

## Análisis de un sistema de aislamiento de vibraciones usando un método gráfico

A.I. OLIVA, VÍCTOR SOSA, R. DE COSS,  
N. LÓPEZ SALAZAR, RAQUEL SOSA Y J.L. PEÑA  
*Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN  
Unidad Mérida, Departamento de Física Aplicada  
A.P. 73-Cordemex, 97310, Mérida, Yucatán, México*

Recibido el 4 de septiembre de 1991; aceptado el el 28 de enero de 1992

**RESUMEN.** En este trabajo presentamos un método gráfico para el análisis de los parámetros que intervienen en un sistema de aislamiento de vibraciones (SAV) unidimensional de  $n$  etapas, utilizando el modelo desarrollado por Okano *et al.* [1]. El SAV que se analiza consiste de una serie de placas metálicas colocadas una sobre otra y separadas entre sí por elementos con propiedades conocidas de rigidez y amortiguación. El método gráfico que se presenta determina la función y la importancia de los parámetros que intervienen en su descripción y es aplicable a cualquier necesidad con geometría similar. Se calcula la respuesta del SAV para diferentes valores de los parámetros. Con este análisis es posible determinar el comportamiento del SAV a partir del grado de aislamiento que se desee. Se discute el comportamiento del SAV como función de los parámetros que intervienen, tales como la masa ( $M$ ), la constante de rigidez ( $K$ ), la constante de amortiguación ( $C$ ), la frecuencia ( $f$ ), la perturbación inicial ( $Y_0$ ) y el número de etapas del sistema ( $n$ ). Se encontró un comportamiento de los picos principales de la forma  $f = w/2\pi = (K/M)^{0.5}/2\pi$  para valores de  $C = 1$  N s/m y con una ligera variación para valores de  $C$  mayores.

**ABSTRACT.** We present a graphic method for the analysis of the main parameters in a vibration isolation system (VIS) using Okano's unidimensional model for  $n$  stacks. The VIS analyzed consists of several metallic plates, one over the other with a viton rubber between them, with rigidity and damping constants known. The graphic method allows to determine the importance of the parameters on the efficiency of the VIS. We can apply the graphic method to several necessities with similar geometry. With this analysis it is possible to predict the VIS behavior as a function of the main parameters like mass ( $M$ ), rigidity constant ( $K$ ), damping constant ( $C$ ), frequency ( $f$ ), external noise ( $Y_0$ ) and number of stacks ( $n$ ). We calculated the VIS response in the ranges  $0 < K \leq 100,000$  N/m,  $1 \leq C \leq 100$  Ns/m, and  $0 < f \leq 1,000$  Hz. We found a  $f = (K/M)^{0.5}/2\pi$  behavior in the principal resonance peaks when  $C = 1$  N s/m, with a light variation for bigger values.

PACS: 62.20.Dc; 07.60.Ly

### 1. INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas que se tienen en la industria y en la ciencia aplicada es el ruido que se propaga con cierta amplitud y frecuencia y que afecta a un sistema dado. Así por ejemplo, sabemos que los automóviles cuentan con un sistema de aislamiento de vibraciones (SAV), de tal forma que al sufrir una perturbación externa (el paso de un bache o un tope), ésta se amortigua y llega a los ocupantes disminuida en su amplitud. Este es un ejemplo muy

familiar, sin embargo, hay casos de mayor complejidad, como es el SAV que debe tener el microscopio de efecto túnel desarrollado por Binnig y Rohrer [2], en el cual existe la necesidad de mantener una punta afilada atómicamente a una distancia de entre 5 y 10 Å de la superficie de una muestra, con el objeto de mantener una nanocorriente constante por efecto túnel. Al barrer sobre el plano de la superficie de la muestra, el microscopio es capaz de dibujar la superficie atómica de la muestra. De aquí podemos deducir que este microscopio debe ser capaz de mantener una alta capacidad de aislamiento de vibraciones del medio externo para poder proporcionar resolución atómica. Con ello se podrá mantener con buena estabilidad la condición de tunelamiento entre la punta y la muestra durante el barrido.

En la literatura se sugiere para este microscopio una capacidad de resolución del orden de 1 pm (*i.e.*,  $10^{-12}$  m), con el fin de poder detectar la corrugación de la superficie atómica de los metales. Si, por ejemplo, suponemos un nivel de ruido externo del orden de una micra, entonces tendríamos que reducir 6 órdenes de magnitud los niveles de ruido. De conseguirse mayor estabilidad, se obtendría mayor sensibilidad y sería posible incluso detectar a temperaturas muy bajas el movimiento vibracional de las moléculas, así como la detección de fonones de la punta y la muestra, tal como lo predijeron y realizaron Smith *et al.* [3,4] en sus trabajos.

Con el fin de disminuir el efecto de estas vibraciones se han utilizado varios métodos que con el tiempo se han ido mejorando, tanto en sencillez como en efectividad. Así podemos mencionar los primeros resultados obtenidos por Binnig y Rohrer [5], donde usaron levitación magnética superconductor a temperatura de He líquido. También podemos mencionar el uso de resortes helicoidales en dos o tres etapas apoyado con freno de corrientes de Eddy y, más recientemente, el uso de gomas de vitón [6] colocadas entre una serie de múltiples etapas de placas metálicas sobre las cuales se coloca el sistema a aislar. También se ha usado una combinación de estas últimas. El uso de las gomas de vitón colocadas entre las diferentes etapas ha sido de gran utilidad en virtud de que ha demostrado ser de construcción y funcionamiento sencillos, además de permitir la construcción de sistemas compactos.

Okano *et al.* [1], en su trabajo publicado en 1987, presentan un análisis teórico de aislamiento de vibraciones bastante completo, basado en un movimiento unidimensional de una serie de placas separadas con un material elástico con ciertas propiedades de rigidez y amortiguamiento. Sin embargo, en su modelo no mencionan la existencia de posibles combinaciones de las variables que intervienen en el sistema para conseguir mejores resultados.

En este trabajo se hace un estudio, utilizando un método gráfico, del comportamiento de los diferentes parámetros que afectan al SAV, así como una discusión sobre el papel que juegan dichas variables y sus características para obtener mejores resultados.

## 2. MODELO DE OKANO

Con la finalidad de entender con mayor claridad acerca del modelo del SAV desarrollado por Okano, presentaremos a continuación un resumen del mismo.

El modelo se basa en el efecto que causan las vibraciones provenientes del medio externo originadas por diversas perturbaciones (personas caminando, máquinas trabajando, línea eléctrica, etc.) sobre el sistema que se desea aislar.

2.1. Modelo para dos etapas

Para el caso particular de dos etapas, la ecuación de movimiento para los dos osciladores acoplados sin amortiguación, está dada por

$$M_1 \ddot{X}_1 + K_1 X_1 + K_2(X_1 - X_2) = K_1 X_b \text{ sen } wt, \tag{1}$$

$$M_2 \ddot{X}_2 + K_2(X_2 - X_1) = 0, \tag{2}$$

donde  $K_1 X_b \text{ sen } wt$  representa la fuerza perturbadora del medio externo,  $M$  y  $K$ , la masa y la constante de rigidez, y los subíndices 1 y 2, las etapas del sistema.

Varios autores [1,7,8] recomiendan que la frecuencia natural del sistema de aislar, debe ser al menos dos órdenes de magnitud mayor que la frecuencia de la vibración externa, con el fin de evitar efectos de resonancia.

Se define la amplitud del ruido  $\text{dB}_1$  (en decibeles), que habría entre la amplitud del ruido de la primera etapa y la amplitud del ruido del medio externo, como

$$\text{dB}_1 = 20 \log \left( \frac{X_1}{X_b} \right). \tag{3}$$

De igual manera, la amplitud del ruido que habría entre la segunda etapa y la primera sería

$$\text{dB}_2 = 20 \log \left[ \frac{(X_2 - X_1)}{X_1} \right]. \tag{4}$$

Luego el ruido global entre la segunda etapa y el medio externo estaría dado por

$$\text{dB}_g = 20 \log \left[ \frac{(X_2 - X_1)}{X_b} \right]. \tag{5}$$

2.2. Modelo para  $n$  etapas

Consideremos en forma general a nuestro SAV como una serie de  $n$  placas de masas ( $M$ ) diferentes, colocadas una sobre otra y separadas por elementos elásticos con características conocidas de rigidez ( $K$ ) y amortiguación ( $C$ ) (véase Fig. 1).

Si se obtiene el diagrama de cuerpo libre para cada una de las etapas, de acuerdo a la segunda ley de Newton las ecuaciones que rigen el comportamiento son:

Para la primera etapa,

$$M_1 \ddot{X}_1 + C_1 \dot{X}_1 + K_1 X_1 + K_2(X_1 - X_2) + C_2(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) = F_1(t); \tag{6}$$

para las etapas  $r$  (donde  $r = 2, 3, \dots, n - 1$ ),

$$M_r \ddot{X}_r + C_r(\dot{X}_r - \dot{X}_{r-1}) + K_r(X_r - X_{r-1}) + C_{r+1}(\dot{X}_r - \dot{X}_{r+1}) + K_{r+1}(X_r - X_{r+1}) = 0; \tag{7}$$

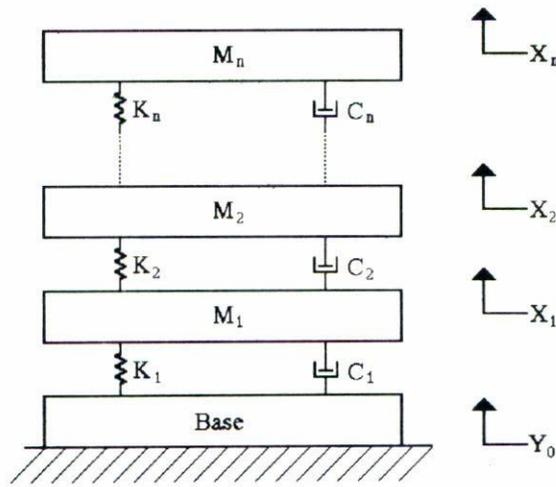


FIGURA 1. Diagrama representativo del SAV de  $n$  etapas que se analiza. El cálculo se realizó suponiendo un movimiento unidimensional de  $n$  etapas con masa  $M$  y valores de las constantes de rigidez ( $K$ ) y constante de amortiguación ( $C$ ) conocidos.

y para la  $n$ -ésima etapa,

$$M_n \ddot{X}_n + C_n(\dot{X}_n - \dot{X}_{n-1}) + K_n(X_n - X_{n-1}) = 0. \tag{8}$$

Aquí se ha considerado que el sistema es afectado únicamente por la fuerza externa  $F_1$  cuya amplitud y frecuencia es conocida. Estas ecuaciones pueden expresarse en forma matricial mediante la ecuación

$$\{[A] + jw[B]\}[X] = [P], \tag{9}$$

donde la matriz  $[X]$  es la solución, teniendo una forma  $X = X_i e^{jw t}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ , y las matrices  $[A]$ ,  $[B]$  y  $[P]$  están dadas por

$$[A] = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 - M_1 w^2 & -K_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -K_2 & K_2 + K_3 - M_2 w^2 & -K_3 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & -K_{n-1} & K_{n-1} + K_n - M_{n-1} w^2 & \cdot & -K_n \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -K_n & K_n - M_n w^2 & \cdot \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -C_2 & C_2 + C_3 & -C_3 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -C_{n-1} & C_{n-1} + C_n & -C_n \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -C_n & C_n \end{bmatrix} \tag{11}$$

y

$$[P] = [(K_1 + jwC_1)Y_0, 0, \dots, 0]. \tag{12}$$

El ruido entre la amplitud de la última etapa y la amplitud del medio externo está dado por

$$\text{dB} = 20 \log \left( \frac{X_n}{Y_0} \right);$$

o sea,

$$\text{dB} = 20 \log \left\{ \frac{\sqrt{\text{Re}(X_n)^2 + \text{Im}(X_n)^2}}{Y_0} \right\}. \quad (13)$$

Una vez planteadas las ecuaciones de nuestro problema, para su solución se necesitan conocer datos, tales como la amplitud del ruido externo y su frecuencia, así como también la constante de rigidez ( $K$ ) y la constante de amortiguación ( $C$ ) de los elementos a utilizar en el SAV. Estos datos pueden obtenerse mediante mediciones experimentales.

### 3. SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA EL CASO DE DOS ETAPAS

Una de las preocupaciones al ocuparnos del problema es el de encontrar valores de los parámetros  $K$ ,  $C$ ,  $M$ ,  $f$  y número de etapas ( $n$ ) del SAV, que proporcionen condiciones adecuadas de disminución de ruido de acuerdo a una necesidad específica. Sin embargo, el cálculo analítico para optimizar el sistema resulta complicado, sobre todo cuando el número de etapas que se necesitan es mayor de dos. Para darnos una clara idea del problema, presentaremos a continuación un cálculo analítico basado en un SAV con dos etapas. Este caso está ampliamente estudiado en los libros de texto sobre teoría de vibraciones [9]. Sin embargo, analíticamente, su solución se torna compleja, como se verá a continuación.

Consideremos la expresión de la solución mencionada anteriormente [Ec. (9)] para el caso de dos etapas:

$$[X] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = [M]^{-1}[P], \quad \text{con} \quad [P] = (K_1 + jwC_1) \begin{bmatrix} Y_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

donde la matriz  $M$  está dada por la expresión

$$M = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 - M_1w^2 + jwC_1 + jwC_2 & -K_2 - jwC_2 \\ -K_2 - jwC_2 & K_2 - M_2w^2 + jwC_2 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

De las expresiones anteriores se puede mostrar que

$$\frac{X_2}{Y_0} = \frac{(K_1 + jwC_1)}{\det M} (K_2 + jwC_2). \quad (16)$$

Para simplificar el análisis, consideremos los valores  $K_1 = K_2$ ,  $C_1 = C_2$  y  $M_1 = M_2$ . Luego, la Ec. (16) puede representarse como

$$\left| \frac{X_2}{Y_0} \right| = \frac{1}{|Z^2 - 3Z + 1|} = \frac{1}{|Z - a|} \frac{1}{|Z - b|}, \quad (17)$$

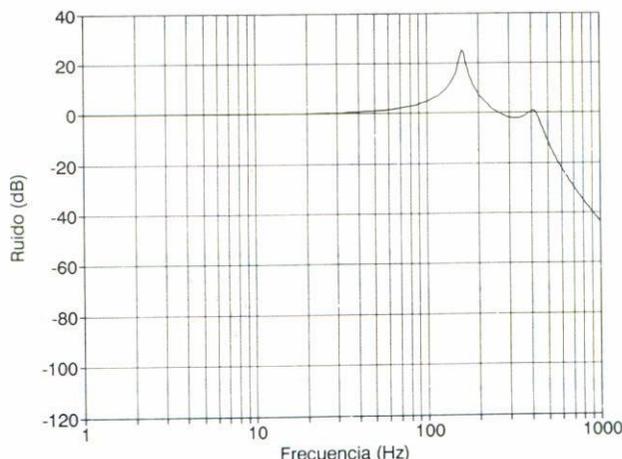


FIGURA 2. Respuesta de un SAV de dos etapas. Los valores de los picos se encuentran a 160 y 412 Hz. Para esta gráfica se consideraron los valores  $M_1 = M_2 = 0.03$  Kg,  $K_1 = K_2 = 80,000$  N/m,  $C_1 = C_2 = 5$  N s/m y una perturbación externa  $Y_0 = 1 \times 10^{-6}$  m.

donde  $Z = Mw^2/(K + jwC)$  y  $a, b = (1/2)(3 \pm \sqrt{5})$  son las raíces del polinomio que corresponden a la posición de los picos de resonancia. Como ejemplo del cálculo analítico, si calculamos con los valores de  $K = 80,000$  N/m,  $M = 0.030$  Kg y  $C = 0$ , encontramos que la posición de los picos corresponde a las frecuencias  $f_1 = 160$  Hz y  $f_2 = 412$  Hz, lo cual concuerda con los resultados obtenidos en la Ref. [1]. La gráfica de este resultado se muestra en la Fig. 2.

En forma general, de la Ec. (17) se ve que el comportamiento de cada factor de la relación  $|X_2/Y_0|$  depende proporcionalmente con la inversa de la variable  $Z$ . Luego, podemos escribirlo en la forma

$$\frac{1}{Z} \propto \frac{K}{Mw^2} + j\frac{C}{Mw}. \quad (18)$$

Esta expresión está formada por una parte real y otra imaginaria. La parte real nos indica que el SAV está fuertemente influenciado por el valor de  $K$  (constante de rigidez del sistema) y varía inversamente con el cuadrado de la frecuencia, por lo que un sistema donde predomine el valor de  $K$  será un sistema tipo resorte que vibrará de acuerdo a sus características propias. Por otro lado, está el término imaginario, que depende fuertemente del valor de  $C$  (constante de amortiguación) y su variación es más suave con respecto a la frecuencia. Su función es disminuir la amplitud de los picos que hubiera en el SAV, ocasionados por la parte real; esto es, "suaviza" el comportamiento de los picos.

Sin embargo, el comportamiento global incluye la combinación de estas dos partes en la cual están involucrados los parámetros relevantes, por lo que se piensa que en un SAV dado pueden determinarse valores de dichos parámetros que mejoren el comportamiento. Nótese que el efecto de la masa está incluido en ambos términos. De hecho, sabemos que mientras mayor sea el valor de la masa, el SAV es mejor; sin embargo, en la actualidad los SAV que se construyen buscan ser cada vez más compactos, con el fin de poder adaptarse

en lugares pequeños tal como una cámara de ultra alto vacío, por lo que el valor de la masa se limita por fines prácticos. Luego, los valores de los demás parámetros se tornan importantes para conseguir un SAV adecuado.

Si representamos la Ec. (17) definiendo los valores de  $w_0^2 = K/M$  y de  $w_1 = K/C$  para hacer una expresión más sencilla, encontramos que

$$\left| \frac{X_2}{Y_0} \right|^{-1} = \left[ \left[ \frac{(w/w_0)^2}{1 + (w/w_0)^2} - a \right]^2 + \left[ \frac{(w/w_0)^2(w/w_1)}{1 + (w/w_0)^2} \right]^2 \right]^{1/2} \\ \times \left[ \left[ \frac{(w/w_0)^2}{1 + (w/w_0)^2} - b \right]^2 + \left[ \frac{(w/w_0)^2(w/w_1)}{1 + (w/w_0)^2} \right]^2 \right]^{1/2}. \quad (19)$$

Esta expresión representa la relación de amortiguación y contiene a todos los parámetros involucrados en el SAV. Derivando esta expresión con el fin de obtener analíticamente los puntos críticos (los picos) de la función, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dw} \left| \frac{X_2}{Y_0} \right|^{-1} = \frac{2w}{w_0^8(w_1 + w_2)^5} [B_{12}w^{12} + B_{10}w^{10} \\ + B_8w^8 + B_6w^6 + B_4w^4 + B_2w^2 + B_0], \quad (20)$$

donde los coeficientes del polinomio están dados por:

$$B_{12} = 2w_1^4, \\ B_{10} = w_1^2(8w_1^4 - 6w_0^2w_1^2 + 7w_0^4), \\ B_8 = 5w_1^4(2w_1^4 - 6w_0^2w_1^2 + 7w_0^4), \\ B_6 = w_1^4(4w_1^6 - 42w_0^2w_1^4 + 71w_0^4w_1^2 - 6w_0^6), \\ B_4 = w_1^6w_0^2(65w_0^2w_1^2 - 18w_0^4 - 18w_1^4), \\ B_2 = 2w_1^8w_0^4(11w_1^2 - 9w_0^2), \\ B_0 = -6w_0^6w_1^{10}. \quad (21)$$

Como puede notarse, un problema que en principio parece simple (dos etapas), al intentar resolverlo en forma analítica se complica ya que se generan polinomios de grado 6 que no pueden resolverse. Sin embargo, hemos aprendido que al aumentar el número de etapas del SAV, aumenta el grado de complejidad de las ecuaciones a tal grado que necesitamos utilizar un método diferente al anterior. Por ello, a continuación presentamos una alternativa de solución consistente en un método gráfico para solucionar sistemas de  $n$  etapas.

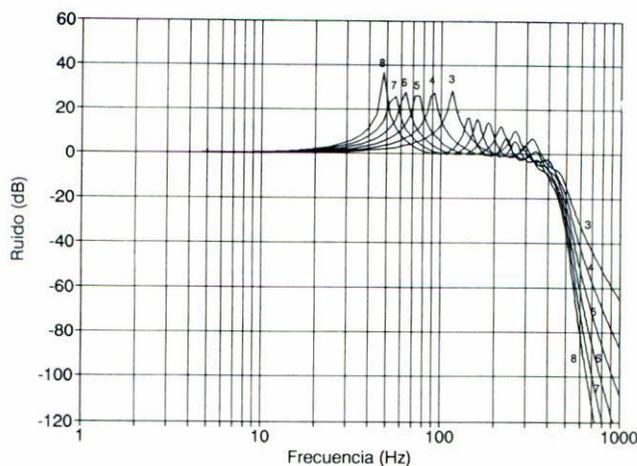


FIGURA 3. Respuesta de un SAV cuando se analiza con diferente número de etapas. En la gráfica se muestran 3, 4, 5, 6, 7 y 8 etapas con los mismos valores de  $K$ ,  $C$  y  $Y_0$  usados en la Fig. 2.

#### 4. MÉTODO GRÁFICO

Siguiendo el modelo presentado en la Sec. 2 para el análisis del SAV, a continuación se muestra la metodología desarrollada basada en un método gráfico para determinar criterios de selección de los valores de los parámetros relevantes en un SAV, tales como  $M$ ,  $K$ ,  $C$ ,  $f$  y el número  $n$  de etapas deseables en cada caso.

El método que se propone puede utilizarse para diferentes valores de  $K$ ,  $C$  y  $M$ , está basado en un programa de cálculo que resuelve las ecuaciones presentadas en la Sec. 2.2 y los resultados son graficados para diferentes valores de los parámetros involucrados. Con base en el comportamiento de las gráficas, se aplican criterios de selección de los valores de los parámetros y su función dentro del SAV.

#### 5. RESULTADOS Y DISCUSIONES

##### 5.1. Efecto del número de etapas $n$

Una de nuestras primeras preocupaciones es el número de etapas  $n$  que debe contener el SAV. El número óptimo de etapas a utilizar dependerá de las necesidades prácticas del SAV, al igual que de los valores de los parámetros  $K$  y  $C$ . Para ver el efecto de esta variable, en la Fig. 3 se muestra una serie de curvas para 3, 4, 5, 6, 7 y 8 etapas, donde se han utilizado para cada etapa, valores de  $M = 0.03$  Kg,  $K = 80,000$  N/m y  $C = 5$  N s/m. En ellas se notan que al aumentar el número de etapas, los picos principales de las curvas se mueven hacia una menor frecuencia. Esto es deseable si deseamos mantenernos lejos de la región de resonancia.

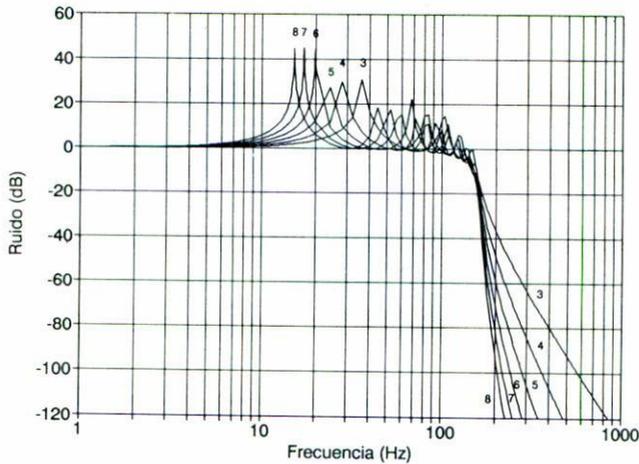


FIGURA 4. Gráfica similar a la de la Fig. 3, excepto que se ha aumentado el valor de cada masa a 0.30 Kg. Se puede notar el efecto de la masa por la menor frecuencia en que aparecen los picos principales.

### 5.2. Influencia de la masa

En la Fig. 4 se muestran las curvas anteriores, excepto que el valor de la masa se ha cambiado a 0.3 Kg. Aquí se nota con gran claridad que al aumentar el valor de la masa, los picos principales se obtienen a frecuencias menores, por lo que con un aumento en la masa, mejorará el SAV.

### 5.3. Los parámetros $K$ y $C$

En la Fig. 5 se presenta en una gráfica tridimensional el nivel de ruido de un SAV, donde se ha considerado un valor constante de  $C = 1 \text{ N s/m}$ . La gráfica representa una serie de curvas como la mostrada en la Fig. 2. Los valores de  $K$  van desde 1 hasta 100,000 N/m y la frecuencia se varía entre 1 y 1000 Hz. Para el cálculo se han considerado 6 etapas y todas las masas iguales (0.030 Kg).

Con el objeto de representar el comportamiento en el rango de  $K$  mencionado, la escala de  $K$  en la figura se ha dividido en dos secciones. De ella se observa que cuando los valores de  $C$  y de  $K$  son pequeños, el factor dominante es el de la amortiguación, y los picos son casi imperceptibles, pero cuando el valor de  $K$  aumenta, las amplitudes de los picos van siendo mayores, al mismo tiempo que se van corriendo hacia una frecuencia mayor.

La Fig. 6 es similar a la anterior, pero para toda la gráfica se ha considerado un valor constante de  $C = 10 \text{ N s/m}$ . Aquí puede notarse el efecto que causa un valor mayor de la amortiguación, ya que se obtiene una zona más alisada al amortiguarse las amplitudes de los picos. Pero nuevamente aparecen los picos más pronunciados conforme aumenta el valor de  $K$ .

Este efecto se puede notar con mayor claridad en la Fig. 7, donde se ha aumentado el valor de  $C$  a 100 N s/m. Puede notarse que los picos secundarios se han amortiguado, y

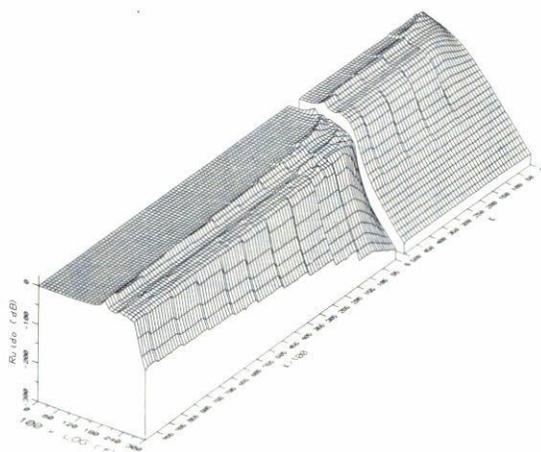


FIGURA 5. Gráfica tridimensional del comportamiento del ruido cuando se recorren los valores de  $K$  entre 1 y 100,000 N/m. El número de etapas es 6. La gráfica se ha dividido en dos partes para tratar de representar todo el rango de  $K$ . Toda la gráfica se obtuvo para  $C = 1$  N s/m. Los valores para cada una de las etapas son iguales y son  $M = 0.03$  Kg y  $Y_0 = 1 \times 10^{-6}$  m. La frecuencia se varió desde 1 hasta 1000 Hz. Su comportamiento se discute en el texto.

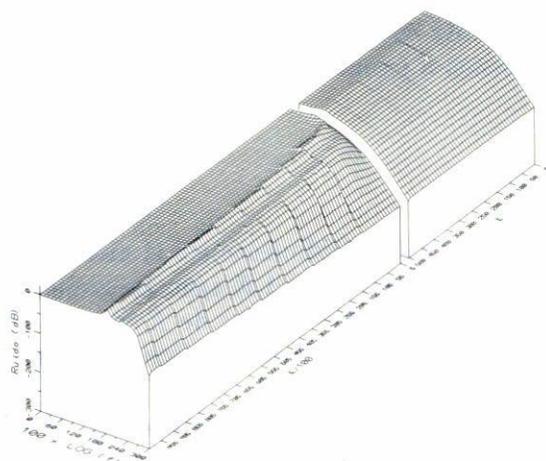


FIGURA 6. Gráfica tridimensional obtenida con los mismos parámetros de la Fig. 5, excepto que toda la gráfica fue obtenida para  $C = 10$  N s/m. La unidades de  $K$  están dadas en N/m y su escala es presentada en dos rangos.

el principal (el de menor frecuencia) apenas es perceptible. La superficie tridimensional está aún más alineada.

Si comparamos entre sí estas tres últimas figuras, puede observarse que conforme se aumenta el valor de  $C$ , el nivel de ruido a una misma frecuencia aumenta.



Tomando las coordenadas ( $f$  y  $K$ ) de los picos principales en las gráficas 5, 6 y 7 anteriores, en la Fig. 8 se graficó el comportamiento del  $\log(2\pi f)$  contra el valor de  $K$ . Los puntos discretos de las rectas I, II y III que se muestran corresponden a los picos principales de cada gráfica tridimensional mostradas en las Figs. 5, 6 y 7, respectivamente. Las líneas continuas corresponden al resultado obtenido mediante una regresión. Las ecuaciones resultantes son:

$$\begin{array}{ll} \text{Recta I} & (C=1), \quad f_I = 0.0350K^{0.500}. \\ \text{Recta II} & (C=10), \quad f_{II} = 0.0264K^{0.529}. \\ \text{Recta III} & (C=100), \quad f_{III} = 0.0069K^{0.647}. \end{array}$$

La recta I presenta un comportamiento muy similar al caso simple de masa-resorte. En las otras rectas, conforme aumenta el valor de  $C$ , las ecuaciones determinadas muestran un comportamiento ligeramente diferente, tanto en el valor de la constante como en el exponente de  $K$ .

De acuerdo con la ecuación de la recta I, se podría determinar una masa equivalente del SAV mediante la conocida relación  $w_I = (K/M_{eq})^{1/2}$ . El cálculo para este caso específico nos arroja un valor de 0.52 Kg. Esto significa que todo el sistema de 6 etapas analizado, puede ser sustituido por una sola etapa con masa de 0.52 Kg y así obtenerse los mismos efectos de aislamiento.

## 6. CONCLUSIONES

Se ha demostrado, mediante un cálculo analítico, la complejidad de la solución cuando se pretenden determinar los valores de los parámetros óptimos en un SAV de dos etapas, por lo que se hace muy complicado realizar el mismo cálculo para un mayor número de etapas.

Con base en lo anterior, se desarrolló una alternativa basada en un modelo gráfico para un SAV de  $n$  etapas y movimiento unidimensional. Con este modelo gráfico es posible determinar los valores más apropiados de los diferentes parámetros que intervienen en el SAV; esto es, dada una amplitud de vibración externa  $Y_0$ , determinar el número de etapas  $n$ , la constante de rigidez  $K$ , la masa  $M$  y la constante de amortiguación  $C$ , tal que proporcionen las mejores condiciones de aislamiento de vibraciones. Se han mostrado gráficas tridimensionales para varias condiciones de un sistema de 6 grados de libertad, donde se aprecia el comportamiento conforme se aumenta el valor de  $C$ . De estas curvas tridimensionales, se obtuvo el comportamiento de los picos de menor frecuencia, hallándose que para  $C = 1$  es de la forma  $w = (K/M)^{1/2}$  y conforme aumenta  $C$ , esta relación muestra una variación ligera. En conclusión, la optimización de los parámetros en forma analítica no es posible hacerla dada la complejidad de solución de las ecuaciones obtenidas, por lo que se presenta un modelo gráfico como alternativa.

De este modelo gráfico puede deducirse que si se conocen los valores experimentales de  $K$ ,  $C$  y  $M$ , es posible determinar la frecuencia y el número de etapas necesarias para alcanzar un nivel de aislamiento deseable.

Con el modelo gráfico desarrollado es posible obtener las curvas adecuadas para cada situación y necesidades en cuanto a amortiguación y materiales con que se cuente.

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo otorgado por CONACYT para la realización de este trabajo dentro del proyecto clave P123CCT883998.

#### REFERENCIAS

1. M. Okano, K. Kajinura, S. Wakiyama, F. Sakai, W. Mizutani and M. Ono, *J. Vac. Sci. Technol.* **A5** (6) (1987) 3313.
2. G. Binnig and H. Rohrer, *Lex Prix Nobel en 1986*, The Nobel Foundations (1987) 85.
3. P.E. Smith Douglas, D. Kirk Michael and F. Quate Calvin, *J.Chem. Phys.* **86** (11) (1987) 6034.
4. D.P.E. Smith, G. Binnig and C.F. Quate, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1986) 1641.
5. G. Binnig and H. Rohrer, *Helv. Phys. Acta* **55** (1982) 726.
7. Commercial STM, W.A. Technology LTD, Chesterton Mills, French's Road, Cambridge CB4 3NP, England.
8. R. Sonnenfeld, J. Schneir and P.K. Hansma, *Modern Electrochemistry* **21**, Edited by Ralph E. White, J. O'M. Brockris and B.E. Conway, Plenum Publishing Corp. (1990).
9. R. Vila y J. León, *Vibraciones mecánicas*, Edit. Limusa (1981).