

## Sistemas de referencia en rotación

R.M. MÉNDEZ-MORENO

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Apartado postal 70-543, 04510 México, D.F.*

Y

M. MORENO

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias  
e Instituto de Física  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Apartado postal 20-364, 01000 México, D.F.*

Recibido el 3 de febrero de 1992; aceptado el 24 de marzo de 1992

**RESUMEN.** Se presenta una discusión de la cinemática del movimiento rotacional relativo. Se hace énfasis en el papel central que juega para esta discusión el correcto entendimiento del significado de cambio de un vector. Se deducen las relaciones que conectan la primera y segunda derivadas de un vector fijo en dos sistemas de referencia. Se aplican estas relaciones al caso de un sistema de referencia fijo en la superficie de la Tierra. Se aclara la jerarquía de las aproximaciones utilizadas en este ejemplo y se introduce en este contexto la técnica de aproximaciones sucesivas (teoría de perturbaciones).

**ABSTRACT.** A discussion of the kinematics of the relative rotational motion is presented. The central role of the correct understanding of the change of a vector is emphasized. The relation between the first and second derivatives of a vector in two reference systems is deduced. These relations are applied to a system fixed to the Earth surface. The hierarchy of approximations involved in this example is presented and the method of successive approximations (perturbation theory) is introduced in this context.

PACS: 03.20.+i

### 1. INTRODUCCIÓN

Un problema considerado tradicionalmente como difícil en el estudio de la mecánica clásica es el del movimiento rotacional relativo. Una muestra de que el problema no es enteramente trivial se puede apreciar en que la primera solución satisfactoria de este problema se dio sólo siglo y medio después de que la mecánica fue formulada por Newton. No fue sino hasta 1830 cuando de Coriolis formuló la conexión correcta entre las aceleraciones de una partícula en dos sistemas de referencia que se mueven con una velocidad angular relativa.

Desde entonces a la fecha hay una gran variedad de técnicas, con diversos grados de sofisticación, que se han aplicado para dar una solución satisfactoria a este problema. Sin embargo, es difícil encontrar planteamientos elementales del mismo que señalen y

aprovechen las dificultades del problema para aclarar las sutilezas conceptuales que el movimiento rotacional relativo (MRR) trae a colación [1]. Los textos usuales son al menos confusos, cuando no equivocados [2].

En este trabajo daremos una presentación del MRR que, aunque elemental, resuelve algunas de las dificultades arriba señaladas. Presentamos también el ejemplo que tradicionalmente se utiliza para ilustrar la teoría del MRR, el del movimiento con respecto a un sistema que rota con la Tierra. Creemos que muchas de las presentaciones de este ejercicio dadas en los libros de texto sólo aumentan la confusión al no jerarquizar adecuadamente las aproximaciones que se requieren. En relación con este ejemplo introducimos el método de aproximaciones sucesivas, lo que permite a nuestro juicio entender en un ejemplo interesante varios temas tradicionalmente considerados como escabrosos.

En la presentación hemos adoptado como hipótesis metodológica que el lector conoce los elementos básicos del cálculo vectorial, lo cual es usualmente correcto para un estudiante de primeros semestres de una carrera del área de ciencias exactas. Los autores han probado la utilidad de esta presentación en las clases de mecánica (Física Clásica I y Física Teórica I) que han impartido durante algún tiempo en el segundo [3] y quinto [2] semestres de la carrera de Física de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Por último, es conveniente aclarar que en este trabajo supondremos que el tiempo se comporta clásicamente, *i.e.*, se puede adoptar la convención de que todos los observadores pueden sincronizar sus relojes sin importar su estado de movimiento.

## 2. CAMBIO DE UN VECTOR

Un vector es el ejemplo más sencillo de un objeto geométrico o físico cuyo significado está ligado al concepto de dirección. Es una cantidad (física o geométrica) que está definida por una magnitud y una dirección. Ahora bien, la noción de dirección carece de significado absoluto y siempre hay que definirla con respecto a un conjunto de direcciones previamente escogidas como referencia. Estas, por lo tanto, forman parte integral de la definición de sistema de referencia.

Cuando queremos estudiar la evolución de un vector es cómodo escoger las direcciones de referencia como fijas, *i.e.*, estas direcciones no dependerán del parámetro que determine la evolución (el tiempo). Es esto lo que le da significado al concepto de que el vector cambia de dirección respecto a tal o cual sistema de referencia. Supondremos en lo que sigue la hipótesis galileana para la transformación del tiempo entre dos sistemas de referencia, *i.e.*, que los dos referenciales pueden siempre escoger el mismo parámetro,  $t$ , para definir la evolución de su sistema.

Cuando hablamos de que un sistema de referencia gira en torno a otro, lo que implicamos es que el conjunto de direcciones que definen un referencial cambia en el tiempo con respecto al otro. La velocidad de los vectores base de uno de los sistemas de referencia respecto del otro está dada por

$$\frac{di'}{dt} = \omega \times i', \quad \frac{dj'}{dt} = \omega \times j', \quad \frac{dk'}{dt} = \omega \times k'; \quad (1)$$

donde  $\omega$  es la velocidad angular del conjunto de vectores  $\{i', j', k'\}$  con respecto al conjunto de vectores  $\{i, j, k\}$ , i.e., del sistema de referencia  $\mathcal{O}'$  respecto al referencial  $\mathcal{O}$ . De aquí se sigue inmediatamente que si  $\mathbf{A}$  es un vector *arbitrario*,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)' + \omega \times \mathbf{A} \quad (2)$$

(como es común indicamos las derivadas con respecto al sistema de referencia  $\mathcal{O}'$  encerrándolas entre paréntesis y acentuando ('primando'),  $(d\mathbf{A}/dt)'$ ). Este, que es un resultado muy conocido, es fuente continua de confusiones, pues no se destaca como es debido el hecho de que  $\mathbf{A}$  es cualquier vector. Repasemos la derivación de la relación básica (2). La relación de partida consiste en expresar el vector  $\mathbf{A}$  en las dos bases:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \\ &= A_{x'} \mathbf{i}' + A_{y'} \mathbf{j}' + A_{z'} \mathbf{k}'. \end{aligned} \quad (3)$$

Estas igualdades dan sentido preciso a la frase de que  $\mathbf{A}$  es un vector arbitrario que es *el mismo vector* en los dos sistemas de referencia. Aunque las proyecciones a lo largo de los ejes de cada sistema, o sea sus componentes, sean distintas, la condición es que son las proyecciones del mismo vector (véase la Fig. 1). Si ahora tomamos la derivada de  $\mathbf{A}$  respecto al tiempo en el sistema  $\mathcal{O}$ , tomando los vectores  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  como fijos, tendremos

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \frac{dA_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt} \mathbf{k} + A_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + A_y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + A_z \frac{d\mathbf{k}}{dt} \\ &= \frac{dA_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt} \mathbf{k} \\ &= \frac{dA_{x'}}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dA_{y'}}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dA_{z'}}{dt} \mathbf{k}' + A_{x'} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + A_{y'} \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + A_{z'} \frac{d\mathbf{k}'}{dt}, \end{aligned} \quad (4)$$

ya que  $d\mathbf{i}/dt = d\mathbf{j}/dt = d\mathbf{k}/dt = 0$ . Ahora bien, como

$$\left(\frac{d\mathbf{i}'}{dt}\right)' = \left(\frac{d\mathbf{j}'}{dt}\right)' = \left(\frac{d\mathbf{k}'}{dt}\right)' = 0,$$

podemos identificar

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)' = \frac{dA_{x'}}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dA_{y'}}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dA_{z'}}{dt} \mathbf{k}', \quad (5)$$

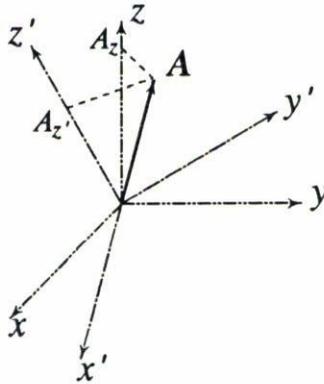


FIGURA 1. Sistemas de referencia con movimiento rotacional relativo. **A** es un vector arbitrario.  $A_z$  y  $A_{z'}$  son las proyecciones del vector en las direcciones  $z$  y  $z'$ , respectivamente. En la figura se observan también las proyecciones del vector en los planos  $x-y$  y  $x'-y'$ .

y como a partir de (1) y (3) los últimos tres términos de la Ec. (4) son  $\omega \times \mathbf{A}$ , la Ec. (2) queda demostrada.

Es importante reconocer que como consecuencia de la relación fundamental (2), las derivadas de un vector respecto a uno y otro sistemas de referencia *no* son el mismo vector,  $d\mathbf{A}/dt \neq (d\mathbf{A}/dt)'$ . Tomando la segunda derivada

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left( \left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)' + \omega \times \mathbf{A} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)' \right) + \frac{d}{dt}(\omega \times \mathbf{A}), \end{aligned} \tag{6}$$

y usando (2) para el primer término,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} &= \left( \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} \right)' + \omega \times \left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)' \\ &\quad + \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{A} + \omega \times \frac{d\mathbf{A}}{dt}. \end{aligned} \tag{7}$$

Sustituyendo (2) en el último término, finalmente obtenemos la relación entre las segundas derivadas de un vector arbitrario **A**:

$$\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} = \left( \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} \right)' + 2\omega \times \left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)' + \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{A} + \omega \times (\omega \times \mathbf{A}). \tag{8}$$

Los tres últimos términos en esta ecuación se identifican como de de Coriolis, de Euler y el centrípeto, respectivamente.

Si para el vector arbitrario  $\mathbf{A}$  usamos el caso específico en que  $\mathbf{A} = \mathbf{r}$ , o sea estudiamos el cambio temporal del vector de posición de una partícula, se tendrá que las relaciones generales antes obtenidas se reducen a

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \tag{9}$$

con

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \tag{10}$$

$$\mathbf{v}' = \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)', \tag{11}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \tag{12}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \tag{13}$$

y

$$\mathbf{a}' = \left( \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right)'. \tag{14}$$

### 3. MOVIMIENTO ANGULAR UNIFORME RELATIVO

#### 3.1 Introducción

En el estudio del MRR hay un caso especial que ocurre con frecuencia, es aquél en el que la velocidad angular no varía en el tiempo, por lo que la aceleración de Euler se cancela exactamente. Si en uno de los dos sistemas que estudiamos, digamos el  $\mathcal{O}$ , la aceleración tiene una expresión sencilla —por ejemplo se anula o es constante— será conveniente referir la aceleración del sistema  $\mathcal{O}'$  en términos de dicha aceleración. Así tendremos

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \tag{15}$$

Los últimos dos términos en esta expresión son la aceleración de de Coriolis y la aceleración centrífuga.

#### 3.2 El ejemplo de la Tierra

Consideremos a continuación la descripción de la cinemática de una partícula hecha por un observador fijo a la superficie de la Tierra con respecto a aquélla que haría un observador

que tuviese su sistema de ejes fijo con respecto a las estrellas y su origen en el centro de la Tierra. Entre los dos observadores se cumple la relación

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R}'_0, \tag{16}$$

donde  $\mathbf{r}$  mide la posición de la partícula desde el centro de la Tierra,  $\mathbf{R}'_0$  es la posición del observador en la superficie de la Tierra con respecto al centro de la misma y  $\mathbf{r}'$  es la posición de la partícula respecto a la superficie. Por lo tanto, los dos sistemas de referencia están desplazados uno respecto a otro. Notamos que respecto al sistema fijo a la Tierra el punto sobre la superficie de la Tierra permanece fijo, por lo que las velocidades y aceleraciones relativas entre estos dos orígenes son nulas, como se verá a continuación.

Como la posición del centro de la Tierra no varía en el tiempo en el sistema de referencia del observador en la superficie, tenemos que

$$\left(\frac{d\mathbf{R}'_0}{dt}\right)' = 0; \tag{17}$$

y como la Tierra gira con respecto a las estrellas con velocidad angular  $\boldsymbol{\Omega}$ , la relación entre velocidades en los dos sistemas de referencia estará dada por

$$\mathbf{V}_0 = \frac{d\mathbf{R}'_0}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}'_0 \tag{18}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{V}_0 \\ &= \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}. \end{aligned} \tag{19}$$

Para las aceleraciones se tiene que

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}' + \mathbf{R}'_0)]. \tag{20}$$

Ya que en el caso de la Tierra  $\boldsymbol{\Omega}$  es en magnífica aproximación constante, tomaremos

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = 0, \tag{21}$$

por lo que la aceleración de Euler se anula.

Observamos también que la aceleración centrífuga se puede separar de manera natural en un término grande,  $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}'_0)$ , más una corrección  $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')$ , que será despreciable al orden  $r'/R_0$ . En la Fig. 2 se muestra la aceleración centrífuga en un punto del hemisferio Norte con latitud  $\lambda$ .

Es conveniente ahora introducir una aceleración gravitacional efectiva,  $\mathbf{g}_{\text{ef}}$ , que toma en cuenta una parte importante de los efectos de rotación de la Tierra,

$$\mathbf{g}_{\text{ef}} = \mathbf{g} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}'_0). \tag{22}$$

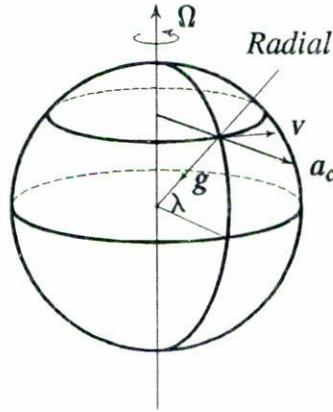


FIGURA 2. Velocidades y aceleración centrífuga de un punto sobre la superficie de la Tierra con latitud  $\lambda$ .  $\mathbf{a}_c$  es aquí la aceleración centrífuga,  $\mathbf{v}$  es la velocidad tangencial y  $\Omega$  es la velocidad angular de rotación de la Tierra.

Como tanto la dirección de  $\mathbf{g}$  como la de  $\mathbf{R}'_0$  son fijas en el sistema fijo a la superficie de la Tierra, se sigue que  $\mathbf{g}_{ef}$  también estará fijo en este sistema. Como el término de Coriolis se cancela para  $\mathbf{v}' = 0$ , podemos concluir que las direcciones vertical y horizontal(es) están localmente definidas por la dirección  $\mathbf{g}_{ef}$ .

Si se desea hacer la aproximación adicional de un planeta esférico y de densidad uniforme, se tendrá que  $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{r}}$ , con  $\hat{\mathbf{r}}$  el vector unitario radial usual de coordenadas esféricas. En la aproximación esférica es fácil demostrar que la dirección de  $\mathbf{g}_{ef}$  y por lo tanto la dirección de la plomada difiere de la radial (ésta viene mientras que aquélla va al centro de la Tierra) en un ángulo  $\delta$  tal que

$$\tan \delta = \frac{(\cos \lambda \operatorname{sen} \lambda)\Omega^2 R_0}{g - \Omega^2 R_0 \cos^2 \lambda}, \quad (23)$$

como se puede apreciar en la Fig. 3, en donde se graficó el plano que contiene la vertical y la dirección Norte-Sur; al igual que en la Fig. 2 se consideró un punto de latitud  $\lambda$  en el hemisferio Norte. El numerador de la Ec. (23) es la proyección de la aceleración centrífuga en la dirección Sur, mientras que en el denominador el término negativo es la proyección de la aceleración centrífuga en la dirección del centro de la Tierra.

En el caso de la Tierra,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ,  $R_0 = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$  y  $\Omega = 7.292 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ , notando que  $a_{c \text{ max}} = \Omega^2 R_0 = 3.34 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$ , se puede despreciar el término centrífugo en la aceleración de la gravedad, lo que produce un error que está acotado por un factor de  $a_{c \text{ max}}/g \approx 1/300$ . Por lo que despreciar la componente vertical del término centrífugo en el cálculo de  $\delta$  está justificado a este orden. De la Ec. (23)

$$\delta \approx 0.5 \operatorname{sen}(2\lambda)\Omega^2 R_0/g, \quad (24)$$

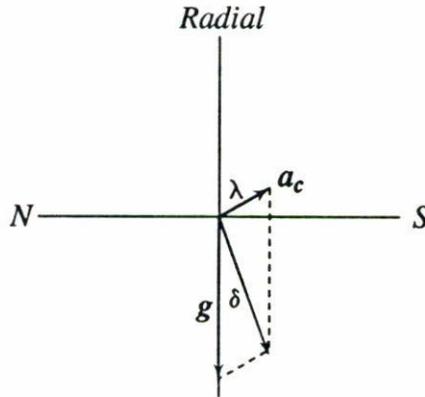


FIGURA 3. Desviación de la vertical debida al término centrífugo.

que es máximo a latitudes de 45° Norte o Sur. Con esta misma precisión tendremos que la magnitud de la aceleración efectiva de la gravedad será

$$g_{ef} = g - \Omega^2 R_0 \cos^2 \lambda, \tag{25}$$

que corresponde a una desviación pequeña pero medible de la aceleración de la caída libre de los cuerpos, la cual disminuye al ir de los polos al ecuador.

Pasemos ahora a estudiar los efectos de la aceleración de de Coriolis. La Ec. (20) nos dice que

$$\mathbf{a}' = \mathbf{g}_{ef} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'). \tag{26}$$

Como para la Tierra  $\Omega = 7.272 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  y  $\Omega^2 = 5.288 \times 10^{-9} \text{ s}^{-2}$ , se tendrá que aun para velocidades moderadas del orden de 0.1 m/s y desplazamientos relativamente grandes de hasta cientos de metros, la aceleración de de Coriolis dominará al remanente del término centífugo; este último será despreciado en la discusión subsecuente.

Consideraremos ahora el caso donde  $\mathbf{g}_{ef} = \mathbf{c}$  es constante. La Ec. (26) toma la forma

$$\left( \frac{d\mathbf{v}'}{dt} \right)' = \mathbf{c} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'. \tag{27}$$

Como  $\mathbf{c}$  y  $\boldsymbol{\Omega}$  son constantes, esta ecuación se puede integrar fácilmente; el resultado es

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{v}'_0 + \mathbf{c}(t - t_0) - 2\boldsymbol{\Omega} \times \int_{t_0}^t \mathbf{v}'(\tau) d\tau, \tag{28}$$

donde  $\mathbf{v}'_0 = \mathbf{v}'(t_0)$  y  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$  son la velocidad y la posición iniciales. Ahora bien, la integral que está pendiente da

$$\int_{t_0}^t \mathbf{v}' d\tau = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0, \tag{29}$$

que no es otra cosa que el desplazamiento total del objeto considerado. Pero esta solución no es muy útil en tanto que en el miembro izquierdo de la ecuación aún tenemos a  $\mathbf{v}'$  explícitamente.

Es conveniente en consecuencia adoptar una estrategia distinta para resolver la Ec. (28). Para esto observamos que el integrando en dicha ecuación aparece a su vez "despejado" en su lado izquierdo. Esto sugiere *iterar* la "solución" sustituyendo formalmente  $\mathbf{v}'$  "despejada" en el integrando; explícitamente,

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{v}'_0 + \mathbf{c}(t - t_0) - 2\boldsymbol{\Omega} \times \int_{t_0}^t d\tau \left[ \mathbf{v}'_0 + \mathbf{c}(\tau - t_0) - 2\boldsymbol{\Omega} \times \int_{t_0}^{\tau} \mathbf{v}'(\tau') d\tau' \right]. \quad (30)$$

Podemos hacer todas las integrales excepto la última y obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(t) &= \mathbf{v}'_0 + \mathbf{c}(t - t_0) \\ &\quad - 2\boldsymbol{\Omega} \times \left[ \mathbf{v}'_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{c}(t - t_0)^2 - 2\boldsymbol{\Omega} \times \int_{t_0}^t d\tau \left( \int_{t_0}^{\tau} \mathbf{v}'(\tau') d\tau' \right) \right] \\ &= [1 - 2(t - t_0)\boldsymbol{\Omega} \times] \mathbf{v}'_0 \\ &\quad + \left[ (t - t_0) - (t - t_0)^2 \boldsymbol{\Omega} \times \right] \mathbf{c} + 4\boldsymbol{\Omega} \times \left( \boldsymbol{\Omega} \times \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} \mathbf{v}'(\tau') d\tau d\tau' \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Estará justificado despreciar el término de la doble integral siempre y cuando éste sea más pequeño que el correspondiente al de la integral simple con que comenzamos la iteración. En caso contrario podemos, en principio, llevar adelante la iteración esperando que la serie generada converja. Si esto no sucede el procedimiento iterativo carece de sentido. Es interesante que en una gran variedad de casos especiales del ejemplo que estudiamos la serie converge rápidamente. La razón es que la velocidad angular de la Tierra da un parámetro numéricamente pequeño si las escalas de longitud y tiempo del problema son del orden de metros y segundos.

La expresión recién encontrada se deja integrar fácilmente si podemos despreciar el término de la integral. Claramente,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + \left[ (t - t_0) - (t - t_0)^2 \boldsymbol{\Omega} \times \right] \mathbf{v}'_0 \\ &\quad + \left[ \frac{1}{2}(t - t_0)^2 - \frac{1}{3}(t - t_0)^3 \boldsymbol{\Omega} \times \right] \mathbf{c} + \mathcal{O}(\Omega^2). \end{aligned} \quad (32)$$

Veamos algunos casos especiales de interés.

### 3.3. Desviación de la vertical en caída libre

Calculemos ahora la desviación debida a la aceleración de de Coriolis cuando un cuerpo se deja caer desde una altura  $h$ . Este problema particular fue resuelto por Laplace en

1803 incluyendo un efecto de la fricción del aire [4]. Tenemos directamente de la Ec. (32) que en este caso la velocidad inicial es cero y la aceleración efectiva es simplemente la aceleración efectiva de la gravedad,  $\mathbf{g}_{ef}$ , por lo que

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 = \left[ \frac{1}{2}(t - t_0)^2 - \frac{1}{3}(t - t_0)^3 \boldsymbol{\Omega} \times \right] \mathbf{g}_{ef}. \quad (33)$$

Sólo hace falta calcular el tiempo de caída en términos de la altura desde la que cae el objeto. Descomponiendo el desplazamiento en dirección vertical, paralela a  $\mathbf{g}_{ef}$ , y horizontal, tendremos que este tiempo es el mismo de la caída libre usual, *i.e.*,  $(t - t_0) = (2h/g_{ef})^{1/2}$ . Usando la aproximación de Tierra esférica,

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega(\hat{\mathbf{r}} \sin \lambda + \hat{\mathbf{n}} \cos \lambda), \quad (34)$$

con  $\hat{\mathbf{n}}$  un vector perpendicular a  $\mathbf{r}$  que apunta hacia el Norte. Despreciando la corrección en la dirección de la vertical respecto a la radial por ser de segundo orden en  $\Omega$ , concluimos que el objeto sufrirá una desviación hacia el Este de magnitud

$$\frac{2h}{3} \Omega \sqrt{\left(\frac{2h}{g_{ef}}\right)} \cos \lambda. \quad (35)$$

La cantidad adimensional  $\Omega \sqrt{2h/g_{ef}}$ , que es hasta un factor  $2\pi$  el cociente del tiempo de caída al periodo de revolución de la Tierra, es el parámetro relevante de este problema, pues nos da inmediatamente el tamaño relativo de la desviación respecto a la altura desde la que cae el cuerpo. En este sentido restringido por un análisis cualitativo confirmamos la magnitud del resultado.

#### 3.4. Desviación de la vertical al lanzar un cuerpo hacia arriba

¿Cómo se modifica el resultado anterior si lanzamos hacia arriba el objeto de forma que suba a una altura  $h$ ?

En este caso el tiempo de vuelo es el doble que el del ejercicio previo, esto es  $2(2h/g_{ef})^{1/2}$ . Por otra parte, la velocidad de salida es  $v_0 = (2g_{ef}h)^{1/2}$ . Los términos de la Ec. (32) que contribuyen a desviar al objeto de la vertical son

$$-(t - t_0)^2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'_0 - \frac{1}{3}(t - t_0)^3 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{c} = -(t - t_0)^2 \boldsymbol{\Omega} \times \left[ \mathbf{v}'_0 + \frac{1}{3}(t - t_0)\mathbf{c} \right]; \quad (36)$$

la dirección del desplazamiento horizontal depende de la dirección y sentido del vector  $\mathbf{v}'_0 + \frac{1}{3}(t - t_0)\mathbf{c}$ . Ahora  $\mathbf{v}'_0$  y  $\mathbf{c}$  son antiparalelos, el primero apunta hacia arriba mientras que el otro lo hace hacia abajo. Sustituyendo el tiempo de vuelo obtenemos  $v_0 - \frac{2}{3}g_{ef}\sqrt{2h/g_{ef}} = \frac{1}{3}v_0$ , por lo que concluimos que el desplazamiento será en este caso *hacia el Oeste*. La magnitud del desplazamiento es cuatro veces la del problema anterior.

#### 4. DISCUSIÓN

En esta presentación del problema del MRR se destaca la relación entre las primeras y segundas derivadas de un vector arbitrario en los dos sistemas de referencia. Se ha hecho énfasis en que partiendo de un mismo vector arbitrario se obtiene la relación fundamental dada en la Ec. (2). El punto esencial de que el vector aquí considerado es *el mismo* en los dos sistemas de referencia no se recalca en las presentaciones usuales.

Hemos también hallado una relación, la Ec. (28), que aunque elemental y directa no hemos encontrado en la literatura. Consideramos que el uso y deducción de esta relación en el estudio del MRR aclara un conjunto de ambigüedades en el estudio cuidadoso de este problema. En particular, la consistencia de las aproximaciones hechas en la aplicación de la relación de de Coriolis a las aceleraciones y fuerzas cerca de la superficie de la Tierra. Finalmente, hemos usado en este contexto el método de aproximaciones sucesivas para resolver la Ec. (28).

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Sr. Alejandro Aguilar Sierra por permitirles el uso del programa *Metagraphics* [5] con el que se realizaron los dibujos finales de este trabajo; expresamos nuestro reconocimiento también al Dr. Luis de la Peña y al Sr. Aguilar por la asesoría en el uso de este programa. Este trabajo fue apoyado parcialmente por la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), proyecto IN102991 y por el Programa Universitario de Superconductividad de Alta Temperatura Crítica, UNAM.

#### REFERENCIAS

1. A.P. French, J.M. Potgieter, Jean Sivadière, *Am. J. Phys.* **57** (1989) 947.
2. W. Hauser, *Introduction to the Principles of Mechanics*, Addison-Wesley, New York (1965).
3. M. Alonso y E. Finn, *Fundamental University Physics*, Vol. I, Mechanics, Addison-Wesley, Massachusetts (1968). Esta referencia y la anterior son textos típicos para los niveles respectivos.
4. P.S. Laplace, *Traité de Mécanique Celeste*, Courcier, Paris (1805). Vol. IV, pp. 294-305; traducción al inglés con comentarios de Nathaniel Bowditch, Chelsea, New York (1966) pp. 497-503.
5. A. Aguilar Sierra, *Metagraphics*, Centro de Estudios de la Atmósfera, Universidad Nacional Autónoma de México (1991).