

Las ecuaciones de balance para un fluido viscoso a partir de un principio variacional tipo Hamilton

ANGEL FIERROS PALACIOS
Consejo Consultivo de Investigación
Instituto Mexicano del Petróleo

Recibido el 18 de julio de 1991; aceptado el 22 de abril de 1992

RESUMEN. Se obtienen las ecuaciones diferenciales de campo para un fluido viscoso cualquiera con un formalismo lagrangiano como el de la teoría clásica de campos. Se establece una funcional de acción como una integral espacio-temporal sobre una región del espacio euclídeo tridimensional, de una densidad lagrangiana función de ciertas variables de campo. Se postula un principio de acción extremal de tipo Hamilton con condiciones de frontera adecuadas y se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales de campo. Se propone una densidad lagrangiana apropiada del tipo $T - V$, con la que se reproduce la ecuación de movimiento para cualquier fluido viscoso. Con un teorema referente a la invariancia de la acción frente a variaciones con respecto al tiempo, se obtiene la ecuación de balance de energía generalizada para el fluido viscoso; y se recupera la ecuación de balance de energía para el mismo. Este marco teórico se utilizó para resolver el problema del flujo potencial [6].

ABSTRACT. The partial differential field equations for any viscous fluid are obtained from the Lagrangian formalism as in classical field theory. An action functional is introduced as a space-time integral over a region of three-dimensional Euclidean space, of a Lagrangian density function of certain field variables. A Hamilton type extremum action principle is postulated with adequate boundary conditions, and a set of differential field equations is derived. With an appropriate Lagrangian density of the $T - V$ type, the equation of motion for any viscous fluid is reproduced. A theorem referring to the invariance of the action under time variations leads to the generalized energy balance equation for the viscous fluid and to the energy balance equation proper. The same theoretical approach can be used to solve the problem of potential flow [6].

PACS: 03.40.Gc; 47.10.+g

1. INTRODUCCIÓN

Para obtener las ecuaciones diferenciales que describen el estado dinámico de un fluido viscoso [1], es necesario tomar en cuenta el efecto de la disipación de energía que tiene lugar durante el movimiento del fluido y que afecta al movimiento mismo. Este proceso resulta de la irreversibilidad termodinámica del movimiento, que siempre ocurre, y es debida a procesos de fricción interna (viscosidad) y a la conducción térmica. La viscosidad en un fluido real, es debida a una transferencia irreversible de momento, desde puntos del sistema donde la velocidad es grande a aquéllos donde es pequeña.

En un fluido perfecto existe una transferencia de momento totalmente reversible, debida al transporte mecánico de un elemento de volumen desde un lugar del sistema a otro. La fuerza hidrodinámica responsable de ese proceso es el gradiente de la presión que actúa

sobre diversas partes del fluido. Para el fluido ideal, la presión $p(\mathbf{x}, t)$ se define en términos de la energía interna específica del sistema [2] de la siguiente manera:

$$p(\mathbf{x}, t) = \rho^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}, \quad (1.1)$$

en donde $\varepsilon(\rho)$ es la energía interna específica del fluido, y es función de la densidad únicamente. Así, la fuerza hidrodinámica sobre el sistema es

$$\mathbf{F}_H = -\text{grad} \left(\rho^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right). \quad (1.2)$$

En términos generales, sobre un fluido perfecto sólo se tiene un proceso de compresión hidrostática o volumétrica que da origen a cambios de presión en diferentes puntos del fluido. Como consecuencia, tanto la densidad como la energía interna específica del sistema experimentan variaciones y se establece en el fluido un régimen hidrodinámico caracterizado por la aparición en el sistema de gradientes del campo de velocidades.

En un fluido viscoso el mecanismo responsable que genera el régimen hidrodinámico es, nuevamente, la variación en la densidad del sistema, que ocurre cuando hay un cambio en la geometría de la región por él ocupada, deformada por algún agente externo. Cuando ocurre la deformación, el sistema es sacado de su estado de equilibrio que no sólo es mecánico sino también térmico. Como consecuencia, surgen esfuerzos internos que tienden a regresarlo a su estado original de equilibrio. Esos esfuerzos internos son debidos a fuerzas moleculares de corto alcance que actúan desde cualquier punto del fluido afectando sólo a puntos vecinos. En general, se dice que son fuerzas que actúan sobre la superficie. Cuando la deformación ocurre, los esfuerzos internos realizan trabajo. Se puede demostrar [3] que para deformaciones pequeñas el trabajo realizado por los esfuerzos internos está dado por

$$d\omega = -\sigma_{ij} \delta u_{ij}, \quad (1.3)$$

en donde

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (1.4)$$

es un tensor simétrico conocido como el tensor de esfuerzos, y

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.5)$$

es el tensor de deformaciones para el caso en que éstas son pequeñas. En la relación anterior,

$$u_i = x'_i - x_i \quad (1.6)$$

son las componentes del vector desplazamiento. El vector \mathbf{u} sólo depende de las coordenadas [3].

Generalmente, se supone que la deformación ocurre tan lentamente que el equilibrio termodinámico se establece en el sistema en cada instante de acuerdo con las condiciones externas, de tal manera que el proceso es termodinámicamente reversible; hipótesis que siempre se justifica en la práctica [3].

Debido a la deformación, la energía interna específica del sistema cambia. Así, a una variación infinitesimal de ella le corresponde una diferencia entre la cantidad de calor adquirida y el trabajo $d\omega$ hecho por los esfuerzos internos. Es decir, $d\varepsilon = T ds - d\omega$; y de acuerdo con (1.3):

$$d\varepsilon = T ds + \sigma_{ij} du_{ij}. \quad (1.7)$$

Esta es la identidad termodinámica para la deformación [3]. En ella, s es la entropía específica y T la temperatura. Para comprensión hidrostática el tensor de esfuerzos es simplemente

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad (1.8)$$

y

$$\sigma_{ij} du_{ij} = -p du_{\ell\ell}. \quad (1.9)$$

Si se considera un volumen unitario y dado que [3]

$$dV' = dV(1 + u_{\ell\ell}), \quad (1.10)$$

se tiene que

$$u_{\ell\ell} = (V - V_0); \quad (1.11)$$

de tal manera que $du_{\ell\ell}$ es simplemente el cambio en el volumen dV . En consecuencia, la identidad termodinámica toma la forma usual

$$d\varepsilon = T ds - p dV \quad (1.12)$$

Finalmente, y de acuerdo con la Ec. (1.7), es fácil ver que para el fluido viscoso,

$$\varepsilon = \varepsilon(s, u_{ij}), \quad (1.13)$$

por lo cual

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial s} \right)_{u_{ij}} = T \quad (1.14)$$

y

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial u_{ij}} \right)_s = \sigma_{ij}. \quad (1.15)$$

2. EL PRINCIPIO TIPO HAMILTON Y LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE CAMPO

Para el fluido real se define una densidad lagrangiana como una función continua y con derivadas continuas hasta de tercer orden en sus argumentos:

$$\ell = \ell(\mathbf{x}, \mathbf{v}, u_{ij}, t), \quad (2.1)$$

tal que la integral de ℓ sobre una región R del espacio euclídeo tridimensional, corresponde a la lagrangiana clásica

$$\mathcal{L} = \int_R \ell dV, \quad (2.2)$$

donde dV es el elemento de volumen en la región R .

Se define la acción como es usual, es decir,

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \int_R \ell dV dt. \quad (2.3)$$

El principio tipo Hamilton propone que la funcional de acción sea invariante frente a una variación geométrica continua e infinitesimal, esto es

$$\delta W = 0 \quad (2.4)$$

Como resultado de la invariancia de la acción, se obtienen las ecuaciones diferenciales de campo. Sea

$$\ell = \lambda \rho, \quad (2.5)$$

con λ la lagrangiana específica del sistema, tal que

$$\lambda = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{v}, u_{ij}, t). \quad (2.6)$$

De acuerdo con la definición usual de las variaciones geométricas [2], $\delta t = 0$ para toda t . Adicionalmente, se considera la siguiente condición de frontera [2]

$$\delta x^i(t_1) = \delta x^i(t_2) = 0. \quad (2.7)$$

La variación de la integral de acción (2.3) sujeta a la condición (2.4) conduce a la siguiente relación:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_R \{ \rho \delta \lambda + \lambda [\delta \rho + \rho \operatorname{div}(\delta \mathbf{x})] \} dV dt = 0. \quad (2.8)$$

El tercer término del integrando de la ecuación anterior, proviene del hecho que el elemento de volumen también depende de los parámetros geométricos y, por tanto, debe sujetarse

al proceso de variación. Como consecuencia de ello, la expresión del paréntesis cuadrado es cero porque [2]

$$\delta\rho = -\rho \operatorname{div}(\delta\mathbf{x}). \quad (2.9)$$

En ese caso, en (2.8) se obtiene

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_R \rho \delta\lambda \, dV \, dt = 0. \quad (2.10)$$

Ahora, y de acuerdo con (2.6),

$$\rho \delta\lambda = \rho \left[\frac{\partial\lambda}{\partial x^i} + \frac{\partial\lambda}{\partial v^i} \delta v^i + \frac{\partial\lambda}{\partial u_{ij}} \delta u_{ij} \right]. \quad (2.11)$$

Por otra parte [2],

$$\delta v^i = \frac{d}{dt}(\delta x^i). \quad (2.12a)$$

Además, y de acuerdo con (1.5) y (1.6),

$$\delta u_{ij} = \frac{1}{2} \delta \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^j} [\delta u_i + \delta u_j \delta_{ij}] = \frac{\partial}{\partial x^j} (\delta u_i),$$

en donde δ_{ij} es la delta de Kronecker y se han intercambiado los operadores δ y $\partial/\partial\mathbf{x}$ porque son independientes entre sí. Ahora, y dado que [3]

$$u_i = u_i(\mathbf{x}) \quad (2.12b)$$

depende únicamente de \mathbf{x} ,

$$\delta u_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial u_i}{\partial x^k} \delta x^k, \quad (2.12c)$$

en cuyo caso,

$$\delta u_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^j} (u_{ik} \delta x^k).$$

Sustituyendo en (2.11) las relaciones (2.12a) y (2.12c) se obtiene

$$\begin{aligned} \rho \delta\lambda = & \left[\rho \frac{\partial\lambda}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\rho \frac{\partial\lambda}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\rho \frac{\partial\lambda}{\partial u_{ij}} \right) u_{\ell\ell} \right] \delta x^i \\ & + \frac{d}{dt} \left(\rho \frac{\partial\lambda}{\partial v^i} \delta x^i \right) + \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\rho \frac{\partial\lambda}{\partial u_{ij}} u_{ik} \delta x^k \right], \end{aligned}$$

en donde se han hecho dos integraciones por partes.

Considérese el siguiente término:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\rho \frac{\partial \lambda}{\partial u_{ij}} \right) u_{\ell\ell} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\rho \frac{\partial \lambda}{\partial u_{ij}} u_{\ell\ell} \right) - \left(\rho \frac{\partial \lambda}{\partial u_{ij}} \right) \frac{\partial u_{\ell\ell}}{\partial x^j}.$$

Sin embargo [3], $u_{\ell\ell} = u_{11} + u_{22} + u_{33}$; es decir, es igual a la suma de los elementos de la diagonal principal del tensor de deformaciones. Es un invariante en cualquier sistema de coordenadas. Supóngase que no depende explícitamente de las coordenadas, en cuyo caso $\partial u_{\ell\ell} / \partial \mathbf{x} = 0$; por otra parte, y dado que las deformaciones son pequeñas, se puede ver de (1.11) que

$$u_{\ell\ell} \simeq \frac{1}{\rho}. \tag{2.12d}$$

En ese caso se tiene que

$$\begin{aligned} \rho \delta \lambda = & \left[\rho \frac{\partial \lambda}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\rho \frac{\partial \lambda}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\rho \frac{\partial \lambda}{\partial u_{ij}} \right) \right] \delta x^i \\ & + \frac{d}{dt} \left(\rho \frac{\partial \lambda}{\partial v^i} \delta x^i \right) + \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\rho \frac{\partial \lambda}{\partial u_{ij}} u_{ik} \delta x^k \right]. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Considérese el tercer término de (2.13) e intégrese, esto es,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_R \frac{d}{dt} \left[\rho \frac{\partial \lambda}{\partial v^i} \delta x^i \right] dV dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_R \frac{d}{dt} \left[\rho \frac{\partial \lambda}{\partial v^i} dV \delta x^i \right] dt \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_R \left(\rho \frac{\partial \lambda}{\partial v^i} \right) \operatorname{div} \mathbf{v} \delta x^i dV dt \\ &= \left[\int_R \left(\rho \frac{\partial \lambda}{\partial v^i} \right) dV \delta x^i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \int_R \left(\rho \frac{\partial \lambda}{\partial v^i} \right) \operatorname{div} \mathbf{v} \delta x^i dV dt. \end{aligned}$$

El término encerrado en el paréntesis cuadrado es cero, de acuerdo con la condición de frontera (2.16). El único término que sobrevive es el siguiente:

$$- \int_{t_1}^{t_2} \int_R \left(\rho \frac{\partial \lambda}{\partial v^i} \right) \operatorname{div} \mathbf{v} \delta x^i dV dt. \tag{2.14}$$

El último término de (2.13) se puede escribir como sigue:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_R \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\rho \frac{\partial \lambda}{\partial u_{ij}} u_{ik} \delta x^k \right] dV dt = \int_{t_1}^{t_2} \oint_S \rho \frac{\partial \lambda}{\partial u_{ij}} u_{ik} \delta x^k da_j dt,$$

en donde $d\mathbf{a}$ es el elemento de superficie y se ha utilizado el teorema de Green.

Si se considera un medio infinito que no esté deformado en el infinito, se puede hacer que la superficie de integración tienda al infinito [3], entonces el tensor $\partial\lambda/\partial u_{ij} = 0$ sobre la superficie, y la integral es cero.*

Con (2.14) y lo que resta de (2.13), se obtiene en (2.10)

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_R \left[\rho \frac{\partial \lambda}{\partial x^i} - \mathcal{D} \left(\rho \frac{\partial \lambda}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u_{ij}} \right) \right] \delta x^i dV dt = 0 \quad (2.15)$$

Dado que las variaciones locales de \mathbf{x} son arbitrarias y linealmente independientes entre sí, y debido a que tanto dV como dt son incrementos totalmente arbitrarios y en consecuencia distintos de cero, la Ec.(2.15) sólo se satisface si el integrando es nulo; es decir

$$\mathcal{D} \left(\rho \frac{\partial \lambda}{\partial v^i} \right) - \rho \frac{\partial \lambda}{\partial x^i} = - \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u_{ij}} \right). \quad (2.16)$$

Esta es la ecuación de balance de momento generalizada para el fluido viscoso. Si la viscosidad es despreciable, la energía interna específica sólo es función de la densidad, de modo que

$$\begin{aligned} - \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u_{ij}} \right) &= - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u_{ij}} \delta_{ij} \right) = - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u_{rr}} \right) \\ &= - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \left(\frac{1}{\rho} \right)} \right) = - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

En ese caso, en (2.16) se obtiene

$$\mathcal{D} \left(\rho \frac{\partial \lambda}{\partial v^i} \right) - \rho \frac{\partial \lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right), \quad (2.18)$$

que no es otra cosa más que la ecuación de balance de momento generalizada para el fluido ideal.

En las Ecs.(2.16) y (2.18),

$$\mathcal{D} \equiv \frac{d}{dt} + \text{div } \mathbf{v} \quad (2.19)$$

es el operador diferencia de Reynolds [4].

*Como se verá más adelante, $\partial\lambda/\partial u_{ij} = -\partial\varepsilon/\partial u_{ij} = -\sigma_{ij} = 0$ implica que si el sistema no está deformado, los esfuerzos son cero en la superficie.

3. LAS VARIACIONES TEMPORALES Y LA ECUACIÓN DE BALANCE DE ENERGÍA GENERALIZADA

Si a la funcional de acción para cualquier fluido se le somete a un proceso variacional con respecto al parámetro de evolución, se puede demostrar que es invariante frente a transformaciones temporales continuas [2].

Considérese la integral de acción (2.3) para el fluido real sujeta a una variación temporal, de modo que tanto las entidades cinemáticas como las funciones de campo contenidas en ella experimenten cambios infinitesimales. Como consecuencia de tal proceso, se demuestra que la funcional de acción es una invariante [2], es decir,

$$\delta^+ W = 0. \tag{3.1}$$

De acuerdo con la definición de variación temporal [2] se tiene que

$$\delta^+ W = \int_{t_1}^{t_2} \int_R \left[\delta^+ \ell + \ell \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^i} \delta^+ t + \frac{d}{dt} (\delta^+ t) \right) \right] dV dt = 0. \tag{3.2}$$

Si se integra por partes el tercer término del integrando de (3.2), se obtiene únicamente

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_R \ell \frac{d}{dt} (\delta^+ t) dV dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_R -\mathcal{D} \ell \delta^+ t dV dt. \tag{3.3}$$

En (3.3) se ha omitido el segundo término que resulta de la integración por partes, debido a que se trata de la integral de una derivada total con respecto al tiempo, la cual se cancela al integrar si se considera la siguiente condición de frontera:

$$\delta^+ t_1 = \delta^+ t_2 = 0. \tag{3.4}$$

Por otra parte, si se sustituye (3.3) en (3.2), se puede ver que

$$\ell \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathcal{D} \ell = -\frac{d\ell}{dt}. \tag{3.5}$$

En ese caso, en (3.2) se obtiene

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_R \left[\delta^+ \ell - \frac{d\ell}{dt} \delta^+ t \right] dV dt = 0. \tag{3.6}$$

De acuerdo con la funcionalidad de ℓ , se tiene que

$$\delta^+ \ell = \frac{\partial \ell}{\partial x^i} \delta^+ x^i + \frac{\partial \ell}{\partial v^i} \delta^+ v^i + \frac{\partial \ell}{\partial u_{ij}} \delta^+ u_{ij} + \frac{\partial \ell}{\partial t} \delta^+ t. \tag{3.7}$$

Por otra parte [2],

$$\delta^+ x^i = v^i \delta^+ t, \tag{3.8}$$

$$\delta^+ v^i = \frac{dv^i}{dt} \delta^+ t. \tag{3.9a}$$

El vector desplazamiento es sólo función de las coordenadas [3], como es fácil ver de (1.6), de manera que

$$\delta^+ u_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^j} (\delta^+ u_i);$$

en cuyo caso

$$\delta^+ u_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial u_i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial t} \delta^+ t = u_{ik} v^k \delta^+ t.$$

Por lo tanto,

$$\delta^+ u_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^j} (u_{ik} v^k) \delta^+ t. \tag{3.9b}$$

Si ahora se considera el tercer término del miembro derecho de (3.7), se tiene que

$$\rho \frac{\partial \lambda}{\partial u_{ij}} \delta^+ u_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\rho \frac{\partial \lambda}{\partial u_{ij}} u_{ik} v^k \right] \delta^+ t - \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\rho \frac{\partial \lambda}{\partial u_{ij}} u_{ik} \right] v^k \delta^+ t,$$

en donde se ha usado la relación (2.5) y se ha realizado una integración por partes. Ahora, sea $v^k = v^i \delta_i^k$, de modo que

$$\rho \frac{\partial \lambda}{\partial u_{ij}} \delta^+ u_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\frac{\partial \lambda}{\partial u_{ij}} v^i \right] \delta^+ t - \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u_{ij}} \right) v^i \delta^+ t. \tag{3.9c}$$

Aquí, se ha utilizado la relación (2.12d) y el hecho de que $\partial u_{\ell\ell} / \partial \mathbf{x} = 0$ y $u_{\ell\ell} = 1/\rho$ (Porque las deformaciones son pequeñas). Si se usa la expresión para el operador diferencial de Reynolds (2.19), es fácil ver que

$$-\frac{d}{dt} \left(\rho \frac{\partial \lambda}{\partial v^i} \right) = -\mathcal{D} \left(\rho \frac{\partial \lambda}{\partial v^i} \right) + \left(\frac{\partial \ell}{\partial v^i} \right) \text{div } \mathbf{v}. \tag{3.9d}$$

Con todo lo anterior, se puede demostrar que

$$\begin{aligned} \delta^+ \ell &= \left[\rho \frac{\partial \lambda}{\partial x^i} - \mathcal{D} \left(\rho \frac{\partial \lambda}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u_{ij}} \right) \right] v^i \delta^+ t \\ &+ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \ell}{\partial v^i} v^i \right) + \left(\frac{\partial \ell}{\partial v^i} v^i - \ell \right) \text{div } \mathbf{v} \right] \delta^+ t \\ &+ \left[\rho \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u_{ij}} v^i \right) \right] \delta^+ t. \end{aligned} \tag{3.10}$$

La expresión encerrada en el primer paréntesis cuadrado es cero, porque se trata de la ecuación de balance de momento generalizada (2.16), por lo cual en (3.7) se obtiene lo siguiente:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_R \left(\delta^+ \ell - \frac{d\ell}{dt} \delta^+ t \right) dV dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_R \left[\mathcal{D}\mathcal{H} + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u_{ij}} v^i \right) + \rho \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right] \delta^+ t dV dt = 0.$$

Si se invoca a la arbitrariedad tanto de los incrementos dV y dt como de la variación temporal $\delta^+ t$, para que se satisfaga la ecuación anterior se requiere que

$$\mathcal{D}\mathcal{H} = - \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u_{ij}} v^i \right) - \rho \frac{\partial \lambda}{\partial t}. \tag{3.11}$$

Esta es la ecuación de balance de energía generalizada para el fluido viscoso, en ella

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \ell}{\partial v^i} v^i - \ell \tag{3.12}$$

es la densidad hamiltoniana. Nuevamente, si la viscosidad es despreciable, el fluido es ideal. En ese caso, se cumple (2.17), de modo que en (3.11) se obtiene

$$\mathcal{D}\mathcal{H} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} v^i \right) - \rho \frac{\partial \lambda}{\partial t}. \tag{3.13}$$

Esta es la ecuación de balance de energía generalizada para el fluido perfecto [2].

4. LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO DEL FLUIDO VISCOZO

Para obtener las ecuaciones de movimiento para cualquier fluido viscoso, se debe usar una densidad lagrangiana idéntica a la del fluido ideal [2], es decir,

$$\ell = \frac{1}{2} \rho v^2 - \rho \varepsilon - \rho \phi(\mathbf{x}). \tag{4.1}$$

En ella, $1/2 \rho v^2$ es la densidad de energía cinética, $\varepsilon(u_{ij})$ es la energía interna específica, que para un fluido real sólo depende del tensor de deformaciones u_{ij} , cuya forma explícita está dada en (1.5). Para cualquier fluido ideal, $\varepsilon(\rho)$ depende únicamente de ρ . Además, $\phi(\mathbf{x})$ es algún potencial conservativo que sólo depende de la posición y es tal que

$$- \text{grad } \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{f}; \tag{4.2}$$

con \mathbf{f} la fuerza externa. Por comodidad, se supondrá que $\mathbf{f} = 0$, de modo que la densidad lagrangiana (4.1) sólo contenga términos hidrodinámicos y sea de la forma $t - u$, con

$t = 1/2\rho v^2$ y $u = \rho\varepsilon$, las densidades de energía cinética y potencial, respectivamente. De esta manera,

$$\ell = \rho \left[\frac{1}{2}v^2 - \varepsilon(u_{ij}) \right], \quad (4.3a)$$

y de acuerdo con (2.5) la lagrangiana específica toma la siguiente forma:

$$\lambda = \frac{1}{2}v^2 - \varepsilon(u_{ij}). \quad (4.3b)$$

Si se sustituye (4.3b) en (2.16) y se toma en cuenta la relación (1.15), se obtiene

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v} \right] = \text{div } \bar{\sigma}, \quad (4.4)$$

en donde σ_{ij} son las componentes del tensor de esfuerzos. Se considerará que para el fluido viscoso ese tensor tiene la siguiente forma:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij} - C\delta_{ij}. \quad (4.5)$$

En esta relación, $p(\mathbf{x}, t)$ es la presión dada en (1.1), σ'_{ij} es el tensor de esfuerzos viscosos y $C(T)$ es alguna constante que depende de la diferencia de temperaturas entre diferentes partes del fluido. La forma explícita más general que tiene el tensor de esfuerzos viscosos es la siguiente [4]:

$$\sigma'_{ij} = \eta \left[\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} - \frac{2}{3}\delta_{ij} \frac{\partial v^\ell}{\partial x^\ell} \right] + \zeta \delta_{ij} \frac{\partial v^\ell}{\partial x^\ell}, \quad (4.6)$$

en donde η y ζ son los coeficientes de viscosidad que, en general, son funciones de la presión y de la temperatura. Como en muchos casos prácticos, esos coeficientes no cambian apreciablemente en el fluido, se les puede considerar como constantes. En tales condiciones, las ecuaciones de movimiento para cualquier fluido viscoso se pueden escribir de la manera siguiente:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v} \right] = -\text{grad } p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta \right) \text{grad div } \mathbf{v}, \quad (4.7)$$

en donde ∇^2 es el operador laplaciano.

Si el fluido es incompresible, la densidad es una constante y de la ecuación de continuidad se tiene que $\text{div } \mathbf{v} = 0$. En la práctica eso es lo que casi siempre ocurre, por lo que en lugar de la Ec.(4.7) se usa la siguiente:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v} \right] = -\text{grad } p + \eta \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (4.8)$$

Estas son las bien conocidas ecuaciones de Navier-Stokes [4]. Para ese caso, el tensor de Stokes de esfuerzos viscosos toma la siguiente forma:

$$\sigma'_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right). \tag{4.9}$$

Como es fácil ver en (4.9), la viscosidad para un fluido real incompresible, está determinada por un solo coeficiente, conocido como la viscosidad dinámica, en tanto que la razón

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \tag{4.10}$$

es la viscosidad cinemática [4].

5. LA ECUACIÓN DE BALANCE DE ENERGÍA PARA EL FLUIDO VISCOSO

Si en la ecuación de balance de energía generalizada (3.11) se utilizan la densidad lagrangiana (4.3a) y la lagrangiana específica (4.3b), se obtiene para la densidad hamiltoniana (3.12), lo siguiente:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho \varepsilon. \tag{5.1}$$

Por otra parte,

$$\mathcal{D}\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \text{div}(\mathcal{H}\mathbf{v}), \tag{5.2}$$

y, además,

$$-\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u_{ij}} v^i \right) = -\frac{\partial}{\partial x_j} (p v^j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma'_{ij} v^i - C v^j). \tag{5.3}$$

Como la lagrangiana específica no es una función explícita del tiempo, $\partial \lambda / \partial t = 0$, de modo que en (3.11) se obtiene

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\text{div}[\mathbf{v}(\mathcal{H} + p) - \mathbf{v} \cdot \bar{\sigma}' - \mathbf{q}]. \tag{5.4}$$

Esta es la ecuación de balance de energía para el fluido viscoso, en ella,

$$\mathbf{q} = C\mathbf{v} \tag{5.5}$$

es la densidad vectorial de flujo de calor debido a la conducción térmica. Este vector está relacionado con la variación de la temperatura a través del fluido. Toma en consideración la transferencia directa de energía molecular, desde aquellas partes del fluido donde la

temperatura es alta a regiones donde T es baja. No produce movimiento macroscópico alguno y puede ocurrir aun cuando el fluido esté en reposo [1]. Este flujo de calor está relacionado con la temperatura a través de la ley de Fourier [5],

$$\mathbf{q} = -\kappa \text{grad } T, \quad (5.6)$$

en donde κ es la conductividad térmica, que siempre es positiva debido a que el flujo de energía va de regiones con alta temperatura a partes del sistema que tienen temperaturas bajas; es decir, \mathbf{q} y $\text{grad } T$ apuntan en direcciones opuestas. En general, la conductividad térmica es una función de la presión y de la temperatura [1].

Introduciendo (5.1) y (5.6) en (5.4) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon \right) = -\text{div} \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + h \right) - \mathbf{v} \cdot \tilde{\sigma}' - \kappa \text{grad } T \right], \quad (5.7)$$

en donde

$$h = \varepsilon + \frac{p}{\rho} \quad (5.8)$$

es la función de calor o entalpía específica. En el miembro derecho de (5.7) se tiene el flujo total de energía en un fluido viscoso. En efecto, el término $\rho \mathbf{v} (v^2/2 + h)$ es el flujo de energía debido a la simple transferencia de masa por efecto del movimiento del fluido; el siguiente término representado por el vector $\sigma'_{ij} v^i$ es un flujo de energía debido a procesos de fricción interna. Finalmente, $\kappa \text{grad } T$ es la transferencia de calor debida a la conducción térmica. En consecuencia (5.7) representa la ley general de la conservación de la energía para cualquier fluido viscoso.

Si se utilizan convenientemente las ecuaciones de Navier-Stokes (4.8), se puede modificar la Ec. (5.7) y demostrar que [4]

$$\rho T \left[\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } s \right] = \sigma'_{ij} \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \text{div}(\kappa \text{grad } T). \quad (5.9)$$

Esta es la ecuación general de transferencia de calor [1], donde s es la entropía específica.

6. CONCLUSIONES

Con el presente trabajo se incorpora la dinámica de los fluidos a los métodos de la mecánica analítica. Inicialmente, y con el auxilio de un principio de acción extremal del tipo Hamilton, se obtienen las ecuaciones diferenciales de campo para cualquier fluido, ya sea real o ideal. Enseguida, se propone una sencilla densidad lagrangiana del tipo $(T - V)$ que sólo contiene términos hidrodinámicos, y que al sustituirla en las ecuaciones de campo conduce directamente a las bien conocidas ecuaciones de movimiento del fluido viscoso; que se reducen a las del fluido perfecto cuando la viscosidad y la conductividad térmica son despreciables. Dentro del marco teórico propuesto, se obtiene la ecuación de balance

de energía generalizada para cualquier fluido sea real o perfecto, sometiendo a la integral de acción a un proceso variacional con respecto al parámetro de evolución y demostrando que la acción para cualquier fluido es invariante frente a transformaciones temporales continuas.

La introducción de la densidad lagrangiana previamente propuesta en la ecuación de balance de energía generalizada, conduce en forma directa a la ley de la conservación de la energía para el fluido real, que nuevamente se reduce a la de balance de energía para el fluido ideal cuando tanto la viscosidad como la conductividad térmica se pueden despreciar.

El marco teórico desarrollado tiene una estructura sencilla y clara y hace uso del mínimo de hipótesis de trabajo. La forma de las ecuaciones diferenciales de campo y las de balance de energía generalizada son idénticas para los fluidos ideal y viscoso, así como las densidades lagrangianas y las correspondientes lagrangianas específicas. La única diferencia reside en la dependencia funcional que tienen esas variables. Así, para el caso ideal, $\ell = \ell(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \rho, t)$ al igual que λ ; y en el caso viscoso, λ o ℓ son funciones de $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, u_{ij}, t)$. En consecuencia, en el primer caso la energía interna específica sólo depende de ρ y para el fluido viscoso, únicamente depende del tensor de deformaciones u_{ij} . Adicionalmente, y con el objeto de tomar en cuenta los procesos de conducción térmica que ocurren en cualquier fluido real, se incorporó un término más [3] al tensor de esfuerzos cuya justificación teórica se sale del marco fenomenológico de la mecánica de medios continuos. Para dar una plena explicación de su forma y contenido es necesario recurrir a la mecánica estadística, en especial a la teoría cinética de los gases [5].

REFERENCIAS

1. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Co. (1959).
2. F. Viniestra, B. Salcido y A. Fierros, "Las ecuaciones de balance de un fluido perfecto a partir de un principio variacional tipo-Hamilton", *Rev. del IMP XVI*, No. 1 (enero, 1984).
3. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, Addison-Wesley Publishing Co. (1959).
4. A. Fierros, "Una formulación lagrangiana de la hidrodinámica clásica", Tesis Doctoral, UNAM (1973).
5. R. Meyer, *Introduction to Mathematical Fluid Dynamics*, Wiley-Interscience (1971).
6. A. Fierros, "Las ecuaciones diferenciales de campo para flujo potencial a partir de un principio variacional tipo Hamilton", *Rev. Mex. Fís.* **38** (1992).