 Revista Mexicana de Física **38**, *No. 4 (1992) 643–663*

Teoría de fenómenos críticos y transiciones de fase desde un punto de vista riguroso*

José L. Soria
Centro de Graduados e Investigación del Instituto Tecnológico de Tijuana
Apartado postal 1166, 22000 Tijuana, B.C. México
y
Department of Chemistry 0340, University of California San Diego
*La Jolla, CA 92093 USA***

Recibido el 9 de octubre de 1991; aceptado el 19 de mayo de 1992

Resumen. En este artículo introducimos algunos de los conceptos, técnicas, resultados y problemas más relevantes que se han estado presentando en los últimos años en las teorías rigurosas de los fenómenos críticos y de transiciones de fase. En particular en las secciones 6, 7 y 8 presentamos las desigualdades de correlación como una de las técnicas más importantes para estudios no-perturbativos en mecánica estadística y teoría cuántica de campos. En la última sección terminamos con una breve introducción a las teorías más recientes de superficies aleatorias.

Abstract. In this paper we introduce some of the most relevant concepts, techniques, results and problems that have been presented in recent years in the rigurous theories of critical phenomena and phase transition. In particular in Sects. 6, 7 and 8 we present correlation inequalities as one of the most important technique in non-perturbative studies of statistical mechanics and quantum field theories. In the last section we finished this work with a brief introduction to the most recent theories of random surfaces.

PACS: 64.10.+h

1. Transiciones de fase y fenómenos críticos

Las transiciones de fase son fenómenos que podemos experimentar en una gran cantidad de situaciones de nuestra vida cotidiana. Por ejemplo, la evaporación de un líquido o la condensación de un gas, el orden espontáneo de espín de electrones en un ferromagneto y en transiciones más sofisticadas como las asociadas con superfluidos, superconductividad o confinamiento de quarks. Un hecho interesante es que esos fenómenos exhiben similaridades profundas, tanto cualitativas como cuantitativas, en una cierta región del espacio de parámetros (llamada región crítica) [1,7,8].

Un problema de interés en mecánica estadística de equilibrio es explicar las transiciones de fase en términos de distribuciones de probabilidad sobre el espacio de configuración. Esas distribuciones de probabilidad describen el comportamiento microscópico de sistemas

---

*Apoyo parcial para la realización de este trabajo provino de CONACYT, contrato 0170-E9107. Parte de este manuscrito fue extraido de las notas del curso-taller de Físico-Matemáticas presentado por el autor en el Centro de Graduados e Investigación del ITT en agosto de 1991 [1].
**Correo electrónico: soria@newton.ucsd.edu.

físicos. Los modelos en el enrejado son los modelos más simples inventados para estudiar el fenómeno de transiciones de fase.

Considere un sistema de espines clásicos, es decir, $\varphi_x = (\varphi_{1x}, \ldots, \varphi_{Nx}) \in \mathbf{R}^N$, donde $x \in \mathbf{Z}^d$ y cada espín φ_x tiene una medida de distribución *a priori* $d\nu_x(\varphi_x)$. Sea H_Λ el hamiltoniano clásico restringido a un subconjunto finito Λ del enrejado $\mathbf{Z}^d$. De acuerdo a las leyes fundamentales de la mecánica estadística, el sistema en el ensamble canónico, está caracterizado por la medida de probabilidad

$$d\mu(\varphi) = \lim_{\Lambda \nearrow \mathbf{Z}^d} Z_\Lambda^{-1} e^{-\beta H_\Lambda(\varphi)} \prod_{x \in \Lambda} d\nu_x(\varphi_x), \tag{1.1}$$

donde β es proporcional al inverso de la temperatura y Z_Λ es la constante de normalización conocida como *función de partición* dada por

$$Z_\Lambda = \int e^{-\beta H_\Lambda(\varphi)} \prod_{x \in \Lambda} d\nu_x(\varphi_x). \tag{1.2}$$

Las propiedades de esos sistemas pueden ser derivadas de las funciones de correlación

$$\langle \varphi_{x_1} \cdots \varphi_{x_n} \rangle_\Lambda = \int \prod_{j=1}^{n} \varphi_{x_j} \, d\mu_\Lambda(\varphi), \tag{1.3}$$

y su límite de volumen infinito ($\Lambda \nearrow \mathbf{Z}^d$) [2,5]. Algunas cantidades de interés son:

1) La longitud de correlación inversa (masa)

$$m = \lim_{|x| \to \infty} -\frac{1}{|x|} \log \langle \varphi_0; \varphi_x \rangle, \tag{1.4}$$

donde $\langle A; B \rangle = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$.

2) La susceptibilidad

$$\chi = \sum_x \langle \varphi_0; \varphi_x \rangle, \tag{1.5}$$

3) La función de cuatro puntos y el acoplamiento adimensional de cuatro puntos. Si $\langle \varphi_x \rangle = 0$ definimos

$$u_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle \varphi_{x_1} \cdots \varphi_{x_4} \rangle - \sum_\pi \left\langle \varphi x_{\pi(1)} \varphi x_{\pi(2)} \right\rangle \left\langle \varphi x_{\pi(3)} \varphi x_{\pi(4)} \right\rangle, \tag{1.6}$$

donde π representa las diferentes permutaciones del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ y

$$\lambda_r = -\bar{u}_4 \chi^{-2} m^d, \tag{1.7}$$

donde $\bar{u}_4 = \sum_{x_2, x_3, x_4} u_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

El más simple de los modelos en el enrejado es el modelo de Ising, el cual data desde 1925. Este es un modelo de mecánica estadística que trata de representar en forma simplificada la interacción de espín (cuántico) de electrones en un ferromagneto. En cada sitio i de un enrejado d-dimensional se ha asignado una variable σ_i (llamada espín) tomando los valores $+1$ (espín hacia arriba) y -1 (espín hacia abajo). A cada uno de los dos posibles valores de espín σ_i se da un igual peso *a priori*, independiente de cada sitio. Sin embargo los espines tienen una energía de interacción

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle \text{ n.n.}} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i, \tag{1.8}$$

donde $\langle ij \rangle$ n.n. denota que la suma se extiende sobre todos los vecinos próximos de pares de sitios [3,10], J representa la fuerza de acoplamiento de los vecinos próximos y h es el campo magnático externo aplicado. Se sigue, de acuerdo a los principios de la mecánica estadística clásica en el ensamble canónico, que el sistema está caracterizado por la medida de probabilidad en equilibrio

$$d\mu(\{\sigma\}) = Z^{-1} e^{-H(\{\sigma\})} d\mu_0(\{\sigma\}). \tag{1.9}$$

Nuestro objetivo es estudiar las propiedades matemáticas de modelos específicos de la mecánica estadística, donde μ_0 es la medida *a priori*, y en el caso del modelo de Ising es

$$d\mu_0(\{\sigma\}) = \prod_i \delta(\sigma_i^2 - 1) d\sigma_i \tag{1.10}$$

y

$$Z = \int e^{-H(\{\sigma\})} \, d\mu_0(\{\sigma\}) \tag{1.11}$$

es la función de partición. Es claro de la Ec. (1.8) que si $J > 0$, entonces las configuraciones con vecinos próximos alineados en la misma dirección tendrán más baja energía, y de aquí mayor peso en la distribución de probabilidad (1.9). Por esta razón $J > 0$ es llamado el caso ferromagnético.

De hecho las Ecs. (1.8)-(1.11) tienen sentido sólo para colecciones finitas de espines σ_i, para un sistema infinito, la suma (1.8) es casi seguramente divergente. Este no es un argumento meramente técnico, de hecho esto está íntimamente asociado con el fenómeno físico de transiciones de fase. La idea principal es usar las Ecs. (1.8)-(1.11) para un subconjunto finito de los espines, llamémoslo Λ, para dar una medida μ_Λ y una función de partición Z_Λ. Posteriormente dejamos que Λ crezca para llenar el enrejado completo. Se espera en algunos modelos la convergencia de

$$\mu = \lim_{\Lambda \to \infty} \mu_\Lambda \tag{1.12}$$

y

$$F = - \lim_{\Lambda \to \infty} \frac{1}{|\Lambda|} \log Z_\Lambda; \tag{1.13}$$

μ es llamado el estado de equilibrio de volumen infinito (o estado de Gibbs) y F es llamada la energía (por sitio) libre de volumen infinito. Los procedimientos anteriores no son únicos, μ_Λ y Z_Λ dependen sobre la selección de las condiciones de frontera, es decir sobre la forma en que uno selecciona los espines σ_i para los sitios i, los cuales son adyacentes pero no contenidos en Λ.

Resulta ser que el volumen infinito de la energía libre F es independiente de las condiciones de frontera, pero el estado de equilibrio de volumen infinito μ puede ser altamente dependiente de ellas; esta falta de unicidad de μ es, de hecho, una definición de transiciones de fase [11].

2. Generalizaciones al modelo de Ising

El modelo de Ising ferromagnético de vecinos próximos introducido anteriormente es el prototipo para todos los modelos que estudiaremos en este trabajo.

Ahora introduciremos diferentes tipos de generalizaciones a este modelo.

1) La interacción de vecinos próximos (1.8) puede ser reemplazada por una interacción general de interacción por pares:

$$H = -\sum_{\langle ij\rangle} J_{ij}\sigma_i\sigma_j - h\sum_i \sigma_i. \tag{2.1}$$

Aquí $\langle ij\rangle$ denota pares de sitios, con cada par contado una vez en la suma. Algunas veces es conveniente reescribir la Ec. (2.1) como

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} J_{ij}\sigma_i\sigma_j - h\sum_i \sigma_i, \tag{2.2}$$

donde $J_{ij} = J_{ji}$, $J_{ii} = 0$, y el factor $\frac{1}{2}$ se da porque cada par $\langle ij\rangle$ $(i \neq j)$ es contado dos veces en la suma.

Usualmente J_{ij} es invariante translacional, es decir, es una función sólo de $i-j$. La interacción es llamada ferromagnética si $J_{ij} \geq 0$, $\forall i \neq j$. Es llamada de rango finito si existe un número R tal que $J_{ij} = 0$ siempre que $|i-j| > R$; de corto rango si J_{ij} decae suficientemente rápido como $|i-j| \to \infty$ (qué tan rápido dependerá del contexto, pero más rápido que cualquier potencia inversa de $|i-j|$ es usualmente más que suficiente); y de otra manera sería de largo rango.

2) Permitimos a los espines variar sobre todos los valores reales. En este caso la medida *a priori* (1.3) es reemplazada por

$$d\mu_0(\{\sigma\}) = \prod d\nu(\sigma_i), \tag{2.2}$$

donde ν es la medida de probabilidad sobre la línea real, llamada medida *a priori* de espín simple. En el futuro usaremos φ_i para denotar un espín general valuado en los reales y reservaremos σ_i para el caso $|\sigma_i| = 1$. Claramente ν tiene que satisfacer

$$\int \exp(a\varphi^2)\, d\nu(\varphi) < \infty \tag{2.3}$$

para al menos una $a > 0$, así que (1.9) y (1.11) sean bien definidos. Un caso muy común es

$$d\nu(\varphi) = e^{-P(\varphi)}\, d\varphi, \tag{2.4}$$

donde P es un polinomio semi-acotado de grado ≥ 2; éste es llamado el modelo $P(\varphi)$ del enrejado.

Un caso especialmente importante es el modelo φ^4,

$$P(\varphi) = a\varphi^4 + b\varphi^2 + c \qquad (a > 0). \tag{2.5}$$

Si $a \to \infty$ con $b = -2a$, con la medida se aproxima a la medida del modelo de Ising. Así el modelo de Ising es un límite de acoplamiento infinito de modelos de φ^4. El otro extremo es el límite de acoplamiento cero o modelo gaussiano:

$$P(\varphi) = b\varphi^2 + c \qquad (b > 0); \tag{2.6}$$

este modelo es exactamente soluble.

3) Otra generalización es reemplazar un espín de una componente por espines de N–componentes, es decir, los espines son ahora vectores φ_i tomando valores en $\mathbf{R}^N$. Nosotros escribiremos las componentes como $\varphi_i^{(\alpha)}$ con $\alpha = 1, 2, \ldots, N$. El hamiltoniano es

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} J_{ij}^{(\alpha)} \varphi_i^{(\alpha)} \varphi_j^{(\alpha)} - \sum_{i,\alpha} h^{(\alpha)} \varphi_i^{(\alpha)}. \tag{2.7}$$

Si $J_{ij}^{(\alpha)} = J_{ij}$, independiente de α, la interacción es llamada isótropa y el hamiltoniano llega a ser

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} J_{ij}\varphi_i \cdot \varphi j - \sum_{i} \mathbf{h} \cdot \varphi_i. \tag{2.8}$$

La medida simple de espín $d\nu(\varphi)$ es usualmente tomada a ser invariante rotacional. Si $d\nu(\varphi)$ es la medida uniforme sobre la esfera unitaria $|\varphi| = 1$, el modelo es llamado el modelo N-vectorial. Para $N = 1$ éste es obviamente el modelo de Ising; para $N = 2$ es llamado el rotator plano (o el modelo clásico XY) y para $N = 3$ el modelo de Heisenberg.

El modelo de N–componentes φ^4 es el caso especial

$$d\nu(\varphi) = a(\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi})^2 + b(\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi}) + c \qquad (a > 0). \tag{2.9}$$

3. Mecánica estadística y teoría de campos euclideanos

La equivalencia de mecánica estadística y la teoría cuántica de campos no es una idea nueva. La conexión entre estas dos ramas ha sido desarrollada a través de varias similaridades:

1) La similaridad entre la fórmula de Gell Man-Low

$$\tau(x_1,\dots,x_n) = \frac{\langle 0|T[\exp\{i\int H(x)d^4x\}\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)]|0\rangle}{\langle 0|T[\exp\{i\int H(x)\,d^4x\}]|0\rangle} \tag{3.1}$$

y la fórmula para la función de correlaciones en sistemas en el enrejado (1.3).

Fue Symanzik quien notó que transladándose a la región euclideana, uno puede conseguir un modelo de mecánica estadística clásica. Pocos años despues fue probado que este programa era sólido [4,12].

2) Similaridades al nivel de analogías:

i) Analogías a nivel de ideas, por ejemplo: transiciones de fase y rompimiento espontáneo de simetría en mecánica estadística tiene su análogo en teoría cuántica de campos.

ii) Analogías a nivel de técnicas matemáticas, por ejemplo: desigualdades de correlación y expansiones de altas temperaturas son herramientas estándar, prestadas de la mecánica estadística para usarlas en teorías de campos cuánticos.

3) La similaridad que envuelve las relaciones entre modelos de Ising ferromagnéticos y modelos lagrangianos bosónicos de teorías de campos.

i) La idea de aproximar sistemas de mecánica estadística con teorías de campos fue basada sobre los trabajos de Ginzburg-Landau, los métodos de funciones de Green por Gorkov y Martin-Schwinger y los métodos del grupo de renormalización por Wilson.

ii) Por otro lado la dirección de la teoría de modelos de Ising a la teoría de campos fue desarrollada sobre bases rigurosas por Guerra, Rosen y Simon [12].

Note que en esta última similaridad, si uno reemplaza en todas las fórmulas de los sistemas de espines clásicos del enrejado:

$$\mathbf{Z}^d \to \mathbf{R}^d, \qquad \sum_{x\in\mathbf{Z}^d}(\cdot) \to \int_{\mathbf{R}^d} d^dx(\cdot),$$

etc., uno obtiene las fórmulas básicas heurísticas de teoría cuántica de campos [5]. En vez de espines uno habla de campos euclideanos φ_x, y la función hamiltoniana H es ahora llamada acción (euclideana) $\mathcal{A}$. La funcional de vacío euclideana está dada por la medida de probabilidad

$$d\mu_\Lambda(\varphi) = Z_\Lambda^{-1} e^{-\mathcal{A}(\varphi)} \prod_{x\in\mathbf{R}^d} \mathcal{D}\varphi_x$$

y las propiedades están codificadas en las llamadas funciones de Green euclideanas (o funciones de Schwinger)

$$S_\Lambda(x_1, \ldots, x_n) = \int \prod_{i=1} \varphi_{x_i}\, d\mu_\Lambda(\varphi). \tag{3.2}$$

Como en el caso del enrejado uno define en forma equivalente: m, χ, u_4, $\bar{u}_4$ y λ_r.

Una de las preguntas importantes de la teoría de campos euclideanos (TCE) es si las fórmulas anteriores tienen algún significado matemático. Una forma de contestar esta pregunta es adoptando el principio que los modelos de la TCE son regularizados a cortas distancias poniéndolos en un enrejado. De esta forma, sistemas de espines clásicos en el enrejado son las aproximaciones a modelos de la TCE. La pregunta natural que ahora surge es la de cómo uno debe construir el límite del continuo de sistemas de espines en el enrejado. Para lograr esto uno puede seleccionar una función $\Gamma(\theta)$ de un parámetro de escala θ sobre $[1, \infty)$ tal que

$$\theta m(\Gamma(\theta)) \to m^* \geq 0 \quad \text{cuando} \quad \theta \to \infty. \tag{3.3}$$

A continuación se selecciona una función $\alpha(\theta)$ tal que para $x \neq y$, $|x - y| < \infty$ y θ suficientemente grande, el reescalamiento de la función de dos puntos, $\alpha(\theta)^2 \langle \varphi_{\theta_x} \varphi_{\theta_y} \rangle_{\Gamma(\theta)'}$ es acotada fuera de 0 e ∞. Note que θx y θy deben estar en $\mathbf{Z}^d$, por lo tanto x y y pertenecen a un enrejado de separación θ^{-1}. Si x y y están en $a\mathbf{Z}^d$, entonces $\langle \varphi_{\theta_x} \varphi_{\theta_y} \rangle_{\Gamma(\theta)}$ está definido para todo $\theta = na^{-1}$, $n = 1, 2, \ldots$ De aquí que el límite de escala, $m(\Gamma(\theta) \approx \theta^{-1} \to 0$, los parámetros, $\Gamma(\theta)$, del modelo del enrejado se requiere que se aproximen a un punto crítico, cuando $\theta \to \infty$.

Ahora es claro que la construcción de modelos en la TCE en el límite del continuo y el análisis de fenómenos críticos en sistemas clásicos en el enrejado están íntimamente relacionados. Esto es, si uno conoce suficiente sobre el acercamiento al punto crítico en un sistema de espines en el enrejado, uno puede usar esa información para construir un modelo en la TCE como el límite de escala de un sistema en el enrejado.

4. Exponentes críticos

Ahora nos enfocaremos a la región crítica, esto es, sobre puntos en el espacio de parámetros (J, h) muy cercanos al punto crítico $J = J_c$, $h = 0$. Cuando uno se aproxima a los puntos críticos, algunas cantidades mecánico-estadísticas, como la susceptibilidad, divergen; otras como la magnetización, son continuas pero tienen derivadas discontinuas. Se encuentra empíricamente que esas cantidades usualmente se comportan en la región crítica aproximadamente como una ley de potencia; por ejemplo,

$$\chi \approx (J_c - J)^{-\gamma}, \tag{4.1}$$

para J extremadamente cercano, pero menor que J_c, γ es llamado el exponente crítico.

Aquí únicamente introduciremos la notación necesaria para describir este tipo de comportamiento crítico [6]. Primero aclaremos el significado de la afirmación (3.1). Para esto consideremos la afirmación genérica

$$f(x) \approx x^{\lambda} \quad \text{cuando} \quad x \to 0^{+}, \tag{4.2}$$

la cual la entendemos como

$$\lim_{x\to 0^{+}} \frac{\log f(x)}{\log x} = \lambda. \tag{4.3}$$

Estas interpretaciones permiten regularidades confluentes del tipo logarítmico, tales como

$$f(x) = Ax^{\lambda}|\log x|^{\mu}. \tag{4.4}$$

Es importante recalcar que para afirmaciones como (4.2) o cualquier otra interpretación puede valerse integrarla pero no diferenciarla. Esto es: (4.2) no implica

$$f'(x) \approx x^{\lambda-1} \quad \text{cuando} \quad x \to 0^{+}, \tag{4.5}$$

pero esta última ecuación sí implica (4.2), asumiendo $\lambda > 0$ y $f(0) = 0$.

Ahora introduciremos los exponentes críticos, usaremos la temperatura como variable $T = J^{-1}$ en vez de J y escribiremos $t = T - T_c$. Los exponentes críticos caen en cuatro clases, dependiendo de la forma de acercamiento al punto crítico:

1) Exponentes de alta temperatura: $t \to 0^{+}$, $h = 0$.

2) Exponentes de baja temperatura: $t \to 0^{-}$, $h = 0$.

3) Exponentes de isoterma temperatura: $h \to 0^{+}$, $t = 0$.

4) Exponentes críticos de punto: $t = 0$, $h = 0$.

La susceptibilidad χ diverge cuando uno se aproxima al punto crítico. Definimos los exponentes críticos γ, γ' y δ como

$$\chi \approx \begin{cases} t^{-\gamma} & \text{cuando } t \to 0^{+},\ h = 0, \\ (-t)^{-\gamma'} & \text{cuando } t \to 0^{-},\ h = 0, \\ h^{\frac{1}{\gamma-1}} & \text{cuando } h \to 0^{+},\ t = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Nótese el signo menos en la definición de γ, y γ'; esto se hace para que γ y γ' sean positivos.

Similarmente la longitud de correlación ξ diverge cuando se aproxima al punto crítico:

$$\xi \approx \begin{cases} t^{-\nu} & \text{cuando } t \to 0^+,\ h = 0, \\ (-t)^{-\nu'} & \text{cuando } t \to 0^-,\ h = 0, \\ h^{\frac{\nu_c}{\delta}} & \text{cuando } h \to 0^+,\ t = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

De hecho hay diferentes definiciones posibles de la longitud de correlación, y a su vez de sus exponentes críticos correspondientes. Todos involucran la función de correlación truncada espín-espín

$$G(x) = \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle - \langle \sigma_0 \rangle \langle \sigma_x \rangle. \tag{4.8}$$

La longitud de correlación exponencial χ es definida por

$$\chi = \lim_{|x| \to \infty} \sup \frac{-|x|}{\log G(x)}. \tag{4.9}$$

De forma análoga, para cada número real $\phi > 0$ podemos definir una longitud de correlación promedio χ_ϕ por

$$\chi_\phi = \left(\frac{\sum_x |x|^\phi G(x)}{\sum_x G(x)} \right)^{1/\phi} \tag{4.10}$$

Por lo cual se tienen exponentes ν, ν_ϕ y demás. Sin embargo, generalmente se espera que todas las definiciones razonables de las longitudes de correlación conduzcan a los mismos exponentes críticos, en particular $\nu = \nu_\phi$ para todo ϕ.

5. Universalidad y escala

Una pregunta razonable sería ¿por qué enfocamos nuestra atención sobre la región crítica? La respuesta histórica ha sido que la región crítica es extremadamente difícil, y por lo tanto interesante. Todos los métodos de aproximación, tales como teorías de campo medio y sus generalizaciones, las cuales trabajan bien lejos de los puntos críticos, y fallan en la región crítica: ellos dan predicciones erróneas para los exponentes críticos. El desarrollo de una teoría correcta de fenómenos críticos ha sido un gran problema abierto por varias décadas. Pero otro lado de la respuesta es que la región crítica, a diferencia de las otras regiones del espacio de parámetros, proyecta una simplicidad remarcable, la cual puede ser resumida en dos palabras: *universalidad* y *escala*.

Universalidad. Un ejemplo de universalidad es la idea planteada por los físicos, en los años antes de 1940, de que todos los sistemas tenían los mismos exponentes críticos. La única dificultad aquí es que esto es erróneo, lo cual fue establecido experimentalmente en 1900. Sin embargo, no fue sino hasta 1944, año de la solución exacta del modelo de Ising en dos dimensiones, que fue estableciéndose que, a pesar de las predicciones de la teoría del campo medio incorrectas, parecía darse una cierta universalidad. Por ejemplo, muchos diferentes fluidos parecen tener el mismo valor para el exponente crítico β. Esto nos dice que a pesar del enorme rango de temperaturas críticas y presiones y de la estructura química de base, el comportamiento en la región crítica (y solamente allí) parece ser independiente de todos los detalles. Aún más sorprendente, fue notado pronto que los sistemas magnéticos también tienen los mismos exponentes críticos como los fluidos. Aparentemente algún mecanismo general está trabajando en la región crítica: los detalles de la interacción llegan a ser irrelevantes. Estudios numéricos del comportamiento crítico de modelos N-vectoriales han dado origen a las siguientes conclusiones en consideración a la universalidad:*

1) Claramente no es el caso que todos los modelos tienen los mismos exponentes críticos. Los exponentes dependen al menos de la dimensión del enrejado d y la dimensión N. Ellos también dependen, como en el caso de interacciones de rango largo tales como $J_{ij} \approx |i-j|^{-p}$, sobre el exponente de decaimiento p.

2) Sin embargo, los modelos caen en un número relativamente pequeño de clases, llamadas clases de universalidad, tal que todos los modelos en la misma clase de universalidad tienen los mismos exponentes críticos. Por ejemplo, el modelo de Ising ferromagnético de vecinos próximos ha sido resuelto sobre una variedad de enrejados bidimensionales (cuadrada, triangular, etc.); y a pesar de que el acoplamiento crítico J_c y otros detalles difieren ampliamente de enrejado a enrejado, los exponentes críticos (así como ciertas razones de amplitudes críticas y otra información en la región crítica) son idénticos.

La explicación heurística de universalidad es la siguiente: en la región crítica, la longitud de correlación es muy grande, aproximándose a infinito. Sólo el comportamiento de gran escala es relevante; los detalles de la interacción a distancias cortas no los son. En un estado en el cual la longitud de correlación es 10^6, la pregunta es ¿por qué los espines debe importarles si este estado es producido por una interacción de vecinos próximos o una interacción de vecinos 17-*avos*? Tales detalles obviamente afectan la longitud de interacción requerida para producir una transición de fase. Esto es, afectarán el acoplamiento crítico J_c, pero ellos no deben tener efecto sobre el comportamiento mismo en la región crítica. Sin embargo, ciertos parámetros tales como la dimensionalidad o las propiedades de simetría de la interacción son relevantes cualquiera que sea la longitud de escala, y así determinan las distintas clases de universalidad. Es importante mencionar que las clases de universalidad aparentes han llegado a ser con el tiempo más pequeñas y más numerosas, debido principalmente a que la comunidad de físicos ha llegado a estar más conciente de las diferentes sutilezas de los fenómenos que pueden darse en la región crítica. Por ejemplo, a pesar de que las variaciones continuas de los parámetros de interacción no producen en general cambios en el comportamiento crítico, hay excepciones, tales como el modelo de ocho vértices de Baxter [13], en el cual los exponentes críticos varían continuamente con los parámetros del modelo.

---

*Además hay una gran cantidad de excelente trabajo experimental, cuya exactitud es comparable a aquella obtenida en estudios numéricos de los modelos matemáticos no exactamente solubles [9].

Finalmente enfatizaremos que a pesar de que universalidad es una idea heurísticamente plausible, y está apoyada por argumentos del grupo de renormalización y por una gran cantidad de evidencia empírica, no había sido probada para ningún caso no-trivial, sin embargo, recientemente fue probada para algunos casos interesantes por métodos de renormalización riguroso por Gawedzki y Kupiainen [20]. El primer análisis matemático riguroso del grupo de renormalización (GR) aplicado a un ejemplo especifico fue hecho por Bleher y Sinai [21] para el modelo hierárchico. La función hamiltoniana de este modelo es seleccionada de tal forma que las transformaciones del GR puedan ser reducidas a transformaciones no-lineales actuando sobre un espacio de densidades. Entre los sistemas cuyo comportamiento crítico es entendido rigurosamente están los siguientes: gas de dipolos en $d \geq 2$; acoplamiento débil en $\lambda\varphi_d^4$ en $d \geq 4$; modelo de aproximación hierárchica para N grande, para el modelo de σ en dos dimensiones y el modelo de Ising en tres dimensiones. El método riguroso del GR envuelve un análisis muy intrincado y métodos combinatorios muy sofisticados, por lo cual preferimos no presentarlo en este trabajo.

Escala. El segundo hecho empíricamente observado sobre comportamiento crítico es el de que varios de los exponentes críticos, de los cuales hay al menos una docena, no son independientes sino que satisfacen varias relaciones de escala. Por ejemplo, puede verse que algunos modelos obedecen

$$\gamma = \gamma', \tag{5.1}$$

$$\alpha' + 2\beta + \gamma' = 2, \tag{5.2}$$

$$\gamma = (2 - \eta)\nu. \tag{5.3}$$

También, todos los modelos excepto esos en dimensión $d > 4$ parecen obedecer las relaciones

$$d\nu = 2 - \alpha. \tag{5.4}$$

Así resulta que todos los exponentes críticos pueden ser expresados en términos de tres, o quiza hasta dos, exponentes independientes.

1) Aquellas que se siguen de la hipótesis termodinámica de escala.

2) Aquellas que siguen la hipótesis de correlación de escala.

3) Aquellas que siguen de la hipótesis de hiper-escala.

Las relaciones de escala de las primeras dos clases son confirmadas por todas las evidencias disponibles, para todos los modelos. Sin embargo, las relaciones que siguen de hiper-escala, de la cual (5.4) es un ejemplo, son mucho más sutiles: ellas son conocidas como rigurosamente válidas en algunos modelos (tales como el modelo de Ising en $d > 4$) y sigue siendo el objeto de grandes polémicas en otras más (tales como el modelo de Ising de tres dimensiones). Como en el caso de universalidad, solamente hasta hace un par de años ninguna de las relaciones de escala había sido probada rigurosamente, excepto para modelos exactamente solubles; sin embargo Gawedzki y Kupiainen [20] probaron algunas de ellas.

6. Desigualdades de correlación

Las desigualdades de correlación constituyen una de las principales técnicas usadas en mecánica estadística y teoría cuántica de campos euclideanos para la prueba de una gran variedad de casos como son: la existencia del volumen infinito, transiciones de fase y el estudio de la región crítica.

Uno de los métodos usados para probar desigualdades de correlación es el método por duplicación de variables [13]. Este método usa sistemas auxiliares construidos de la siguiente forma: dado un sistema de espines de una componente, uno construye un duplicado del sistema con el doble de variables,

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_n\},$$

y el hamiltoniano será

$$H(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) + H(\bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_n).$$

Es claro de la construcción que esas dos copias del sistema original no interactúan entre sí. A continuación uno define las variables rotadas

$$t_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_x + \bar{\varphi}_x), \qquad q_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_x - \bar{\varphi}_x).$$

De igual forma uno puede construir un sistema cuádruple consistiendo de cuatro copias de la original no-interactuantes, con variables φ, $\bar{\varphi}$, φ' y $\bar{\varphi}'$.

Como antes, las variables rotadas serán

$$\begin{aligned} t_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_x + \bar{\varphi}_x), \qquad & q_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_x - \bar{\varphi}_x), \\ t'_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi'_x + \bar{\varphi}'_x), \qquad & q'_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi'_x - \bar{\varphi}'_x). \end{aligned} \tag{6.1}$$

y de nuevo rotándolos obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(t_x + t'_x), \qquad & \beta_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(t_x - t'_x), \\ \gamma_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q'_x + q_x), \qquad & \delta_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q'_x - q_x). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Dado $A = \{a_i\}$, entendemos por

$$\varphi^A = \prod_i \varphi_i^{a_i}$$

al producto de variables de espín. Así, dado un hamiltoniano polinomial

$$H = -\sum_A J_A \varphi^A,$$

más adelante definiremos la espectación para una función $F(\varphi)$. Sea $d\mu_i(\varphi_i)$ una medida de distribución de espín simple (es decir, una medida sobre $\mathbf{R}$). Donde se asumirá la propiedad

$$\int |\varphi|^N e^{|H(\varphi)|} \prod_i d\mu_i(\varphi_i) < \infty$$

para todo N. La espectación $\langle \cdot \rangle$ de una función $F(\varphi)$ estará definida por

$$\langle F \rangle = \frac{1}{Z} \int F(\varphi) e^{-H(\varphi)} \prod_i d\mu_i(\varphi_i),$$

donde Z es la bien conocida función de partición.

Ahora enunciaremos algunas de las desigualdades de correlación básicas cuyas pruebas usan el método de duplicación de variables. Las pruebas pueden ser encontradas en varios de los textos tradicionales, por ejemplo en las Refs. [2,4].

TEOREMA 6.1 (Griffiths I y II*). *Sea*

$$H = -\sum_K J_{K\varphi^K} \quad J_K \geq 0, \tag{6.3}$$

donde $K = (k_x)_{x \in L}$ *es cualesquier multi-índice y*

$$\varphi^K = \prod_{x \in L} \varphi_x^{k_x}.$$

Sea $d\nu_x(\varphi_x)$ *simétrica bajo* $\varphi_x \leftrightarrow -\varphi_x$ *y satisfaciendo la propiedad*

$$\int |\varphi|^m e^{|H|} \prod_{x \in L} d\nu_x(\varphi_x) < \infty. \quad \forall m \in \mathbf{Z}. \tag{6.4}$$

*De hecho, Griffiths II puede ser considerada como un corolario de la desigualdad de Ginibre enunciada en el siguiente teorema.

Entonces para cualquier multi-índice A and B tenemos

$$(G1) \qquad \langle\varphi^A\rangle \geq 0, \tag{6.5}$$

$$(G2) \qquad \langle\varphi^A;\varphi^B\rangle \equiv \langle\varphi^A\varphi^B\rangle - \langle\varphi^A\rangle\langle\varphi^B\rangle \geq 0. \tag{6.6}$$

TEOREMA 1.2 (Desigualdad de Ginibre). *Bajo las mismas hipótesis que el teorema anterior tenemos*

$$(G1) \qquad \langle a^A t^B\rangle \geq 0 \tag{6.7}$$

TEOREMA 1.3 (Desigualdad de Ellis-Monroe-Newman). *Sea*

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{x\leq y} J_{xy}\varphi_x\varphi_y - \sum_x h_x\varphi_x \quad J_{xy} \geq 0, \quad h_x \geq 0 \tag{6.8}$$

con medida de espín simple

$$d\nu(\varphi) = \frac{\exp(-V(\varphi))d\varphi}{\int_R \exp(-V(\varphi))d\varphi}, \tag{6.9}$$

donde V es una función par y C^1, con V' convexa sobre $[0,\infty)$. Entonces para cualquier A, B, C y D multi-índices tenemos*

$$(EMN) \qquad \langle\alpha^A\beta^B\gamma^C\delta^D\rangle \geq 0, \tag{6.10}$$

donde α,β,γ y δ están definidos como en (6.2).

COROLARIO 6.4 (Desigualdad de Lebowitz para la función de 4-puntos). *Bajo las mismas hipótesis que el teorema anterior tenemos*

$$(Le) \qquad u_4 \equiv \langle\varphi_{x1}\varphi_{x2}\varphi_{x3}\varphi_{x4}\rangle - \langle\varphi_{x1}\varphi_{x2}\rangle\langle\varphi_{x3}\varphi_{x4}\rangle - \langle\varphi_{x1}\varphi_{x3}\rangle\langle\varphi_{x2}\varphi_{x4}\rangle$$
$$-\langle\varphi_{x1}\varphi_{x4}\rangle\langle\varphi_{x2}\varphi_{x3}\rangle + 2\langle\varphi_{x1}\rangle\langle\varphi_{x2}\rangle\langle\varphi_{x3}\rangle\langle\varphi_{x4}\rangle \leq 0. \tag{6.11}$$

Una de las aplicaciones interesantes de las desigualdades de Griffiths es la prueba de que para el modelo de Ising la función de correlación converge en el límite de volumen infinito. Por las funciones de correlación entendemos los momentos de los espines

$$\langle\varphi^A\rangle = \left\langle\varphi_1^{b_1}\cdots\varphi_n^{b_n}.\right\rangle \tag{6.12}$$

El resultado de interés aquí está dado por el siguiente teorema:

---

*Si V es suave, esto significa que $V''' \geq 0$ sobre $[0,\infty)$.

TEOREMA. *Sea $0 \leq h$ en la medida del modelo de Ising*

$$d\mu_{h,\Lambda} = \frac{e^{h\sum_{i\in\Lambda}\varphi_i}\,d\mu_\Lambda}{\int e^{h\sum_{i\in\Lambda}\varphi_i}\,d\mu_\Lambda}. \tag{6.13}$$

Cuando $\Lambda \uparrow \mathbf{R}^d$, la función de correlación del modelo de Ising converge.

La prueba utiliza fuertemente la desigualdad de Griffiths I y II.

7. LA REPRESENTACIÓN DE CAMINOS ALEATORIOS

La representación de caminos aleatorios una reformulación de la teoría cuántica euclideana introducida por Symanzik [14], para la investigación de modelos euclideanos φ^4. La idea básica de la representación para campos escalares es la de exhibir las funciones de Schwinger en términos de distribuciones de probabilidad de trayectorias donde los efectos de interacción están descritos por la intersección de trayectorias. Recientemente se han hecho variantes de la misma, las cuales han sido usadas en diferentes clases de problemas, por ejemplo para establecer y probar desigualdades de correlación, para dar otra construcción de las teorías de φ^4 y para estudiar transiciones de fase y modelos de percolación. Una generalización de la representación de caminos aleatorios ha sido usada en el análisis de superficies aleatorias con aplicaciones a las teorías de normas.

Aquí introduciremos brevemente la representación de caminos aleatorios [15,16]. Por comodidad consideremos un modelo de una componente de espines clásicos sobre un enrejado finito $\mathbf{L} \subset \mathbf{Z}^d$, donde J es una matriz simétrica con $J_{xy} \geq 0$ para todo x, y. Para cada $x \in \mathbf{L}$ es asociada a una variable aleatoria real φ_x. La probabilidad conjunta para la variable aleatoria $\varphi = \{\varphi_x\}_{x\in\mathbf{L}}$ es

$$e^{\frac{1}{2}(\varphi,J\varphi)}\prod_{x\in\mathbf{L}} g_x(\varphi_x^2)d\varphi_x, \tag{7.1}$$

donde hemos asumido* que $g_x \in C^\infty(\mathbf{R}^+)$ con decaimiento más rápido que exponencial en el infinito a lo largo con todas sus derivadas. El resultado básico es:

TEOREMA 7.1 (Teorema de representación de caminos aleatorios). *Defina una medida producto sobre $[0,\infty]^{|\mathbf{L}|}$ la cual depende sobre el camino aleatorio ω por*

$$d\nu_\omega(t) = \prod_z d\nu_{n_z(\omega)}(t_z) \tag{7.2}$$

con

$$d\nu_n(s) = \begin{cases} \delta(s)\,ds & si\ n = 0 \\ \dfrac{s^{n-1}}{(n-1)!}\chi_{[0,\infty]}(s)\,ds & si\ n \geq 1 \end{cases} \tag{7.3}$$

*Para evitar problemas técnicos no interesantes, uno puede quitar las constricciones tomando límites.

entonces con las hipótesis sobre J y g dadas anteriormente la siguiente identidad es válida:

$$\langle \varphi_x F(\varphi) \rangle = \sum_y \sum_{\omega : x \to y} J^\omega \int d\nu_\omega(t)\, \mathcal{Z}(t) \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \right\rangle_t \tag{7.4}$$

donde la suma varía sobre todos caminos $\omega = (\omega(0), \ldots, \omega(n))$ sobre el enrejado $\mathbf{L}$ *empezando en x y terminando en y,*

$$J^\omega = J_{\omega(0)\omega(1)} J_{\omega(1)\omega(2)} \cdots J_{\omega(n-1)\omega(n)}.$$

Aqui $\langle \cdot \rangle_t$ significa esperanza normalizada con respecto a la medida en

$$Z(t) = \int e^{\frac{1}{2}(\varphi, J\varphi)} \prod_z g_z(\varphi_z^2 + 2t_z)\, d\varphi_z \tag{7.5}$$

i.e., *para cualquier función "decente" F:*

$$\langle F(\varphi) \rangle_t = Z(t)^{-1} \int F(\varphi) e^{\frac{1}{2}(\varphi, J\varphi)} \prod_z g_z(\varphi_z^2 + 2t_z)\, d\varphi_z, \tag{7.6}$$

y $\mathcal{Z}(t) \equiv \mathcal{Z}(t)/\mathcal{Z}$.

Comentarios

1. Este teorema es válido con pequeños cambios en el enunciado y la prueba si uno considera modelos vectoriales con cualquier número de componentes. De hecho el autor ha desarrollado un estudio intensivo de desigualdades de correlación para familias de modelos de dos componentes con simetrías hipercúbicas utilizando estas técnicas de representación por caminos aleatorios [17,18].

2. Tomando $F(\varphi) = \varphi_y$, uno llega a la relación básica

$$\langle \varphi_x \varphi_y \rangle = \sum_{\omega : x \to y} J^\omega \int d\nu_\omega(t)\, \mathcal{Z}(t). \tag{7.7}$$

Razonando en una forma similar, es fácil derivar la fórmula para cualquier función de $2n$–puntos, por ejemplo,

$$\langle \varphi_{x_1} \varphi_{x_2} \varphi_{x_3} \varphi_{x_4} \rangle = \sum_{\substack{\omega_1 : x_1 \to x_2 \\ \omega_2 : x_3 \to x_4}} J^{\omega_1 + \omega_2} \int d\nu_{\omega_1}(t_1)\, d\nu_{\omega_2}(t_2)\, \mathcal{Z}(t_1 + t_2)$$

$$+ \text{ dos permutaciones} \tag{7.8a}$$

$$= \sum_{\omega : x_1 \to x_2} J^\omega \int d\nu_\omega(t)\, \mathcal{Z}(t) \langle \varphi_{x_3} \varphi_{x_4} \rangle_t$$

$$+ \text{ dos permutaciones.} \tag{7.8b}$$

LEMA 7.2 (Partición de trayectorias). *Sea $x_1, \ldots, x_n$ los sitios en el enrejado y sea f alguna función de t (t es llamado el tiempo local). Entonces*

$$\sum_{\omega: x \to y} J^{\omega} \int d\nu_{\omega}(t)\, t_{x_1} \cdots t_{x_n} f(t)$$

$$= \sum_{\pi \in \wp_n} \sum_{\substack{\omega_0: x \to x_{\pi(1)} \\ \omega_1: x_{\pi(1)} \to x_{\pi(2)} \\ \vdots \\ \omega_n: x_{\pi(n)} \to y}} J^{\omega_0 + \cdots + \omega_n} \int d\nu_{\omega_0}(t_1) \cdots d\nu_{\omega_n}(t_n)\, f(t_0 + \cdots + t_n), \tag{7.9}$$

donde $\wp_n$ es el conjunto de todas las permutaciones de $\{1, \ldots, n\}$.

8. DESIGUALDADES DE ESQUELETO

Las desigualdades de esqueleto son un tipo particular de desigualdades de correlación para las funciones de Green de $2n$ puntos. Por ejemplo, desigualdades de esqueleto para las funciones u_4 dicen que la función u_4 está acotada por arriba y por abajo por la suma de las amplitudes de esqueleto (es decir todas las amplitudes de Feynman sin ninguna inserción de auto-energía y con propagadores desnudos reemplazados por propagadores renormalizados) hasta orden $2k$ y $2k+1$, respectivamente.

Para el modelo de φ^4

$$g(\varphi^2) = \exp\left[-\frac{\lambda_0}{4!}\varphi^4 - \frac{B_0}{2}\varphi^2\right], \tag{8.1}$$

donde $\lambda_0 \geq 0$. Así

$$g(\varphi^2 + 2t) = \exp\left[-\frac{\lambda_0}{4!}\varphi^4 - \left(\frac{B_0}{2} + \frac{\lambda_0 t}{6}\right)\varphi^2 - \left(\frac{\lambda_0 t^2}{6} + B_0 t\right)\right], \tag{8.2}$$

de esto notamos que el efecto de la variable t es sumar un término masa espacio dependiente $\lambda_0 t \varphi^2/6$ al hamiltoniano. El hecho esencial es que todas las variables t son no negativas, así que las desigualdades de Griffiths I y II implican

$$0 \leq \langle \varphi^A \rangle_t \leq \langle \varphi^A \rangle_0. \tag{8.3}$$

Ahora consideremos la función conexa de 4-puntos u_4 definida en (1.6). Por (7.8a) y (7.8b) u_4 puede ser escrita como

$$u_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = F(x_1, x_2 \mid x_3, x_4) + F(x_1, x_3 \mid x_2, x_4) + F(x_1, x_4 \mid x_2, x_3), \tag{8.4}$$

donde

$$F(x_1,x_2 \mid x_3,x_4) = \sum_{\omega:x_1\to x_2} J^\omega \int d\nu_\omega(t)\, \mathcal{Z}(t) \big[\langle \varphi_{x_3}\varphi_{x_4}\rangle_t - \langle \varphi_{x_3}\varphi_{x_4}\rangle_0\big]. \tag{8.5}$$

Del hecho que J^ω, $d\nu_\omega$ y $\mathcal{Z}(t)$ son no-negativas, la desigualdad de Griffiths II (7.6) implica que $F \leq 0$, y por lo tanto $u_4 \leq 0$, la cual es la desigualdad de Lebowitz probada ahora por la representación de caminos aleatorios.

Para obtener cotas más bajas sobre u_4, uno tiene que examinar más cercanamente el corchete de (8.5). No lo haremos aquí, sólo daremos los resultados para las cotas de primero y segundo orden en λ; los desarrollos se pueden ver en la Ref. [16]. Para primer orden en λ se obtiene

$$u_4(x_1,x_2,x_3,x_4) \geq -\lambda_0 \sum_x \langle\varphi_{x_1}\varphi_x\rangle_0\langle\varphi_{x_2}\varphi_x\rangle_0\langle\varphi_{x_3}\varphi_x\rangle_0\langle\varphi_{x_4}\varphi_x\rangle_0. \tag{8.6}$$

Esta es conocida como la "gráfica de árbol de cota inferior".

Para la cota de segundo orden uno obtiene

$$\begin{aligned} u_4(x_1,x_2,x_3,x_4) \leq{}& -\lambda_0 \sum_x \langle\varphi_{x_1}\varphi_x\rangle_0\langle\varphi_{x_2}\varphi_x\rangle_0\langle\varphi_{x_3}\varphi_x\rangle_0\langle\varphi_{x_4}\varphi_x\rangle_0 \\ &+\frac{\lambda_0^2}{2}\left[\sum_{x,y}\langle\varphi_{x_1}\varphi_x\rangle_0\langle\varphi_{x_2}\varphi_x\rangle_0\langle\varphi_x\varphi_y\rangle_0^2\langle\varphi_{x_3}\varphi_y\rangle_0\langle\varphi_{x_4}\varphi_y\rangle_0 + \text{dos permut.}\right]. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Brydges, Fröhlich, Sokal [16,19] probaron las desigualdades anteriores. Ellos las utilizaron como ingredientes básicos (entre otras cosas) para la prueba de la no trivialidad del límite continuo para teorías de campo φ_d^4 débilmente acopladas en dimensión $d < 4$.

9. Superficies aleatorias

Modelos de superficies aleatorias (SA) pueden considerarse como una generalización fiel de modelos de caminos aleatorios (CA) [6]. Ejemplos de problemas en física del estado sólido que envuelven SA son:

1) Crecimiento de cristales.

2) Interfaces y dominio de paredes separando diferentes fases de un sistema físico tal como un fluido o un magneto.

3) Mecánica estadística de ramas de membranas como polímeros.

Dentro de las aplicaciones de superficies aleatorias a la teoría cuántica de campos tenemos:

1) Representación de SA a las teorías de norma en el enrejado.

2) Aproximación discreta a las teorías de cuerdas: modelo de Nambu-Goto, modelo de Polyakov.

3) Gravedad cuántica en dos dimensiones.

Un modelo de SA en el enrejado $\mathbf{Z}^d$ está definido seleccionando una familia contable ε de superficies aleatoria en $\mathbf{Z}^d$; este conjunto será el espacio de configuración del modelo. Una SA es por definición un complejo de celda conexa bidimensional, de la cual cada p-celda ($p = 0, 1, 2$) corresponde a una copia de una p-celda elemental en $\mathbf{Z}^d$.

La 0-celdas en $\mathbf{Z}^d$ son sitios de $\mathbf{Z}^d$, las 1-celdas son lazos y las 2-celdas son copias de un lazo en $\mathbf{Z}^d$. Ejemplos de tales ensambles tenemos:

i) Todas la SA contribuyendo a la representación de SA de una teoría de normas en el enrejado tal como modelos de $\mathbf{Z}_2$, U(1) o SU(2) en el confinamiento de fase.

ii) Superficies aleatorias auto-repelentes (SAAR) (éstas aparecen en teorías de norma en el enrejado $\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(m)$ para valores fijos de mn, cuando $n \to \infty$; en las teorías de norma en el enrejado $\mathbf{Z}_2$).

iii) SA de género 0 (es decir sin agarraderas) conexas, orientables. Estas son llamadas SA planas.

A continuación uno asigna para cada SA $S \in \mathcal{E}$ un peso estadístico, $\rho(S)$. Uno de los ejemplos de peso estadístico más interesante inspirado por la acción de Nambu-Goto está definido por

$$\rho(S) = \begin{cases} e^{-\beta|S|} & S \in \mathcal{E} \\ 0 & S \notin \mathcal{E} \end{cases} \tag{9.1}$$

donde $|S|$ indica el número de plaquetes formando la superficie S, y $\mathcal{E}$ es algún ensamble de superficie contribuyendo al modelo.

Las funciones de Green de los modelos de SA son generalizaciones de las funciones de Green de los modelos de CA en la cual los puntos son reemplazados por lazos. Las funciones de Green de n-lazos (o correlación de n-lazos) son definidas como

$$G(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n) = E \sum_{\substack{S \in \varepsilon \\ S \text{ conexo} \\ \partial S = \mathcal{L}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{L}_n}} \rho(S), \tag{9.2}$$

donde $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ son lazos en el enrejado ∂S denota la frontera de S. Todas las propiedades relevantes del modelo son expresadas en términos de esas funciones de Green. Por ejemplo, si $L \times T$ es un lazo rectangular con lados de longitud L y T, el potencial de la cuerda $V(L)$ está definido por

$$V(L) = \lim_{T \to \infty} -\frac{1}{T} \log G(L \times T) \tag{9.3}$$

y la tensión de cuerda α por

$$\alpha = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{L} V(L). \tag{9.4}$$

El inverso la longitud de correlación está definido por

$$m = \lim_{a\to\infty} -\frac{1}{a} \log G(\partial p, \partial p_a), \tag{9.5}$$

donde p es un plaquete y ∂p_a es una copia de ∂p trasladado por a unidades en el enrejado. La susceptibilidad es definida por

$$\chi = \sum_{p'} G(\partial p, \partial p'). \tag{9.6}$$

Otras nociones son introducidas por analogía a los modelos de CA. Decimos que β_c es un punto crítico si

$$m(\beta) \to 0 \quad \text{cuando} \quad \beta \to \beta_c.$$

En esta caso, podemos introducir exponentes críticos $\nu, \gamma_s, \eta, \mu, \ldots$ como sigue

$$m(\beta) \approx (\beta - \beta_c)^{\nu}, \tag{9.7a}$$

$$\chi(\beta) \approx (\beta - \beta_c)^{-\gamma_s}, \tag{9.7b}$$

$$G_\beta(\partial p, \partial p_a) \approx a^{-(d-2+\eta)}, \quad \text{para} \quad 1 \ll a \ll m(\beta)^{-1} \tag{9.7c}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \approx (\beta - \beta_c)^{\mu-1} \tag{9.7d}$$

etc.

Para definir objetos rigurosamente uno define objetos con las propiedades esperadas de las funciones formales de Green, uno considera el límite continuo de los modelos de SA, definidos por reescala de las funciones de Green de una manera similar a la considerada previamente en los modelos para espines.

Conclusiones

Como hemos podido ver a través del estudio anterior, las teorías de fenómenos críticos y transiciones de fase desde el punto de vista riguroso nos muestran una gran riqueza en técnicas y resultados obtenidos en los últimos años. Además implican en sus análisis una interacción profunda con las diferentes ramas de la física, matemáticas y química, entre otras.

Referencias

1. J.L. Soria, Notas sin publicar de un curso-taller dado en el Centro de Graduados del ITT (agosto, 1991).

2. J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Physics*, Springer Verlag, New York, Berlin (1981).
3. A. Sokal, Notas sin publicar de un curso dado en el Courant Institute, NYU, en el Otoño de 1983.
4. B. Simon, *The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory*, Princeton University Press, Princeton (1974).
5. J. Fröhlich, "Quantum field theory in terms of random walks and random surfaces", in G. 't Hooft et al. (eds.), *Progress in Gauge Field Theory*, Plenum Press, New York-London (1984).
6. R. Fernández, J. Fröhlich and S. Sokal, *Random Walks, Critical Phenomena, and Triviality in Quantum Field Theory*, Springer Verlag, New York, Berlin (1992).
7. M. Fisher, "Theory of equilibrium critical phenomena", *Rep. Prog. Phys.* **30** (1967) 615.
8. H. Stanley, *Introduction to phase transition and critical phenomena*, Oxford, New York and Oxford (1971).
9. G. Ahlers, *Proc. Eleventh Int. Conf. Low Temp. Phys. Vol. 1*, (eds. J.F. Allen, D.M. Finlayson, and D.M. McCall) Univ. Press, Scottland (1969).
10. C. Thompson, *Mathematical Statistical Mechanics*, Princeton, New Jersey (1972).
11. R. Israel, *Covexity and the Theory of Lattice Gases*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1978).
12. F. Guerra, L. Rosen and B. Simon, "The $P(\phi)_2$ Euclidean quantum field theory as classical statistical mechanics", *Ann. Math.* **101** (1975) 111.
13. G. Sylvester, "Inequalities for continuous-spin Ising ferromagnets". *J. Stat. Phys.* **15** (1976) 327.
14. K. Symanzik, "Euclidean quantum field theory", in *Local Quantum Theories*, Jost, R. ed., Academic Press, New York, (1969).
15. D. C. Brydges, J. Fröhlich and T. Spencer, "The Random-Walk Representation of Classical Spin Systems and Correlation Inequalities", *CMP* **83** (1982) 123.
16. D. C. Brydges, J. Fröhlich, and A. Sokal, "The random walk representation of classical spin systems and correlation inequalities II. The skeleton inequalities", *CMP* **91** (1983) 117.
17. J. L. Soria, "Correlation inequalities for two-component hypercubic φ^4 models", *Jour. Stat. Phys.* **52** *No. 3/4* (1988) 711.
18. J. L. Soria, "Correlation inequalities for two-component hypercubic φ^4 models II. Rotated inequalities", *Physica A* **164** (1990) 751.
19. D. C. Brydges, J. Fröhlich and A. Sokal, "A new proof of the existence and nontriviality of the continuum φ_2^4 and φ_3^4 quantum field theories", *CMP* **91** (1983) 141.
20. K. Gawedzki and A. Kupiainen, "Asymptotic freedom beyond perturbation theory", in K. Osterwalder and R. Stora (editors), *Critical Phenomena, Random Systems, Gauge Theories (Les Houches 1984)*, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford and Tokio (1986).
21. Bleher, Ya.G. Sinai, *Comm. Math. Phys.* **33** (1973) 22.