  $r$  y los discos radio  $R$ . Como se indica en la Fig. 1a, sobre el yoyo actúan tres fuerzas: la tensión  $T$  en la cuerda, el peso  $mg$  y la fuerza de contacto  $F$  que tiene componentes horizontal y vertical  $F_x$  y  $F_y$ , respectivamente.

Las ecuaciones que describen el movimiento de traslación del centro de masas y el movimiento de rotación respecto a este último (suponiendo traslación y rotación positivas cuando rueda a la izquierda) son:

$$F_x - T \cos \theta = ma,$$

$$rT - RF_x = I\alpha,$$

donde  $a$  es la aceleración lineal del centro de masas,  $\alpha$  la aceleración angular e  $I$  el momento de inercia respecto al eje de simetría. Si el yoyo rueda sin resbalar, las aceleraciones  $a$  y  $\alpha$  están relacionadas por  $a = R\alpha$ . Usando estas ecuaciones para eliminar a  $F_x$ , se obtiene que la aceleración angular es

$$\alpha = \frac{r - R \cos \theta}{I + mR^2} T. \quad (1)$$

En esta ecuación se ve que existe un ángulo  $\theta_1$  tal que cuando:

- a.  $\cos \theta > r/R$ , entonces  $\alpha < 0$ , el yoyo rueda hacia donde se aplica  $T$ ;
- b.  $\cos \theta_1 = r/R$ , entonces  $\alpha = 0$  y el yoyo resbala sin rodar;
- c.  $\cos \theta < r/R$ , entonces  $\alpha > 0$  y el yoyo rueda en dirección opuesta a  $T$ .

Para un yoyo con  $r = 2.45$  cm y  $R = 4.15$  cm se obtuvo experimentalmente para  $\theta_1$  un valor promedio de  $53.6^\circ$ , mientras que el cálculo teórico fue  $\theta_1 = 53.8^\circ$ . Nótese que para  $r \ll R$ , el valor de  $\theta_1$  se acerca al valor límite de  $\pi/2$ . Este ángulo  $\theta_1$  es tal que la prolongación de la línea recta, por donde se aplica la tensión, pasa por el punto de contacto entre el yoyo y la mesa, como se indica en la Fig. 1b. El hecho de que el yoyo solamente resbala cuando la tensión se aplica formando un ángulo  $\theta_1$ , se entiende rápidamente, pues todas las fuerzas pasan por el punto de contacto y respecto a este punto la torca producida por cada fuerza es nula. Es importante hacer notar que en este caso tanto la aceleración angular como la velocidad angular son nulas, mientras que la aceleración lineal no lo es, ya que el yoyo parte del reposo y para que se traslade necesariamente debe tener aceleración lineal diferente de cero.

Es importante observar que para el caso de rodamiento puro, las dos ecuaciones de movimiento y la condición de rodar sin resbalar son válidas y fueron usadas para obtener la Ec. (1); en cambio, para el caso de deslizamiento puro sólo es válida la primera ecuación de movimiento. La Ec. (1) predice correctamente que la aceleración angular se anula en  $\theta = \theta_1$ , pero sería erróneo esperar que la aceleración lineal también fuera nula, pues en el deslizamiento puro ( $\theta = \theta_1$ ) la segunda ecuación de movimiento y la relación  $a = R\alpha$  no son aplicables y, por tanto, la Ec. (1) tampoco es aplicable.

En la Ec. (1) hay dos aspectos que deben hacerse notar y que provienen de las propiedades de la función coseno:

1. Debido a que el coseno es una función par, es decir,  $\cos(-\theta) = \cos \theta$ , el resultado es el mismo sin importar si  $\theta$  se mide hacia arriba o hacia abajo de la horizontal.
2. Debido a que en el intervalo de  $\pi/2$  a  $\pi$  (o, equivalentemente, de  $-\pi/2$  a  $-\pi$ ) la función coseno es negativa, en este intervalo la aceleración angular es siempre positiva haciendo que la rotación sea a la izquierda; esto significa que en este intervalo el yoyo se mueve nuevamente hacia donde se jala de la cuerda.

Habiendo explicado por qué el sentido de la rotación cambia, ahora nos interesa averiguar si sucede algo similar con la componente horizontal de la fuerza de contacto. Al sustituir el valor de  $\alpha$  dado por la Ec. (1) en la primera o en la segunda ecuación de movimiento, se obtiene para la componente horizontal  $F_x$  la expresión

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{T}{1+k}(k \cos \theta + c) \\ &= \frac{T}{1+k}(k \cos \theta + \cos \theta_1), \end{aligned} \quad (2)$$

donde se han definido las constantes

$$k = \frac{I}{mR^2}, \quad c = \frac{r}{R}.$$

La constante  $k$  contiene la información de la geometría del yoyo y de la distribución de la masa, mientras que la constante  $c$  contiene la información del ángulo  $\theta_1$ .

Como los discos del yoyo tienen masa mayor y radio mayor que el eje, entonces podemos despreciar el momento de inercia del eje. Con esta suposición  $k = 1/2$  y entonces

$$F_x = \frac{T}{3}(\cos \theta + 2c). \quad (3)$$

Este resultado indica que en el intervalo  $0 \leq \theta < \pi/2$ ,  $F_x$  siempre apunta en dirección contraria a  $T_x$ ; es decir, el sentido de la rotación está determinado por las torcas que producen  $T$  y  $F_x$ . Estas torcas siempre son opuestas y cuando ambas son de igual magnitud no hay rotación.

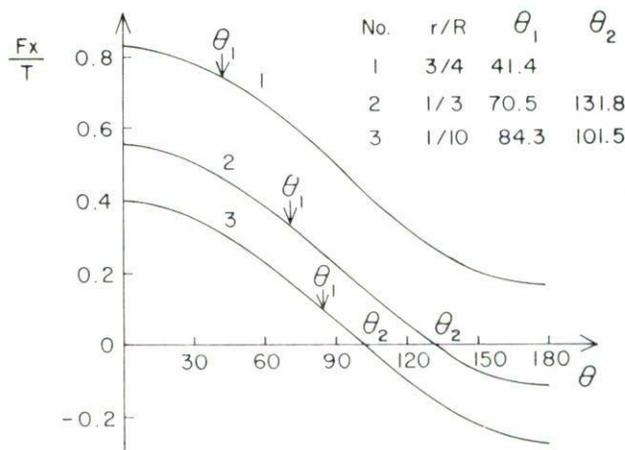


FIGURA 2. Fuerza tangencial en función del ángulo en que se aplica la tensión, para tres diferentes valores del cociente  $r/R$ .

Sin embargo, en el intervalo de  $\pi/2$  a  $\pi$  el valor de la función coseno es negativo y, por tanto, el valor de la fuerza tangencial puede llegar a ser cero o negativo. La Ec. (3) predice que  $F_x$  se anula en el ángulo  $\theta_2$  ( $> \pi/2$ ) dado por  $\cos \theta_2 = -2r/R$ , pero como el menor valor que puede tener  $\cos \theta_2$  es  $-1$ , entonces se obtiene que  $2r \leq R$  debe cumplirse. En otras palabras, cuando el valor de  $r$  sea mayor que la mitad de  $R$ ,  $F_x$  nunca se anulará. Por el contrario, cuando  $r \ll R$  el valor de  $\theta_2$  disminuye acercándose al de  $\pi/2$ .

Es de notarse que el análisis expuesto de la fuerza tangencial de contacto es independiente del valor del coeficiente de fricción entre el yoyo y la mesa; únicamente se pide que su valor sea lo suficientemente grande para asegurar que se produzca movimiento de rodamiento en ángulos diferentes de  $\theta_1$ .

Recopilando los resultados se tiene que en el intervalo angular  $0 \leq \theta < \theta_1$  el yoyo rueda hacia donde se aplica la tensión, en el ángulo  $\theta_1$  resbala, en  $\theta_1 < \theta < \pi/2$  rueda en la dirección opuesta, en  $\pi/2 < \theta \leq \pi$  nuevamente rueda hacia donde se aplica la tensión y que en  $\theta_2$  la fuerza tangencial se anula.

En la Fig. 2 se muestra la forma en que  $F_x/T$  varía, en unidades de  $T$ , en función del ángulo y para diferentes valores de  $r/R$ . También se indican los valores de  $\theta_1$  y de  $\theta_2$  para cada caso. Las diferentes curvas tienen un comportamiento similar. La magnitud de la fuerza tangencial disminuye al aumentar el valor de  $\theta$ ; dependiendo del valor del cociente de los radios, puede hacerse nula y, después, nuevamente crecer. Los valores negativos en la gráfica significan que la fuerza  $F_x$  apunta en dirección opuesta. En la tabla insertada en la figura se dan los valores de los ángulos en que la aceleración angular cambia de signo ( $\theta_1$ ) y aquellos en que la fuerza  $F_x$  cambia de signo ( $\theta_2$ ), para las tres relaciones de radios mostradas. Puede apreciarse que al disminuir el cociente  $r/R$ , los correspondientes valores de  $\theta_1$  aumentan acercándose al valor límite  $\pi/2$ , mientras que los correspondientes valores de  $\theta_2$  disminuyen acercándose al valor límite  $\pi/2$ .

## OBSERVACIONES

Al medir  $r$  debe recordarse que es el radio del eje más la contribución de la parte enrollada de la cuerda. Los resultados son mejores si la cuerda se sustituye por una cinta.

## REFERENCIAS

1. H. F. Meiners, ed., *Physics Demonstration Experiments*, Ronald, New York (1970).
2. A. Manzur, L. Mier y Terán, R. Olayo y H. Riveros. *Rev. Educ. Sup.*, **VII** (1978) 49.
3. R. Resnick y D. Halliday, *Física*, parte 1, Cap. XII, pregunta 21. CECSA, México (1984).
4. U. Ingard y W. L. Kraushaar, *Introduction to Mechanics, Matter, and Waves*, Cap. XII, sección 12-5, ejemplo 3. Addison Wesley, Reading (1964).
5. D. C. Giancoli, *Física General*, vol. I. Cap. 8, pregunta 9. Prentice-Hall Hispanoamericana, México (1988).
6. M. Alonso y E. J. Finn, *Física*, volumen 1, Problema 10.31, Addison-Wesley Iberoamericana, México (1990).