

El problema de N cuerpos en la astronomía

LUIS A. AGUILAR

Instituto de Astronomía

Universidad Nacional Autónoma de México

Apartado postal 877, 22860 Ensenada B. C., México

Recibido el 18 de marzo de 1992; aceptado el 23 de junio de 1992

RESUMEN. El problema de N cuerpos es uno de los problemas clásicos de la mecánica celeste, cuya importancia, hoy en día, trasciende el contexto planetario. El problema de N cuerpos juega un papel fundamental en la dinámica de sistemas estelares, galácticos y en la cosmología. El algoritmo básico del problema de N cuerpos, la descripción de la evolución dinámica de un sistema representable por elementos discretos los cuales están sujetos a una ley de interacción dada, es de interés en muchas ramas de la física.

En este artículo se da un panorama moderno del papel que juega el problema de N cuerpos en la astronomía. Se describen los algoritmos usados actualmente y se dan ejemplos de problemas que han sido estudiados recientemente con cada uno de ellos. Se discuten los límites de validez de estas simulaciones numéricas y los peligros inherentes en su abuso. Finalmente, se hace un esbozo de prospectos futuros en este campo.

El autor espera interesar a investigadores de otros campos en explorar la aplicabilidad de estos algoritmos en sus áreas de interés profesional.

ABSTRACT. The N body problem is one of the classic problems of Celestial Mechanics whose importance, nowadays, goes beyond the realm of our planetary system. The N body problem plays a central role in the field of dynamics of stellar and galactic systems, as well as in cosmology. The basic algorithm of the N body problem: the description of the dynamical evolution of a physical system that can be represented by discrete elements which are subject to their mutual interaction, is of interest in many branches of physics.

In this article we present a review of the role that the N body problem plays in modern astronomy. We describe the main algorithms presently in use, and illustrate each with examples of current interest in astronomy. We discuss the limits of validity of these numerical algorithms and the dangers in their misuse. Finally, we sketch the future prospects in this field.

The author hopes to draw the attention of physicists working in other areas of research who may be interested in applying these algorithms in their work.

PACS: 02.70.+d; 03.20.+i

1. INTRODUCCIÓN

El problema de N cuerpos, *i.e.*, encontrar las trayectorias de varios cuerpos que se mueven sujetos a las fuerzas que ejercen entre sí, es uno de los problemas clásicos de la mecánica y la astronomía. Dentro del contexto astronómico, la fuerza de interacción es la fuerza de gravedad y los cuerpos en cuestión pueden ser planetas (en el caso de sistemas planetarios), estrellas (cuando se trata de cúmulos estelares y galaxias), galaxias (en el caso de cúmulos de galaxias), o cúmulos de galaxias (para simulaciones cosmológicas).

El primer problema de N cuerpos fue resuelto por Newton, quien descubrió que la trayectoria de un cuerpo, sujeto a una fuerza central que varía como el inverso cuadrado de la distancia, es una cónica. Aunque el problema de dos cuerpos puede ser resuelto analíticamente, el problema de tres o más cuerpos no es soluble. Esto dio lugar, en los siglos XVII y XVIII, al florecimiento de técnicas de perturbaciones para la obtención de soluciones aproximadas en el caso de nuestro sistema planetario, donde una masa (la del Sol) domina a todas las demás. Como ejemplo del poder de estas técnicas perturbativas podemos citar la reconstrucción de la órbita del asteroide Ceres, realizada por Karl F. Gauss con base en las observaciones fragmentarias del astrónomo italiano G. Piazzi, y el “descubrimiento” del planeta Neptuno en el año de 1846 por el astrónomo francés Urbain Joseph LeVerrier y el astrónomo inglés John Couch Adams con base en las irregularidades de la órbita de Urano. Desafortunadamente, estas técnicas perturbativas se vuelven algebraicamente muy complicadas cuando hacemos aproximaciones a órdenes mayores. Un ejemplo extremo de ello es el trabajo de C.E. Delaunay, quien en 1860 publicó su aproximación analítica al problema del movimiento de la luna; esta aproximación, que contiene más de 10,000 términos, representó 20 años de trabajo y fue publicada en dos volúmenes.

El desarrollo de las computadoras en la segunda mitad de este siglo ha tenido un impacto profundo en el problema de N cuerpos, no sólo en las técnicas de perturbaciones a través del uso de programas de álgebra simbólica, sino en la solución directa de las ecuaciones de movimiento a través de simulaciones numéricas de la evolución del sistema; son estas últimas técnicas las que son el tema del presente artículo. Como nota curiosa mencionaremos que el trabajo de Delaunay ha sido verificado usando programas de álgebra simbólica, encontrándose únicamente 7 coeficientes erróneos.

La primera simulación numérica del problema de N cuerpos dentro de un contexto astronómico fue realizada por Erick Holmberg (1941) quien, al publicarse el catálogo de galaxias de Shapley y Ames en 1932, conjeturó que la distribución aglomerada que presentan las galaxias es debida a la pérdida de energía cinética orbital durante encuentros cercanos entre galaxias vecinas. Para probar su conjetura, Holmberg necesitaba calcular la pérdida de energía como función de los parámetros del encuentro, problema muy difícil de resolver si es el año de 1941 y no se tiene acceso a una computadora electrónica. Ante esta situación, Holmberg ideó un experimento muy ingenioso: dado que la iluminación producida por una fuente luminosa decae como el cuadrado de la distancia a la fuente (esto es, exactamente como decae la fuerza de gravedad), Holmberg simuló el encuentro de dos galaxias, formadas por 36 bombillas eléctricas cada una, las cuales eran movidas sobre la superficie de una mesa. Para calcular la fuerza resultante sobre una partícula dada, la bombilla correspondiente era sustituida por una celda fotoeléctrica y la intensidad luminosa era medida en cuatro orientaciones ortogonales, y las cuatro lecturas eran sumadas vectorialmente. Aunque la conjetura original de Holmberg no es correcta, este trabajo pionero fue el primero en demostrar que los encuentros entre galaxias son sumamente inelásticos y que podrían explicar las deformaciones que algunas galaxias presentan.

En la Sec. 2 hacemos una breve descripción de la naturaleza del problema de N cuerpos, identificando los límites colisionales y no colisionales; en la Sec. 3 describimos los métodos de simulación más usados hoy en día dentro de la astronomía para resolver el problema de N cuerpos; en la Sec. 4 presentamos una reseña de proyectos de investigación de gran

interés en la actualidad y que ilustran cada uno de los métodos vistos en la sección anterior; en la Sec. 5 hacemos una discusión somera sobre los límites de validez de las simulaciones de N cuerpos y los peligros inherentes en su abuso; en la Sec. 6 comentamos sobre los prospectos futuros de estas simulaciones y, finalmente, presentamos nuestras conclusiones en la Sec. 7.

2. EL PROBLEMA DE N CUERPOS

El problema gravitatorio de N cuerpos (en el régimen no relativista) tiene un desarrollo históricamente invertido con respecto a las demás ramas de la física: mientras el resto ha partido de una descripción del comportamiento *global* de los sistemas estudiados para subsecuentemente desarrollar una descripción *local* de la física a un nivel fundamental de la interacción entre los componentes del sistema (*e.g.*, la termodinámica precedió a la mecánica estadística, la mecánica de fluidos precedió a la teoría cinética de gases, un estudio de las propiedades mecánicas de los materiales precedió al estudio de la estructura atómica y molecular de los mismos, etc.), en el campo que es tema de este artículo se conoce la forma de la interacción gravitacional desde un principio:

*“ Planetas omnes in se muto graves esse jam ante probavimus,
ut & gravitatem in unumquemque seorsim spectatum
esse reciproce ut quadratum distantiae locorum a centro planetæ.
Et inde consequens est gravitatem in omnes proportionalem
esse materiæ in iisdem”.*

*Isaac Newton,
Proposición vii, Teorema VII.
Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica.*

O, en un lenguaje más moderno:

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (1)$$

Esta es la única de las cuatro fuerzas conocidas que afecta a todas las partículas del universo, sean éstas manzanas o galaxias, hadrones o leptones, siendo además siempre atractiva; es por esto que, aunque la gravedad es la más débil de todas las fuerzas, la suma de las contribuciones de toda la materia y energía a la fuerza de gravedad hacen que sea ésta la fuerza que da forma al Universo.

La forma de la Ec. (1) parece simple; sin embargo, la dependencia no lineal en la distancia hace que la evolución de un sistema compuesto por más de dos partículas no pueda ser conocida analíticamente. Por otro lado, el decaimiento cuadrático con la distancia no es lo suficientemente rápido como para poder despreciar los efectos de materia distante. Afortunadamente, los efectos producidos por la materia distante pueden ser separados, en general, de los producidos por la materia cercana, como a continuación veremos.

Sea una partícula inmersa en una nube uniforme de partículas (Fig. 1). Si la distribución del sistema es simétrica con respecto a la posición de la partícula que nos interesa, la fuerza

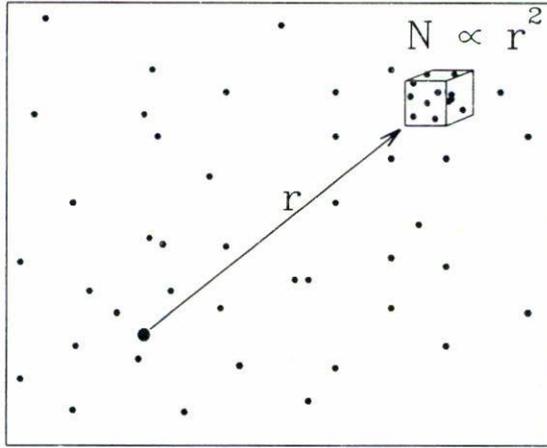


FIGURA 1.

promedio sobre ésta es nula; sin embargo, la naturaleza discreta del sistema producirá una componente fluctuante en esta fuerza. Descompongamos la fuerza gravitacional total que siente la primera partícula en una suma de contribuciones debidas a las partículas dentro de cubos imaginarios en que dividimos al sistema. La contribución de un cubo cualquiera a dicha fuerza es proporcional al número N de partículas contenidas en el cubo e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, r , a la primera partícula. De esta relación podemos ver que, si además imponemos la condición de que todos los cubos contribuyan con fuerzas de igual magnitud, el tamaño de éstos debe aumentar con la distancia a la partícula, de manera que el número de partículas contenidas aumente como el cuadrado de la distancia.

La fluctuación promedio en el número de partículas en cada cubo está dada por una distribución de Poisson:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \propto \frac{1}{r}, \quad (2)$$

donde hemos usado la condición $N \propto r^2$.

La Ec. (2) es muy importante, ya que nos dice que, aunque no debemos despreciar la atracción gravitacional de las partes lejanas del sistema, las fluctuaciones estocásticas asociadas a ellas decaen rápidamente. Esto nos permite descomponer la fuerza de gravedad en dos partes: una irregular, debida a las partículas cercanas, y otra regular, debida a las partículas lejanas; esto es,

$$F_{\text{total}} = F_{\text{irregular}}(\text{distancias cortas}) + F_{\text{regular}}(\text{distancias grandes}). \quad (3)$$

Estimemos ahora las escalas de tiempo en que varían esta dos componentes de la fuerza y que llamaremos *escala de tiempo colisional* (t_{col}), en el caso de la componente irregular, y *escala de tiempo dinámico* (t_{din}), en el caso de la componente regular.

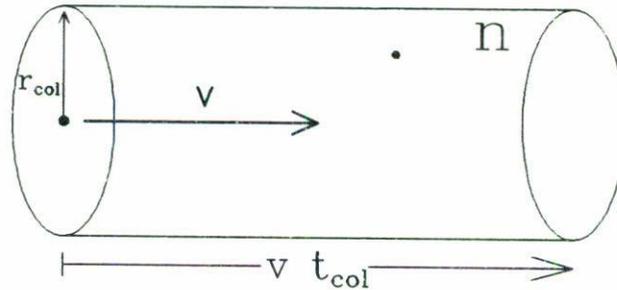


FIGURA 2.

Si definimos t_{col} como la escala de tiempo en que la probabilidad de sufrir un encuentro gravitacional “fuerte” (*i.e.*, con una separación entre las partículas, r , menor que una separación crítica, r_{col} , definida más adelante) es igual a la unidad, entonces

$$n \times V = n(\pi r_{col}^2 v t_{col}) = 1, \tag{4}$$

donde n es la densidad ambiental de partículas y V el volumen del cilindro barrido por un disco de radio r_{col} , que se mueve con una partícula de velocidad v en un tiempo t_{col} (Fig. 2).

La pregunta, ahora, es ¿cuál es el valor de r_{col} ? Usualmente se adopta el parámetro de impacto que resulta en una deflexión de 90° ; esto corresponde aproximadamente a la distancia en que las energías cinética y potencial de las partículas en colisión son iguales,

$$\frac{Gm^2}{r_{col}} = \frac{1}{2}mv^2, \tag{5}$$

donde m es la masa de las partículas. Sustituyendo este valor de r_{col} en la Ec. (4) obtenemos la escala de tiempo colisional como función de los parámetros locales del sistema:

$$t_{col} = \frac{v^3}{4\pi G^2 m^2 n}. \tag{6}$$

Para expresar t_{col} en función de los parámetros globales del sistema (*i.e.*, el número total de partículas N , el tamaño del sistema R y la raíz cuadrada de la velocidad cuadrática media v_{rms}), usamos el teorema del Virial, el cual establece que, en un sistema en equilibrio, el doble de la energía cinética total es igual al valor absoluto de la energía potencial total:

$$2 \left(\frac{1}{2} N m v_{rms}^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{GN^2 m^2}{R}. \tag{7}$$

Despejando $(Gm)^2$ de esta expresión y sustituyendo en la Ec. (6), así como recurriendo a la relación entre densidad y número de partículas ($n \propto N/R^3$), obtenemos finalmente que

$$t_{\text{col}} \propto \left(\frac{R}{v_{\text{rms}}} \right) N, \quad (8)$$

o sea que a menor tamaño del sistema, o mayor velocidad de sus componentes, la importancia de las colisiones aumenta (*i.e.*, t_{col} disminuye). De la expresión anterior vemos también que el aumento del número de partículas en un sistema de masa total, tamaño y velocidad promedio constantes, hace que la importancia de las colisiones decrezca, contrariamente a lo dictado por nuestra intuición. Esto se debe a que, aunque el número de colisiones aumenta con N , la masa de las partículas disminuye y el efecto de cada colisión decrece como el cuadrado de N .

La escala de tiempo dinámica que caracteriza a la parte regular de la fuerza se define, usualmente, como el tiempo necesario para atravesar el sistema a velocidad v_{rms} ; esto es,

$$t_{\text{din}} \propto \frac{R}{v_{\text{rms}}}, \quad (9)$$

ya que en esta escala de tiempo varía la fuerza debida a las partes distantes del sistema.

De las dos últimas ecuaciones vemos que

$$\frac{t_{\text{col}}}{t_{\text{din}}} \propto N. \quad (10)$$

Este importante resultado nos dice que, en los sistemas constituidos por muchos cuerpos, la parte irregular, debida a encuentros con partículas cercanas, es despreciable con respecto a la parte regular, debida al resto del sistema en su totalidad (*i.e.* $t_{\text{col}} \gg t_{\text{din}}$); en este caso decimos que se trata de un *sistema no colisional*. En sistemas de pocas partículas es la parte irregular la que domina, razón por la que los llamamos *sistemas colisionales*. Esta categorización en sistemas colisionales y no-colisionales sólo depende del número total de partículas en el sistema.

La Tabla I enlista una serie de sistemas dinámicos astronómicos, en orden ascendente de tamaños, junto con el número típico de componentes y escalas de tiempos colisional y dinámico, así como la razón entre éstos. Nótese cómo esta razón crece con el número de partículas en el sistema y la variación tremenda de su valor. El hecho de que la variación temporal de las fuerzas en un sistema no-colisional sea muy diferente a la de un sistema colisional ha dado lugar, en cada caso, al desarrollo de algoritmos diferentes para resolver el problema de N cuerpos; son estos algoritmos los que discutiremos en la siguiente sección.

3. MÉTODOS DE SOLUCIÓN

Las ecuaciones que describen el movimiento de N partículas sujetas a fuerzas de gravedad

TABLA I.

Sistema físico	N	T_{din} (10^6 años)	T_{col} (10^6 años)	$T_{\text{col}}/T_{\text{din}}$	Escala espacial (m)
Grupo estelar	≤ 10	≤ 1	≤ 1	~ 1	$\leq 10^{15}$
Cúmulo abierto	10^3	1	10	10	10^{16}
Cúmulo globular	10^5	10	10^3	10^2	10^{17}
Nuestra galaxia	10^{11}	10^2	10^7	10^5	10^{20}
Grupos de galaxias	10	10^3	10^3	1	10^{21}
Cúmulos de galaxias	10^2-10^3	10^3	$\geq 10^4$	10	10^{22}

Los números en la tabla son sólo aproximaciones dentro de un orden de magnitud.

mutuas forman un sistema de N ecuaciones diferenciales acopladas, de segundo orden:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (11)$$

donde m_i y \mathbf{r}_i son la masa y el vector de posición de la i -ésima partícula, respectivamente; \mathbf{F}_i es la fuerza total sobre la misma, G es la constante de gravedad, y $\mathbf{r}_{ij} \equiv \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$.

Dado que cada ecuación involucra una sumatoria sobre las $(N-1)$ partículas restantes, tal pareciera que se requieren del orden de N^2 operaciones para evaluar todo el sistema. Sólo los programas usados para simular sistemas colisionales son los que requieren ese número de operaciones, ya que la parte regular de la fuerza puede ser estimada con menos operaciones.

En esta sección describiremos los algoritmos usados hoy en día en el campo de la astrofísica. Para sistemas colisionales se emplea el método de integración directa, para sistemas no-colisionales se recurre a los métodos de funciones armónicas y de Fourier.

3.1 Método de integración directa

En este método las fuerzas se calculan explícitamente usando la Ec. (11). A continuación esbozamos el algoritmo usando la sintaxis de FORTRAN*. La integración de las ecuaciones de movimiento se muestra de manera esquemática, ya que sólo nos interesa contrastar las diversas maneras de evaluar las fuerzas.

1. Cálculo de fuerzas:

```

Iniciar las variables de fuerza
do i = 1, N
   $\mathbf{F}_i = 0$ 

```

*Incluimos la expresión *end do* que, aunque no forma parte de la definición de FORTRAN 77, se encuentra en varias extensiones populares de este lenguaje; su significado es obvio.

```

end do

Acumulación fuerzas
do i = 1, N - 1
do j = i + 1, N
   $\mathbf{F}_{ij} = (Gm_i m_j / r_{ij}^3) \mathbf{r}_{ij}$ 
   $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{ij}$ 
   $\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j + \mathbf{F}_{ij}$ 
end do
end do

```

2. Integración de las ecuaciones de movimiento:

```

do i = 1, N
   $\mathbf{v}_i(t + \Delta t) = \mathbf{v}_i(t) + (\mathbf{F}_i / m_i) \Delta t$ 
   $\mathbf{r}_i(t + \Delta t) = \mathbf{r}_i(t) + \mathbf{v}_i \Delta t$ 
end do

```

3. Incremento de la variable temporal:

```

t = t + Δt

```

Este método modela de manera *exacta* un sistema de N partículas que interactúan gravitacionalmente, excepto, obviamente, por los errores de redondeo y truncamiento; esto nos permite simular tanto la parte regular como la parte irregular de la fuerza, lo que hace que éste sea el método preferido para modelar sistemas colisionales.

El hecho de que el número de operaciones necesario para integrar las ecuaciones de movimiento se escale como N^2 limita el tamaño de los sistemas modelados con ese tipo de algoritmo. Para aminorar esta limitación se ha introducido el uso de algoritmos multi-paso. En esta variante, la contribución de partículas lejanas, a la fuerza ejercida sobre una partícula dada, es actualizada menos frecuentemente que la contribución de partículas cercanas, siendo esta contribución extrapolada de las contribuciones a tiempos anteriores. Aun con el uso de esta técnica, el número máximo de partículas es del orden de aproximadamente 10^3 para el caso de supercomputadoras (Duncan, 1986).

Existe también un problema en la aplicación de la Ec. (11) cuando $r_{ij} \rightarrow 0$, ya que en este caso la fuerza diverge. En un sistema físico real esto no sucede, ya que las partículas no son puntuales; en las simulaciones numéricas se acostumbra sustituir la expresión r_{ij}^3 en el denominador por $(r_{ij}^2 + \epsilon^2)^{3/2}$, donde el *radio de dilución*, ϵ , es introducido para evitar la divergencia. La nueva expresión del potencial, llamado "potencial suavizado", corresponde a una distribución de masa

$$\rho_P(r) = \left(\frac{3m}{4\pi\epsilon^3} \right) \left(1 + \frac{r^2}{\epsilon^2} \right)^{-\frac{5}{2}}, \quad (12)$$

conocida como esfera de Plummer (Binney y Tremaine 1987). El uso del radio de dilución es entonces equivalente a sustituir la aproximación de masa puntual por una distribución extendida de masa. Aunque el radio de dilución evita las fuerzas divergentes, su uso implica que la fuerza que se está modelando no corresponde a la fuerza de gravedad newtoniana de un punto masa, para $r < \epsilon$. El uso de esta aproximación no es adecuado para sistemas en los que ϵ es mayor que la separación media entre una fracción significativa de pares de partículas en el sistema. Una solución más elegante de este problema consiste en *regularizar* las ecuaciones de movimiento para el caso de pares de partículas muy cercanas (Kustaanheimo y Steifel, 1965). El proceso de regularización consiste en hacer una transformación a un nuevo conjunto de coordenadas espaciales y temporales en las que desaparece la singularidad de las ecuaciones de movimiento [Ec. 11] para $r_{ij} = 0$.

La influencia de Sverre Aarseth en el uso de este tipo de algoritmos ha sido fundamental. A él se deben innumerables artículos al respecto, así como los códigos más sofisticados y eficientes. Referimos al lector interesado en estas técnicas a uno de sus excelentes artículos (Aarseth, 1985).

3.2 Método de desarrollo en funciones armónicas

La idea básica en este método es sustituir la expresión para la fuerza gravitacional, dada en la Ec. (11), por un desarrollo finito en las funciones armónicas adecuadas a la simetría del sistema que será modelado. Como veremos en un momento, esto evita la dependencia cuadrática en el número de partículas, eliminando en gran medida la limitación para N pequeña inherente al método de integración directa. Se introduce, sin embargo, otra limitación: los sistemas modelados deben presentar, y mantener, una simetría global para que la expresión del potencial y las fuerzas, en funciones armónicas, converja rápidamente. Se tiene además que, dado que las partículas no “ven” directamente a las partículas que forman el resto del sistema, sino a la distribución de masa suavizada equivalente al desarrollo finito, se eliminan en gran medida los efectos de la parte irregular producida por las colisiones con vecinos cercanos; es por esto que el uso de este método está limitado al modelaje de sistemas no-colisionales que presentan cierto grado de simetría global.

Examinemos ahora un poco más en detalle cómo funciona este método para el caso de un sistema con simetría cercana a la esférica. El potencial producido en \mathbf{r} por una masa puntual unitaria en \mathbf{r}' puede expresarse como la serie infinita de armónicos esféricos ($G = 1$)

$$\Phi_{\mathbf{r}'}(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{l,m}(\theta, \phi) Y_{l,m}^*(\theta', \phi') \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}}, \tag{13}$$

donde (r, θ, ϕ) y (r', θ', ϕ') son las componentes en coordenadas esféricas de los vectores \mathbf{r} y \mathbf{r}' ; $Y_{l,m}$ y $Y_{l,m}^*$ son el armónico esférico de orden l, m , y su complejo conjugado; y $r_{<}$ y $r_{>}$ son el mínimo y el máximo, respectivamente, de r y r' .

El potencial producido por todo el sistema de N partículas es entonces,

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \sum_{\text{sistema}} \Phi_{\mathbf{r}'}(\mathbf{r}) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi Y_{l,m}(\theta, \phi)}{2l+1} \times \left[\sum_{r' < r} Y_{l,m}^*(\theta', \phi') \frac{r'^l}{r^{l+1}} + \sum_{r' > r} Y_{l,m}^*(\theta', \phi') \frac{r^l}{r'^{l+1}} \right]; \end{aligned} \quad (14)$$

esta expresión es de la forma:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \phi) \times [A_{l,m} r^l + B_{l,m} r^{-(l+1)}], \quad (15)$$

donde las $A_{l,m} = A_{l,m}(\mathbf{r})$ son los momentos externos y las $B_{l,m} = B_{l,m}(\mathbf{r})$ los momentos internos que tipifican el potencial (*e.g.*, monopolo, dipolo, cuadrupolo, octupolo, etc.). La fuerza es calculada evaluando el gradiente de la expresión anterior.

Comparando las Ec. (14) y (15) vemos que los coeficientes $A_{l,m}$ y $B_{l,m}$ implican una sumatoria sobre todas las partículas exteriores e interiores a \mathbf{r} , respectivamente:

$$\begin{aligned} A_{l,m}(\mathbf{r}_i) &= \sum_{r' > r} a_{l,m}(\mathbf{r}') \equiv \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{r' > r} Y_{l,m}^*(\theta', \phi') r'^{-(l+1)}, \\ B_{l,m}(\mathbf{r}_i) &= \sum_{r' < r} b_{l,m}(\mathbf{r}') \equiv \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{r' < r} Y_{l,m}^*(\theta', \phi') r'^l; \end{aligned} \quad (16)$$

donde las $a_{l,m}$ y $b_{l,m}$ son las contribuciones individuales de cada partícula a los momentos del potencial.

Aunque esto parece indicar que es necesario efectuar una sumatoria adicional sobre todo el sistema, sólo es necesario efectuarla para la partícula más interna, ya que si ordenamos a las partículas en orden ascendente de distancia radial al centro de expansión, los momentos en la posición de las demás partículas son fácilmente calculables de manera recursiva. Por ejemplo, los momentos internos calculados en la posición \mathbf{r}_{i+1} son los mismos momentos calculados para la posición \mathbf{r}_i más la contribución de la i -ésima partícula a los mismos; de manera análoga, los momentos externos en la posición \mathbf{r}_{i+1} son los momentos calculados en \mathbf{r}_i menos la contribución de la partícula en \mathbf{r}_{i+1} . Este es el truco que nos permite calcular las fuerzas en el sistema, evitando la doble sumatoria sobre todas las partículas.

En la práctica la limitación en la rapidez de los códigos basados en este algoritmo está dada por la rutina de ordenamiento, cuyo tiempo de ejecución se escala como $N \log(N)$ con el número de partículas. Para códigos que truncan la expansión en armónicos esféricos en $l = 3$, el número de partículas que pueden ser manejadas en un tiempo razonable está entre 10^3 y 10^4 , siendo el tiempo de procesador central de 0.014 segundos por partícula y paso de integración en una computadora VAX 11/780 (Aguilar, 1985). A continuación esbozamos una posible implementación de este algoritmo:

1. Ordenamiento de las partículas por distancia radial:

$$r_1 < r_2 < \dots < r_i < \dots < r_N$$

2. Cálculo de momentos y fuerzas para la primera partícula:

$$\begin{aligned} A_{l,m} &= \sum_{j=2}^N a_{l,m}(\mathbf{r}_j) \\ B_{l,m} &= 0 \\ \mathbf{F}_1 &= \nabla_{\mathbf{r}_1} \Phi(\mathbf{r}_1; A_{l,m}, B_{l,m}) \end{aligned}$$

3. Cálculo de momentos y fuerzas para las partículas restantes:

$$\begin{aligned} \text{do } i = 2, N \\ \quad A_{l,m} &= A_{l,m} - a_{l,m}(\mathbf{r}_i) \\ \quad B_{l,m} &= B_{l,m} + b_{l,m}(\mathbf{r}_{i-1}) \\ \quad \mathbf{F}_i &= -\nabla_{\mathbf{r}_i} \Phi(\mathbf{r}_i; A_{l,m}, B_{l,m}) \\ \text{end do} \end{aligned}$$

4. Integración de las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} \text{do } i = 1, N \\ \quad \mathbf{v}_i(t + \Delta t) &= \mathbf{v}_i(t) + (\mathbf{F}_i/m_i)\Delta t \\ \quad \mathbf{r}_i(t + \Delta t) &= \mathbf{r}_i(t) + \mathbf{v}_i\Delta t \\ \text{end do} \end{aligned}$$

5. Incremento de la variable temporal:

$$t = t + \Delta t$$

3.3 Método de Fourier

El potencial producido por una distribución de masa $\rho(\mathbf{r}')$ está dado por:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \iiint \rho(\mathbf{r}') \times G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d^3\mathbf{r}', \quad (17)$$

donde

$$G \equiv \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (18)$$

es la función de Green para la interacción gravitacional (Jackson, 1975).

El potencial, expresado en esta forma, es reconocido como la convolución de la función de densidad con la función de Green:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \otimes G(\mathbf{r}). \quad (19)$$

Usando el teorema de la convolución, podemos expresar esta operación como una multiplicación en el espacio de Fourier (Bracewell, 1978):

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{s}) = \tilde{\rho}(\mathbf{s}) \times \tilde{G}(\mathbf{s}) \quad (20)$$

donde $\tilde{\rho}(\mathbf{s})$ denota la transformada de Fourier de $\rho(\mathbf{r})$.

La ventaja de la Ec. (20) es que la convolución de la Ec. (19) ha sido sustituida por una simple multiplicación de funciones. Esta es la simplificación explotada por el método de Fourier. El desarrollo de un algoritmo numérico, eficiente y rápido, para calcular transformadas de Fourier (Cooley y Tukey, 1965) ha hecho posible la implementación de este tipo de algoritmos. Al igual que los métodos de expansión en funciones armónicas, las partículas no interactúan con las demás directamente, sino con la representación, necesariamente suave, del potencial; esto hace que el método de Fourier sea aplicable solamente a sistemas no-colisionales.

El uso de la transformada rápida de Fourier (FFT) impone una limitación severa en la aplicabilidad de este método: las funciones de densidad y potencial son representadas por valores discretos en una red cartesiana, con un número de nodos que debe ser una potencia entera de 2 a lo largo de cada eje; cualquier valor de estas funciones, y de las que de ellas dependen, como la fuerza, ha de obtenerse por medio de una interpolación sobre la red cartesiana. La representación discreta de la transformada de Fourier implica, además, que las condiciones a la frontera de la red cartesiana usada para la simulación son periódicas, *i.e.*, la región espacial finita cubierta por la red cartesiana en la que se efectúa el experimento numérico se repite una infinidad de veces en todas direcciones.

Supongamos una red cartesiana con M nodos a lo largo de cada eje y longitud unitaria a lo largo de cada arista. Sea la terna de números enteros $\mathbf{n} \equiv (l, m, n)$ la etiqueta que usamos para referirnos al nodo de coordenadas $(l/M, m/M, n/M)$, y (o, p, q) la terna usada en el espacio de la transformada de Fourier. Sea además $W_{l,m,n}(\mathbf{r}_i)$ la función interpolante que usamos para distribuir la masa de las partículas en los nodos de la red cartesiana y para obtener el valor de la fuerza ejercida sobre una partícula a partir de los valores discretos calculados en dicha red. Con esta convención podemos esbozar el algoritmo usado para calcular las fuerzas sobre un sistema de N partículas de masa m_i y posición $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ dentro del cubo cartesiano:

0. Cálculo de la transformada de Fourier de la función de Green:

$$\tilde{G}_{o,p,q} = \begin{cases} 0, & \text{si } l = m = n = 0, \\ -1/[\pi(o^2 + p^2 + q^2)], & \text{para los demás casos.} \end{cases}$$

1. Cálculo de la densidad a partir de la distribución de partículas:

$$\rho_{l,m,n} = \sum_{i=1}^N m_i W_{l,m,n}(\mathbf{r}_i).$$

2. Obtención de la transformada de Fourier de la densidad:

$$\tilde{\rho}_{o,p,q} = (2\pi)^{-3/2} \sum_{l=0}^M \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^M \rho_{l,m,n} e^{\frac{2\pi i}{M}(lo+mp+nq)},$$

3. Multiplicación por \tilde{G} y obtención de la transformada inversa:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{o,p,q} &= \tilde{\rho}_{o,p,q} \times \tilde{G}_{o,p,q}, \\ \Phi_{l,m,n} &= (2\pi)^{-3/2} \sum_{o=0}^M \sum_{p=0}^M \sum_{q=0}^M \tilde{\Phi}_{o,p,q} e^{-\frac{2\pi i}{M}(lo+mp+nq)}. \end{aligned}$$

4. Obtención de las fuerzas en la red e interpolación para cada partícula:

$$\begin{aligned} F_{l,m,n} &= -\nabla_{l,m,n} \Phi_{l,m,n} \\ \mathbf{F}_i \equiv \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) &= \sum_{l=0}^M \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^M W_{l,m,n}(\mathbf{r}_i) F_{l,m,n}. \end{aligned}$$

5. Integración de las ecuaciones de movimiento:

do $i = 1, N$
 $\mathbf{v}_i(t + \Delta t) = \mathbf{v}_i(t) + (\mathbf{F}_i/m_i)\Delta t$
 $\mathbf{r}_i(t + \Delta t) = \mathbf{r}_i(t) + \mathbf{v}_i\Delta t$
 end do

6. Incremento de la variable temporal:

$$t = t + \Delta t.$$

La función de interpolación se acostumbra escribirla como el producto de tres funciones idénticas que se usan a lo largo de cada eje: $W_{l,m,n}(\mathbf{r}_i) \equiv w_l(x_i)w_m(y_i)w_n(z_i)$. Se usan varias formas de esta función; si escribimos como $\delta\mathbf{r}_i = (\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i)$ la distancia entre la partícula en \mathbf{r}_i y el nodo en \mathbf{n} , se tiene que la forma que corresponde a una aproximación de orden cero está dada por

$$w_l(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } M|\delta x_i| \leq \frac{1}{2}; \\ 0, & \text{para los demás casos.} \end{cases} \tag{21.a}$$

La aproximación lineal es

$$w_l(x_i) = \begin{cases} 1 - M|\delta x_i|, & \text{si } M|\delta x_i| \leq 1; \\ 0, & \text{para los demás casos;} \end{cases} \tag{21.b}$$

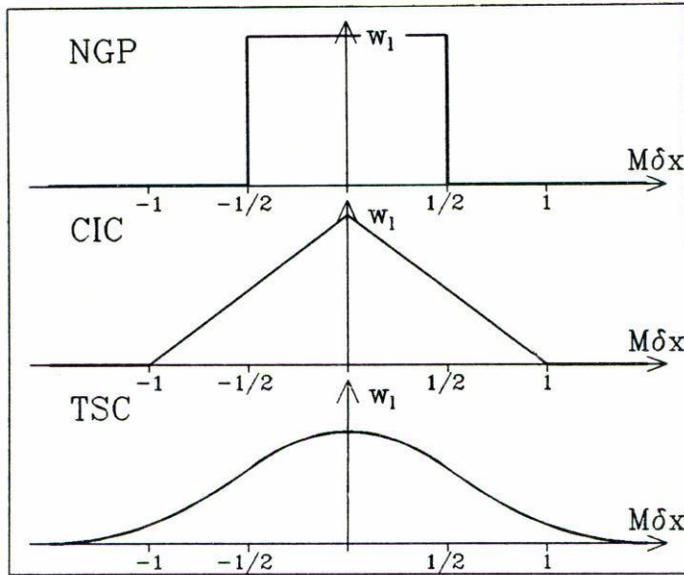


FIGURA 3. Funciones interpolantes.

Finalmente, la aproximación cuadrática es,

$$w_l(x_i) = \begin{cases} \frac{3}{4} - M^2 \delta x_i^2, & \text{si } M|\delta x_i| \leq \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - M|\delta x_i| \right)^2, & \text{si } \frac{1}{2} \leq M|\delta x_i| \leq \frac{3}{2}; \\ 0, & \text{para los demás casos.} \end{cases} \quad (21.c)$$

A estas formas, que aparecen graficadas en la Fig. 3, se les conoce respectivamente como aproximación de “nodo más cercano” (NGP: *Nearest Grid Point*), aproximación de “nube en celda” (CIC: *Cloud In Cell*), y aproximación de “nube triangular” (TSC: *Triangular Shape Cloud*). La primera aproximación produce una interpolación discontinua, la segunda aproximación produce una interpolación continua, pero cuya derivada es discontinua. Aproximaciones de órdenes mayores producen interpolaciones cada vez más suaves, sin embargo, resultan en algoritmos más lentos.

El uso de la misma función interpolante en los pasos 1 y 4 del algoritmo garantiza que no haya fuerzas ficticias de partículas sobre sí mismas, ya que el mismo esquema es usado para propagar la información de la posición de las partículas a los nodos de la red, y para recobrar la fuerza sobre las mismas a partir de los valores en la red. Sin embargo, las ecuaciones de movimiento que resultan no corresponden a un sistema hamiltoniano y no conservan, por tanto, la energía (Efstathiou *et al.*, 1985). Este problema puede ser evitado, si en el paso 4 se usa $W_{l,m,n}$ para interpolar el potencial en la posición de la partícula y luego derivar éste para obtener la fuerza sobre la misma, en lugar de efectuar primero la derivación y luego la interpolación. Aunque este esquema garantiza que la fuerza calculada es ahora conservativa, se tiene que, al usar $W_{l,m,n}$ para obtener el potencial y no la fuerza,

TABLA II.

Algoritmo	N	Método para calcular fuerzas	Ventaja	Desventaja
Integración directa	$\sim 10^3$	Cálculo directo	Forma correcta de fuerzas	N pequeño
Funciones armónicas	$\sim 10^4$	Desarrollo armónico		Intermedio
Fourier	$\sim 10^5$	Transformada de Fourier	N grande	Resolución espacial

la fuerza que ejerce una partícula puede afectarse a sí misma, y como resultado, no se conserva el momento lineal del sistema. Es importante hacer notar que la no conservación de la energía, o del momento lineal, en uno u otro caso, no son debidos a errores de redondeo o truncamiento, sino que tienen su origen en el algoritmo mismo. Al usar este método para hacer una simulación numérica, es necesario tomar una decisión con respecto a qué esquema usar, dada la naturaleza del sistema que se estudia.

Una limitación adicional de este método es que, aunque el número de partículas que pueden seguirse puede ser elevado, llegando hasta $N = 10^5$ (Miller y Smith 1981), la resolución espacial de la simulación está dada por el número de nodos de la red cartesiana, típicamente 64^3 nodos. Esto implica que la resolución espacial máxima es de sólo una parte en 64. Los sistemas estelares y galácticos se caracterizan por una gran concentración en sus partes centrales y el método de Fourier resulta inadecuado para simularlos. El método de Fourier se ha usado principalmente para realizar simulaciones cosmológicas de la estructura en gran escala del universo a épocas tempranas, cuando las fluctuaciones de densidad que darán lugar a galaxias, no han crecido mucho todavía. En este contexto, la particularidad de estos métodos de tener condiciones periódicas a la frontera, resulta ser una ventaja, pues ésta es la condición natural cuando la simulación representa un pedazo de un universo infinito. Aun así, algunos autores han modificado este algoritmo de manera que las fuerzas entre partículas cercanas es calculada usando un método directo (Efstathiou *et al.*, 1985). A este tipo de algoritmos, que permiten una resolución espacial mayor, se les denomina P³M (“Particle-Particle, Particle-Mesh”), a diferencia del método de Fourier original que es un algoritmo tipo PM (“Particle-Mesh”).

Para concluir esta sección, resumimos en la Tabla II las características principales de los algoritmos descritos.

4. PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

Ilustraremos ahora cada uno de los métodos vistos en la sección anterior usando trabajos tomados de la literatura reciente.

4.1. El problema de tres cuerpos

Los sistemas binarios de estrellas son muy importantes para la evolución dinámica de sistemas estelares en los que las colisiones no son despreciables, ya que al interactuar con otras estrellas los sistemas binarios actúan como fuentes y sumideros de energía para el

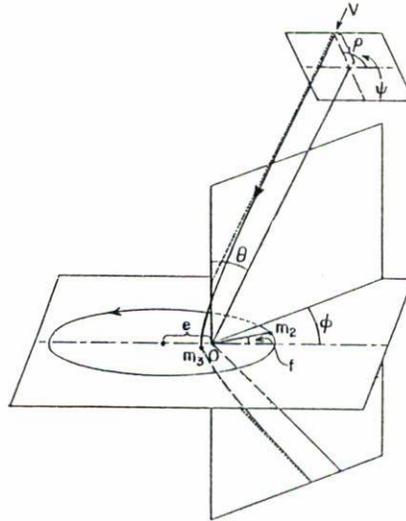


FIGURA 4. Parámetros que definen la colisión de un sistema binario con una tercera partícula.

sistema al intercambiar su energía orbital interna con la energía de la colisión. Existe, sin embargo, una gran dificultad en modelar los efectos de una población de sistemas binarios en un cúmulo de estrellas; ésta es debida a la diferencia tan grande en escalas de tiempo entre los períodos orbitales de las binarias y la escala de tiempo dinámico del cúmulo. En un cúmulo globular, por ejemplo, el tiempo colisional promedio es del orden de 10^9 años, mientras que los períodos de los sistemas binarios pueden llegar a ser del orden de horas.

La táctica a seguir en este problema es estudiar primero el problema de la dispersión de una estrella por un sistema binario, y obtener fórmulas estadísticas que permiten calcular el intercambio en energía, como función de los parámetros de la colisión; estas funciones, llamadas secciones eficaces de dispersión, pueden entonces ser incorporadas en una simulación global de todo el cúmulo globular en la que las colisiones son tratadas de manera estadística. La naturaleza de este problema —número reducido de partículas, efectos colisionales importantes y una gran precisión requerida— hacen que el método de integración directa sea la herramienta natural para tratarlo.

Aun el problema más simple de encontrar las secciones eficaces de dispersión no fue estudiado exhaustivamente sino hasta hace sólo unos años (Hut y Bahcall 1983, Hut 1983a, 1983b, 1984). La razón de este retraso es el gran número de experimentos numéricos que es necesario realizar para cubrir exhaustivamente los 9 parámetros independientes que definen de manera única una de estas colisiones (Fig. 4): Las masas m_2 y m_3 de las dos componentes del sistema binario en unidades de la masa de la tercera partícula, la excentricidad e de la órbita del sistema binario y su fase inicial f , los tres ángulos ϕ , θ y ψ que determinan la orientación espacial de la órbita de la tercera partícula, el parámetro de impacto ρ y, finalmente, la velocidad v de la colisión.

En 1981 el Instituto de Estudios Avanzados en Princeton adquirió una computadora VAX 11/750, la segunda en la historia del Instituto, cuya primera computadora había sido la máquina construida por John von Neumann. Debido a la poca familiaridad de

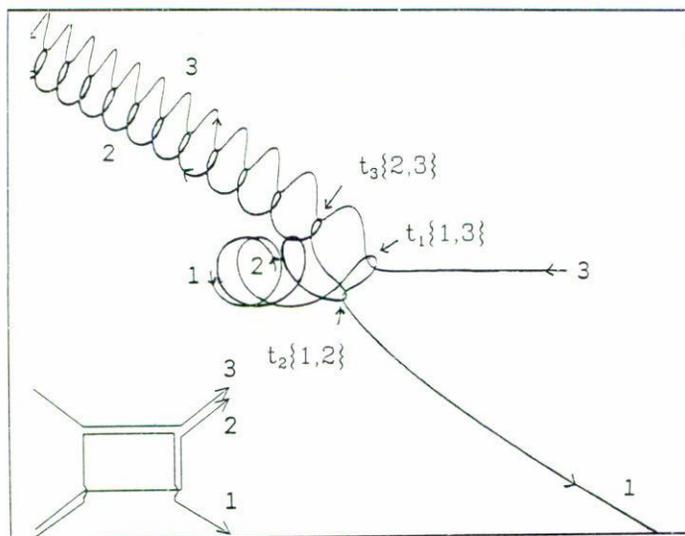


FIGURA 5. Intercambio resonante de pareja.

los investigadores en el uso de esta máquina, ésta fue usada infrecuentemente durante su primer año de operación, circunstancia aprovechada por un joven investigador recientemente llegado de Holanda. Durante 1982, Piet Hut acumuló varios meses de tiempo de procesador que empleó en realizar del orden de varios millones de colisiones. En este caso, el paso crucial en el estudio de este problema no se debió al método usado para integrar el programa de N cuerpos, sino al avance en la rapidez de cálculo de las computadoras.

La Fig. 5 muestra una colisión entre un sistema binario formado por las partículas 1 y 2 que se mueven inicialmente hacia la derecha, y una tercera partícula que se mueve en dirección contraria. Como podemos apreciar en esta figura, la colisión es más complicada de lo esperado: existe un encuentro cercano entre las partículas 1 y 3 al tiempo t_1 , como resultado de este encuentro, la partícula 1 es lanzada en dirección de la partícula 2, con la cual choca al tiempo t_2 para salir lanzada fuera del sistema. La partícula 2 tiene un encuentro adicional, esta vez con la partícula 3 al tiempo t_3 , que da como resultado la formación de un nuevo sistema binario formado por las partículas 2 y 3. Esta colisión, que resulta en lo que es conocido en la literatura como un “intercambio de pareja”, puede ser representado esquemáticamente con un diagrama como el que aparece en la parte inferior izquierda de la figura.

Existen otros resultados posibles en estos encuentros, los cuales se presentan esquemáticamente en la Fig. 6. Para el caso en que la energía total del sistema es positiva existen sólo dos posibilidades, la “ionización” o rompimiento del sistema binario y su proceso inverso, la “recombinación”, o formación de un sistema binario. Cuando la energía total es negativa, existe un número mayor de posibilidades. Podemos tener un “intercambio de pareja” o un simple “vuelo rasante” en el que el sistema binario original sobrevive, pero cambian sus parámetros orbitales. Cada una de estas dos últimas posibilidades puede ocurrir como una colisión directa, en la que el resultado final ocurre después de una sola interacción, o una colisión resonante, en la que existen varios encuentros entre las

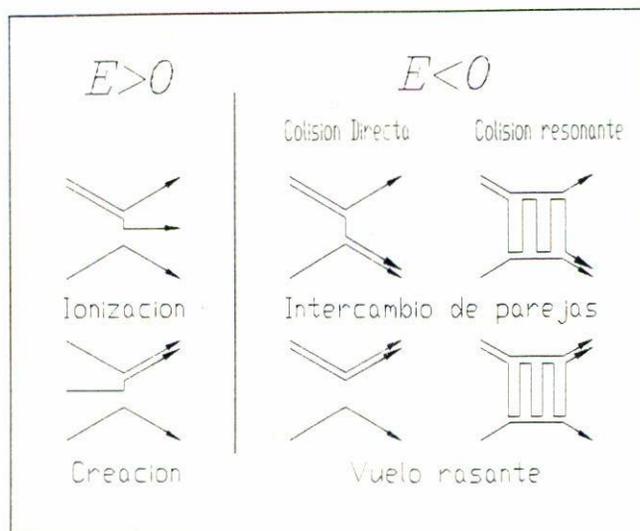


FIGURA 6. Clasificación de posibles eventos en una colisión de tres cuerpos.

partículas antes de que ocurra el resultado final. La colisión en la Fig. 5 es un ejemplo de encuentro resonante. Los encuentros resonantes son particularmente difíciles de simular numéricamente, porque es necesario integrar las ecuaciones de movimiento durante un tiempo mucho más largo.

Podría pensarse que aunque el número de parámetros del problema es elevado, una exploración burda del espacio de parámetros es suficiente para obtener las secciones eficaces de dispersión, las cuales, después de todo, son sólo aproximaciones estadísticas. Contrariamente a este argumento, el problema de dispersión por sistemas binarios resulta tener una gran riqueza de detalle en el espacio de parámetros. Para ilustrar este punto describiremos una serie de experimentos simplificados realizados por P. Hut (Hut, 1983c). Consideramos colisiones entre un sistema binario de partículas de igual masa en órbita circular de tamaño inicial fijo, y una tercera partícula de igual masa que es lanzada contra la binaria desde una separación inicial también fija. En este caso existen sólo tres parámetros: la fase orbital inicial del sistema binario f , el parámetro de impacto de la colisión ρ , que tomaremos positivo para el caso de colisiones prógradas (en el sentido de rotación de la binaria) y negativo para el caso retrógrado, y finalmente, la velocidad inicial v de la tercera partícula (Fig. 7).

La Fig. 8a muestra los resultados de estos experimentos para el caso en que $v/v_* = 8$, donde v_* es la velocidad que hace que la energía total del sistema sea cero. Cada experimento es representado por un símbolo cuya posición indica la fase (abscisa) y parámetro de impacto (ordenada). Si el resultado de la colisión es una ionización, el símbolo es un asterisco, si es sólo un vuelo rasante, la posición se deja en blanco. Podemos ver que existen franjas de ionización que tienen una dependencia periódica en la fase. Esto es debido a que, a un parámetro de impacto dado, la ionización ocurre para aquella fase en la que una de las partículas del sistema binario, o su compañera, pasa muy cerca de la partícula intrusa.

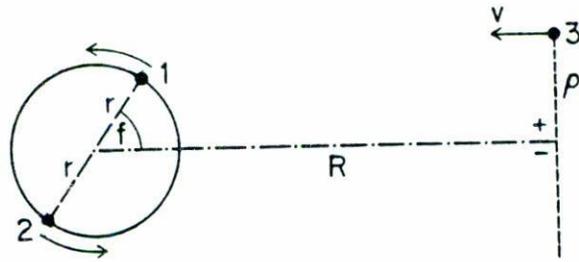


FIGURA 7. Condiciones iniciales de los experimentos simplificados de dispersión.



FIGURA 8A. Resultados de colisiones simplificadas para $v/v_* = 8.0$.

Esta situación se complica dramáticamente en el caso en que $v/v_* = 0.5$, mostrado en la Fig. 8b. Al ser negativa la energía total del sistema, las ionizaciones ya no son posibles. En cambio, tenemos ahora intercambios de pareja con la partícula 1, representados por un "1", con la partícula 2, representados por un "-", y encuentro resonantes, representados por un "@". Nótese la complejidad de la frontera entre estas regiones, misma que aumenta al considerar colisiones de menor energía. Es claro que ante una situación como ésta, es necesario hacer un gran número de experimentos antes de poder obtener secciones eficaces de dispersión.

Aún así, el trabajo de P. Hut permitió encontrar secciones eficaces de dispersión que han sido utilizadas en experimentos numéricos que han simulado la evolución de cúmulos globulares, los cuales son grupos del orden de 10^5 estrellas ligadas gravitacionalmente entre sí. Estos resultados han permitido entender una vieja paradoja en la evolución dinámica de estos cúmulos, la llamada "catástrofe gravotermodinámica". Si pensamos en un sistema autogravitante como un sistema termodinámico, veremos que la tendencia

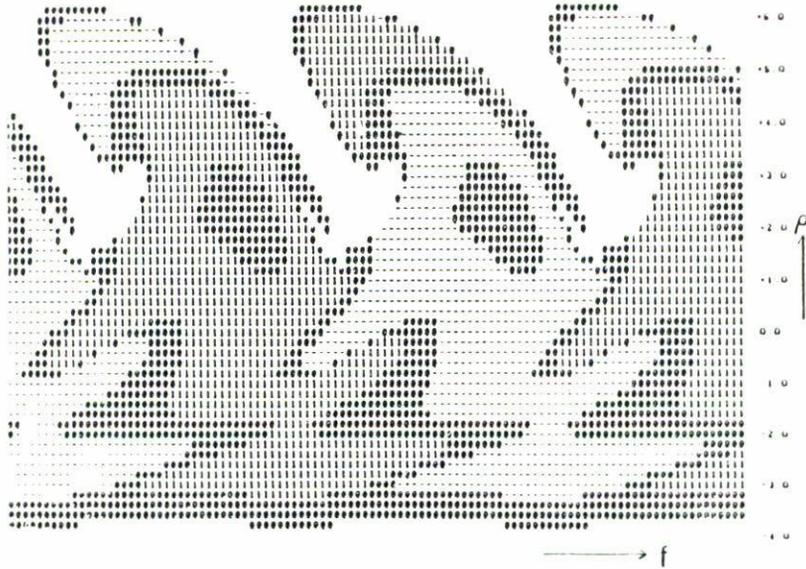


FIGURA 8B. Resultados de colisiones simplificadas para $v/v_* = 0.5$.

natural de estos sistemas es la de desarrollar un gradiente de temperatura en el que la dispersión de velocidades disminuye del centro hacia afuera, ya que éste es el comportamiento presentado por la energía potencial promedio de cada partícula en el sistema. Ahora bien, un gradiente de temperatura produce un flujo de energía el cual tiende a borrar dicho gradiente; sin embargo, los sistemas autogravitantes presentan un comportamiento paradójico, ya que al perder energía, éstos se contraen y aumentan su dispersión de velocidades; dicho de otra manera, los sistemas autogravitantes presentan un calor específico *negativo*. Al ceder energía hacia las partes externas, el centro del sistema se calienta aún más produciendo un gradiente mayor en la temperatura y esto da lugar a la catástrofe mencionada. Esta tendencia natural de todos los sistemas autogravitantes implica que todos aquellos agregados de estrellas cuyos tiempos de colisión (que es la escala de tiempo del flujo de energía) son menores que la edad del Universo, deben de haber desarrollado una singularidad en sus perfiles de densidad, característica que no es observada en los cúmulos globulares, los cuales, de acuerdo con la Tabla I, tienen un tiempo colisional menor que la edad del Universo y un número suficientemente grande de partículas como para que la aproximación termodinámica sea válida.

Simulaciones numéricas de la evolución de cúmulos globulares que incluyen los efectos de dispersión por binarias (Lightman y McMillan 1985) han mostrado cómo se evita la singularidad central: al aumentar la densidad en el centro se forman sistemas binarios de estrellas los cuales intercambian energía con las estrellas en el medio y las calientan de este modo. Esta energía adicional es la que alimenta el flujo de energía hacia la periferia, razón por la que la parte central deja de contraerse. Esta energía, sin embargo, implica que las binarias incrementan su energía orbital (negativa) y que las colisiones con las estrellas del medio se vuelven más energéticas hasta que, finalmente, ocurre una colisión

en la que la binaria es arrojada fuera del sistema; al ocurrir esto, se pierde la fuente de energía y el centro vuelve a contraerse. Sin embargo, la mayor densidad central hace que se vuelvan a formar sistemas binarios, con lo cual se llega a un estado de equilibrio en el que la continua formación de estrellas binarias impide la formación de la singularidad central.

4.2 La formación de galaxias elípticas

Las galaxias elípticas presentan contornos de densidad (brillo superficial) constante de forma elíptica y razón de ejes que varía entre 1 y 3. Originalmente se pensó que sus formas estaban dadas por la rotación del sistema. Sin embargo, a mediados de la década de los 70 fue posible medir la velocidad de rotación de estos sistemas, encontrándose que rotaban con una velocidad muy inferior a la necesaria para explicar su forma, con lo cual el origen de esta forma se convirtió en un misterio. En 1984, Fridmann y Polyachenko publicaron un libro en el que dieron a conocer en occidente gran parte del trabajo teórico sobre dinámica de sistemas estelares desarrollado por investigadores soviéticos (Fridman y Polyachenko, 1984). En particular, mencionan una inestabilidad producida por órbitas radiales en un sistema inicialmente esférico y que hace que éste adopte una forma elipsoidal. Dado que el colapso gravitacional de una nube de partículas (protogalaxia) genera de manera natural un gran número de órbitas radiales, es plausible que esta inestabilidad pueda aparecer durante la formación de estas galaxias y explicar así su forma espacial. Para investigar esta hipótesis, es necesario hacer simulaciones realistas de este colapso gravitacional. Dado que las galaxias son sistemas no colisionales de muchos cuerpos, los métodos de integración directa no son los más apropiados. Por otro lado, como la forma de estas galaxias es elipsoidal, el método de expansión en armónicos esféricos es el más adecuado.

Merritt y Aguilar (1985), y Aguilar y Merritt (1990) usaron un código de N cuerpos de expansión en armónicos esféricos para estudiar el efecto de la llamada "inestabilidad de órbitas radiales" sobre una galaxia esférica y una protogalaxia, respectivamente. La Fig. 9 muestra una secuencia temporal de una simulación del colapso gravitacional y relajamiento de una nube protogaláctica, inicialmente esférica, de 20,000 partículas. Los cuadros presentan el colapso proyectado en el plano que contiene a los ejes mayor y menor de la configuración final. En esta secuencia podemos apreciar claramente cómo la forma elipsoidal es adquirida después del primer colapso y que esta forma es estable. Estos autores realizaron un gran número de experimentos numéricos partiendo de nubes protogalácticas de diversas formas, rotación y temperatura iniciales y concluyeron que para condiciones iniciales suficientemente frías (*i.e.*, energía cinética aleatoria), la inestabilidad de órbitas radiales borra la memoria de las condiciones iniciales y establece una configuración final única, de forma elipsoidal. Esto puede apreciarse, por ejemplo, en la Fig. 10 donde se grafica la concentración final de la galaxia, medida por el cociente del radio que incluye al 50% de la masa del modelo al radio que incluye el 10%, como función de la temperatura inicial de la protogalaxia, medida por el doble de la razón de las energías cinética a potencial iniciales. Los círculos llenos representan una serie de experimentos realizados con un código de N cuerpos que calcula las fuerzas por medio de una expansión en armónicos esféricos hasta de orden octupolar; podemos apreciar que para temperaturas elevadas, la concentración final del modelo se incrementa al disminuir

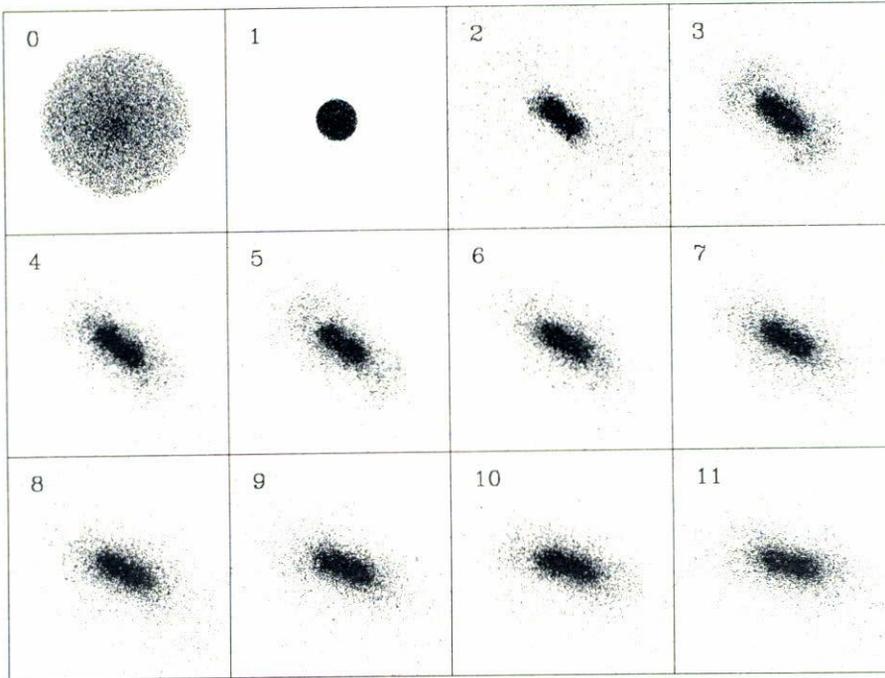


FIGURA 9. Colapso gravitacional de una nube de 20,000 partículas; la nube tiene inicialmente una forma esférica y una energía cinética que es sólo un 1% de la necesaria para estar en equilibrio. Los cuadros presentan el colapso en el plano que contiene a los ejes mayor y menor de la configuración final.

la temperatura inicial, sin embargo, para un valor de $(2T/W) \lesssim 0.10$ la concentración deja de ser sensible a las condiciones iniciales y tiende a un valor asintótico constante, a diferencia de la tendencia mostrada por los círculos abiertos en donde la correlación con temperatura inicial permanece; éstos últimos representan la misma serie de experimentos pero realizados con un código que sólo usa términos monopoles y que, por tanto, fuerza a la galaxia a permanecer esférica e inhibe la inestabilidad. Es importante señalar que, en este caso, el uso de un código de expansión en armónicos esféricos ha permitido a los investigadores explorar el efecto sobre un fenómeno físico dado (colapso y relajamiento gravitacionales) de la presencia o inhibición artificial de una inestabilidad dinámica. Es claro que la facultad de poder inhibir selectivamente diversos aspectos del experimento permiten obtener un mejor entendimiento del fenómeno que se investiga.

Para terminar, señalaremos que hasta finales de la década de los 70 se pensaba que un colapso gravitacional sin disipación, como el mostrado en la Fig. 9, era incapaz de formar sistemas con la forma espacial y perfil de densidad similares a los mostrados por la galaxias elípticas reales. En la década de los 80, al introducirse códigos de N cuerpos de desarrollo en funciones armónicas, se demostró que esta noción era errónea. El problema residía en los códigos de integración directa usados anteriormente para tratar este problema, los cuales, debido a las serias limitaciones en el número de partículas y eficiencia de las computadoras de entonces, limitaban esta clase de experimentos a simulaciones que partían de

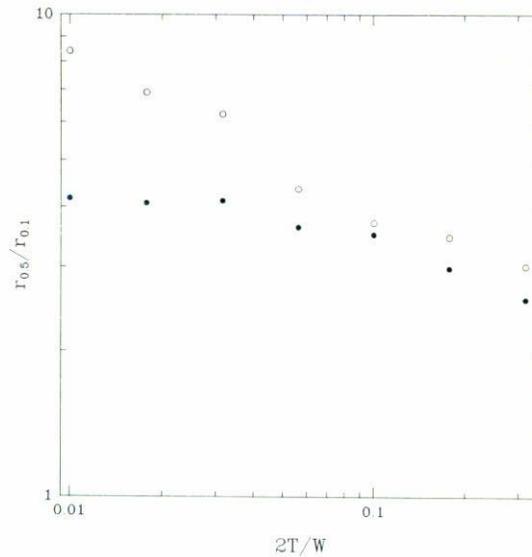


FIGURA 10. Concentración espacial de la galaxia que resulta de un colapso gravitacional, como función de la temperatura inicial de la nube protogaláctica. La concentración esta dada por el cociente de los radios lagrangianos que incluyen al 50% y 10%, respectivamente, de la masa total del sistema. La temperatura está dada por el coeficiente virial ($2T/W$), donde T y W son las energías cinética y potencial, respectivamente (este cociente debe ser igual a uno para un sistema en equilibrio).

condiciones iniciales cercanas al equilibrio. Los nuevos códigos, aunados a los avances en las velocidades de cálculo de las computadoras, permitieron realizar simulaciones a partir de condiciones iniciales lejanas al equilibrio, descubriéndose que el relajamiento producido por un factor de colapso grande es suficiente para producir sistemas muy similares a las galaxias elípticas reales (van Albada, 1982).

4.3. La estructura en gran escala del Universo

Hoy en día es claro que la distribución de materia en el Universo es jerárquica, *i.e.*, las estrellas tienden a agruparse en galaxias, las galaxias se agrupan en cúmulos de galaxias, los cúmulos de galaxias tienden, a su vez, a agruparse en grandes conglomerados denominados super-cúmulos de galaxias y así, sucesivamente, hasta las distancias más lejanas que hemos podido observar directamente (Gregory y Thompson, 1982; Geller y Huchra, 1989). Dado que a las velocidades típicas que presentan las galaxias, éstas no pueden haberse desplazado una distancia mayor a los ~ 30 millones de años-luz,* es claro que toda estructura o conglomerado cuyo tamaño excede esta longitud (denominada "estructura en gran escala del Universo") no puede deber su origen a procesos dinámicos.

Las únicas pistas con que contamos sobre los procesos que determinaron la distribución de materia en gran escala en el Universo son la observación de la radiación cósmica de fondo y de la distribución en gran escala de las galaxias, tal como la observamos hoy en

*Un año-luz es la distancia recorrida por la luz durante un año, $\sim 9 \times 10^{15}$ m.

día. La radiación cósmica de fondo nos permite observar la “fotósfera” del Universo, es decir, la última superficie dispersora de luz en el momento en que, debido al enfriamiento gradual del Universo, los electrones se recombinan con los núcleos atómicos y el Universo se vuelve transparente a la radiación. Desgraciadamente, la radiación cósmica de fondo no nos provee de un número adecuado de restricciones para seleccionar, de entre todas las hipótesis, la más viable para explicar el origen de la estructura en gran escala.

Las observaciones directas de la distribución de galaxias, por otro lado, pueden darnos la información adicional que necesitamos. Sin embargo, debido a que las distancias a las que la distribución de galaxias ha sido estudiada es apenas comparable a la distancia de influencia dinámica, esta distribución observada no corresponde a la producida por los procesos que nos interesan, sino que ésta última ha evolucionado dinámicamente bajo la influencia de la fuerza de gravedad para producir la distribución observada. Es claro que para poder confrontar las características de las perturbaciones de densidad predichas por las hipótesis cosmológicas con las observaciones de galaxias, es necesario simular la evolución dinámica de las predicciones teóricas hasta el momento presente.

Los catálogos de galaxias más completos hoy en día muestrean al Universo en escalas de hasta ~ 300 millones de años-luz (Huchra *et al.*, 1988). El tamaño típico del halo de una galaxia luminosa es del orden de cien mil años-luz. Esto implica que una simulación de la evolución dinámica de una porción del Universo de estas dimensiones debe tener una resolución espacial de al menos una parte en 10^3 . Si deseamos averiguar además algo sobre la estructura interna de las galaxias que se forman, digamos con una resolución de una parte en 10, necesitamos entonces una resolución espacial de una parte en 10^4 . La densidad media de galaxias es de $\sim 3 \times 10^{-4}$ galaxias por millón de año-luz cúbico, lo cual implica del orden de 10^4 galaxias dentro del espacio abarcado por la simulación. Si recordamos que queremos una resolución lineal de una parte en 10 para cada galaxia, esto nos da un total de $\sim 10^7$ partículas.

Al momento presente, no existe programa de N cuerpos o computadora en qué realizarlo, que pueda efectuar una simulación de las características esbozadas arriba, lo que ha dado lugar a que las investigaciones de este problema se dividan en dos campos: simulaciones interesadas en escalas de decenas de millones de años-luz que no consideran los detalles de formación de galaxias, y simulaciones que, partiendo de un subconjunto de las partículas al momento final de las simulaciones anteriores, se concentran en la formación de galaxias en escalas de alrededor de un millón de años-luz. Las características del problema, número de partículas elevado, baja resolución espacial y simulación de una porción del Universo que se extiende al infinito en todas direcciones, hace que los códigos de N cuerpos de Fourier sean los más adecuados para la primera clase de simulaciones (Klypin y Shandarin, 1983; Miller, 1983; Centrella y Melott, 1983; White *et al.*, 1983). Para la segunda clase de simulaciones es necesario tener una mayor resolución espacial, lo que ha dado lugar al desarrollo de códigos híbridos de N cuerpos en los que se emplea el método de integración directa para calcular la fuerza debida a los vecinos más cercanos y el método de Fourier para el resto del sistema (Efstathiou y Eastwood, 1981). Porter (1985) ha utilizado también un nuevo tipo de programa de N cuerpos denominado “de árbol”, mismo que veremos en la Sec. 6.3.

La Fig. 11b muestra los resultados de una “simulación cosmológica” de una porción del Universo de 1,000 millones de años-luz de diámetro (White *et al.*, 1987). La simulación ha

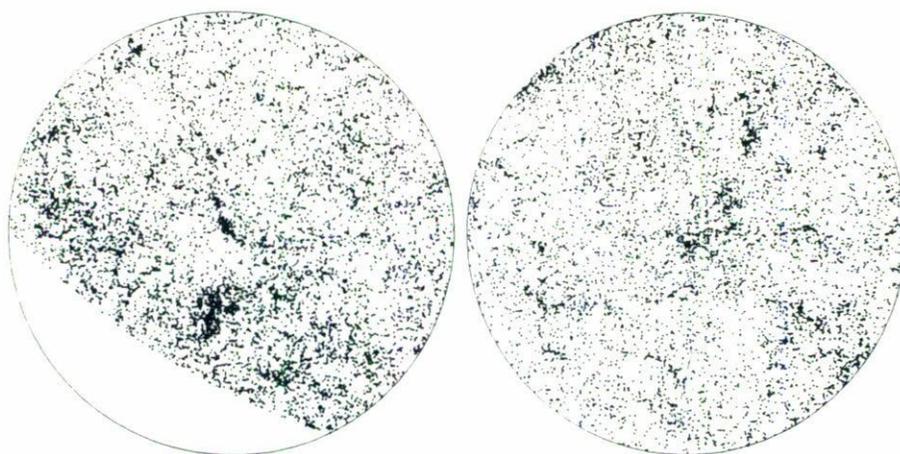


FIGURA 11. (a) Proyección en el cielo de las galaxias en el catálogo de Huchra y Geller (Huchra *et al.*, 1988), y (b), proyección correspondiente de una simulación cosmológica de la formación de estructura, a partir del colapso gravitacional, de un campo de fluctuaciones de densidad en un cubo de 10^9 años-luz de diámetro realizado por White *et al.*(1987).

sido realizada con 216,000 partículas, cada una de las cuales representa una masa de un poco más de 10 galaxias, y un código de N cuerpos híbrido tipo P^3M (véase la Sec. 3.3) con una rejilla cartesiana de 64^3 elementos para la parte de Fourier. La Fig. 11a muestra la distribución real de galaxias en el cielo de acuerdo al catálogo compilado por Huchra *et al.* (1988) y utilizando la misma proyección. La región inferior donde no aparecen galaxias es debida a la cobertura limitada del catálogo. Es a través de comparaciones cuantitativas, y aun cualitativas, de los resultados numéricos y las observaciones, que se pueden poner a prueba las hipótesis sobre el origen de la estructura en gran escala del Universo.

Los programas de N cuerpos han jugado un papel importantísimo en la transformación de la cosmología, que pasó de ser una disciplina en el ámbito esencialmente filosófico a una ciencia sujeta a pruebas experimentales, ya que las simulaciones “cosmológicas” han permitido poner a prueba diversas hipótesis sobre el origen de la estructura en gran escala del Universo, hipótesis que describen las condiciones en el Universo en una época tan temprana que no es directamente accesible a nuestras observaciones. Las simulaciones cosmológicas aparecieron por primera vez en la década de los 70 y tuvieron un gran auge en la siguiente década, cuando permitieron desechar hipótesis como la de un Universo dominado por neutrinos cuya masa no es igual a cero, y han puesto en serias dudas a la mayoría de las hipótesis convencionales dando pie a que se empiecen a considerar alternativas exóticas como las cuerdas cósmicas (Press y Spiegel, 1989). Estas simulaciones han dado también un tremendo impulso a una disciplina cuya misma existencia era considerada absurda hasta hace unas décadas, la cosmología observacional, ya que al hacer posible la comparación de las hipótesis cosmológicas con las propiedades observadas del

Universo en gran escala, han surgido programas observacionales ambiciosos que pretenden estudiar la distribución espacial de galaxias en nuestro entorno cósmico.

5. LÍMITES DE VALIDEZ

Los programas de N cuerpos son, hoy en día, herramientas indispensables en el estudio de la dinámica de sistemas estelares. Sin embargo, es importante señalar que éstos no son más que una herramienta que tiene a su disposición el investigador, y que como tal deben ser empleada cuidadosamente y en situaciones en las que su uso sea apropiado, sin que garanticen, por sí solos, un entendimiento del fenómeno estudiado, aun cuando el fenómeno haya sido correctamente simulado.

Tal vez la noción más importante que hay que tener presente al realizar un experimento de N cuerpos, es el hecho de que dicho experimento sólo puede emular apropiadamente el fenómeno que nos interesa dentro de intervalos dinámicos limitados de extensión, tiempo, y demás propiedades físicas de interés, siendo siempre la selección del código de N cuerpos empleado un compromiso entre las limitaciones inherentes del método y la naturaleza de las propiedades del fenómeno que nos interesan.

Al diseñar un experimento numérico es necesario partir del fenómeno que se pretende estudiar: éste es el que decidirá el tipo de programa de N cuerpos a usar y, siempre que sea posible, los resultados obtenidos deberán ser comparados con resultados obtenidos con un programa distinto. El programa seleccionado deberá emplearse en realizar simulaciones de control de algún fenómeno, similar al que nos interesa, pero cuyo comportamiento sea ya conocido. Debemos recordar también que los resultados obtenidos en un experimento numérico constituyen una medición y que, como tales, deben asociarse siempre con un intervalo de incertidumbre; es todavía común ver en publicaciones resultados numéricos que son presentados sin dar alguna idea de su precisión. Un punto muy importante es la cuestión de la granularidad del modelo empleado: las condiciones iniciales utilizadas en un experimento son, la mayoría de las veces, realizaciones azarosas de un modelo continuo, y como tales, están sujetas a fluctuaciones estadísticas que pueden afectar los resultados finales. Al estudiar un fenómeno deberá procurarse realizar un "ensemble" de experimentos que partan de distintas realizaciones azarosas del mismo modelo teórico de condiciones iniciales y reportar resultados promediados sobre dicho "ensemble". Dada la elección entre un "ensemble" de experimentos realizados con un número modesto de partículas, o un sólo experimento con un número elevado de partículas, es siempre preferible la primera opción. Finalmente, es importante notar que aunque la rapidez de la computadora empleada es un factor de consideración en la calidad de un experimento numérico, éste no es, en general, un factor imprescindible o suficiente.

A continuación ilustramos algunos errores o imprecisiones comunes cometidos al efectuar experimentos numéricos con programas de N cuerpos; cabe señalar que los ejemplos aquí discutidos han sido publicados en revistas de investigación con arbitraje internacional. Por discreción, no hemos empleado las figuras de los artículos originales o citado los trabajos, sino que hemos repetido los experimentos para ilustrar el trabajo presente. El punto importante es ilustrar los errores de diseño en que se puede caer al realizar un

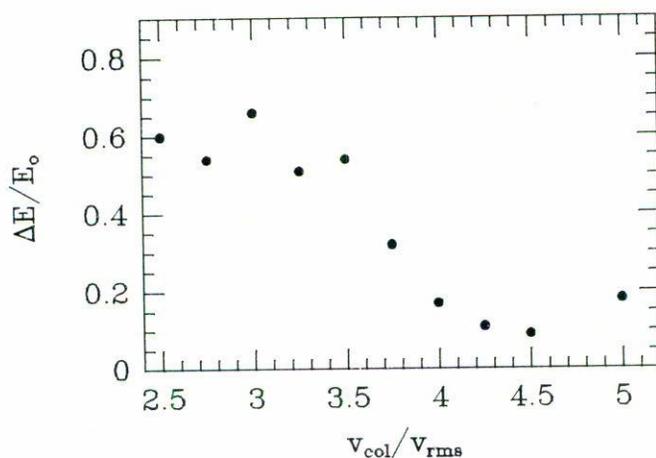


FIGURA 12. Cambio porcentual en la energía de una galaxia que sufre una colisión con otra, de igual masa, como función de la velocidad relativa de colisión, en unidades de la velocidad rms de la galaxia. Todos los encuentros son frontales. Las galaxias son realizaciones azarosas de 30 partículas de un modelo de Plummer [Ec. (12)]. Los experimentos han sido realizados con un código de integración directa.

experimento numérico (errores que han pasado la auscultación de un árbitro), no señalar “culpables”.

La Fig. 12 muestra los resultados de un estudio del calentamiento producido por una colisión entre galaxias esféricas. Se trata de 10 experimentos en los que se ha simulado la colisión entre dos galaxias esféricas de 30 partículas cada una, que parten de la misma posición pero con velocidades distintas. La figura muestra el cambio porcentual en la energía de ligadura de la galaxia que sirve como blanco, en función de la velocidad de colisión. Es de esperarse que a medida que aumenta la velocidad de colisión el calentamiento disminuya, tendencia que puede apreciarse en la figura. Sin embargo, aunado a este comportamiento se observa una oscilación cuya amplitud no es despreciable. Esta oscilación es espúrea y tiene su origen en el siguiente fenómeno: debido a limitaciones de cómputo, los experimentos han sido realizados usando un número muy reducido de partículas. Esto implica que la realización azarosa usada como condición inicial tendrá oscilaciones alrededor del modelo teórico debido a su granularidad. Estas oscilaciones son inevitables dado el número reducido de partículas y no representan un error en la realización azarosa. El problema reside en que se ha utilizado la misma realización azarosa para llevar a cabo la secuencia de colisiones, con lo cual, la fase de la oscilación en la que se encuentren las galaxias al momento de chocar estará correlacionada con la velocidad de la colisión. El efecto de la colisión sobre la galaxia blanco dependerá, obviamente, de la concentración del modelo en el momento del máximo acercamiento. Aunque las oscilaciones del modelo numérico usado están impuestas por la capacidad de las computadoras disponibles en ese momento, se pudo haber diseñado una secuencia más adecuada de experimentos en los que se efectuara más de un experimento, con realizaciones azarosas distintas, para cada valor de la velocidad de colisión, y reportar el promedio, e intervalo de variación, de los resultados obtenidos.

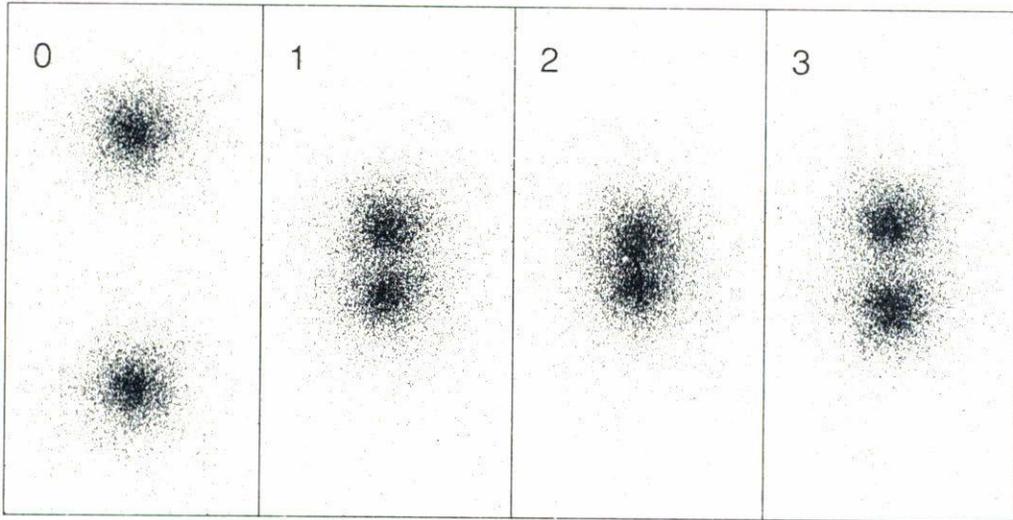


FIGURA 13. Colisión de dos galaxias inicialmente esféricas y de igual masa. Cada galaxia consta de 6,000 partículas y la figura presenta proyecciones en el plano del encuentro al inicio del experimento, dos tiempos intermedios y al final del mismo. El experimento ha sido realizado con un código de Fourier usando una red cartesiana de 64 nodos por lado.

La Fig. 13 muestra la proyección sobre el plano orbital de una colisión frontal entre dos galaxias inicialmente esféricas. Cada galaxia contiene 6,000 partículas, razón por la que las oscilaciones del ejemplo anterior no son importantes en este caso. Sin embargo, resulta sospechoso el hecho de que el experimento sea iniciado cuando las dos galaxias están ya muy cerca una de la otra y termina cuando no se han separado todavía. La razón es que se ha usado un código de N cuerpos de Fourier para realizar esta simulación. Según hemos visto en la Sec. 3.3, el método de Fourier tiene una resolución espacial muy pobre; en este caso particular se ha usado una red cartesiana con 64 nodos por lado, lo cual nos da una resolución muy pobre, misma que es aparente en la baja concentración de las galaxias utilizadas (compárese con la galaxia obtenida al final de la simulación de la Fig. 9). El problema radica en que se ha empleado una herramienta que no es adecuada para el fenómeno que se estudia: las galaxias son sistemas de alta concentración espacial y requieren, por tanto, de una alta resolución espacial. Un código de N cuerpos de expansión en armónicos esféricos hubiera sido más indicado, o en su defecto, un código de integración directa. En el experimento aquí mostrado, el número elevado de partículas utilizado es desperdiciado por la pobre resolución espacial.

La Fig. 14 ilustra las consecuencias que puede tener una mala elección de la resolución espacial dada por el radio de dilución (véase la Sec. 3.1). En este caso se muestra la evolución temporal de los radios lagrangianos que contienen un 5%, 10%, 20%, ..., 90% de la masa total del modelo, el cual es una realización azarosa de 5,000 partículas de un modelo de galaxia con un perfil de densidad llamado "perfil de de-Vaucouleurs" [$\rho \propto \exp(-r^{1/4})$]. La unidad de longitud en esta simulación es el radio de la esfera que contiene la mitad de la masa del modelo (radio medio de masa). El radio de dilución usado es

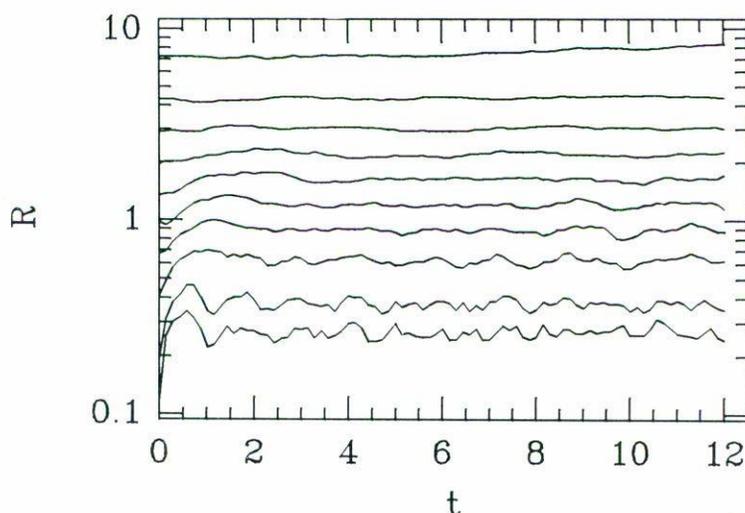


FIGURA 14. Evolución temporal de los radios de esferas que contienen a un 5%, 10%, ..., 90% de la masa total de una realización azarosa de 5,000 partículas de una galaxia esférica con perfil de densidad de de-Vaucoulerus. La unidad de longitud es el radio medio de masa inicial y la unidad temporal es el período de la órbita circular de radio igual al radio medio de masa. El radio de dilución, que limita la resolución espacial de la simulación, es igual a 0.20 en estas unidades. Se ha utilizado un código de expansión en armónicos esféricos para realizar esta simulación.

igual a un 20% del radio medio de masa. Nótese cómo a medida que transcurre el tiempo aparece una oscilación radial que afecta una región cuyo radio es ~ 5 veces mayor que el radio de dilución. Es común pensar que los fenómenos físicos que se manifiestan con una longitud de onda mayor que, digamos el doble del radio de dilución, "para estar seguros", no se ven afectados por la resolución espacial finita del código de N cuerpos. Como puede apreciarse en esta figura, ésta es una suposición peligrosa de hacer. Lo que sucede en este caso es que aun cuando el radio de dilución es pequeño, el perfil de de-Vaucouleurs es muy concentrado y hace que el 26% de la energía potencial total del sistema esté dada por la masa contenida dentro de una esfera de radio igual al radio de dilución (10% de la masa total del sistema). Este último ejemplo no está tomado de un trabajo publicado sino que fue realizado por el autor, quien, afortunadamente, nunca llegó a publicarlo.

Para terminar esta sección hacemos referencia al trabajo de Holmberg (1941) que mencionamos en la Sec. 1, ya que este trabajo ilustra el hecho de que la computadora no es el elemento más importante en una simulación numérica. Como vimos en esa sección, Holmberg conjeturó que las colisiones entre galaxias debían ser altamente inelásticas, de manera que encuentros hiperbólicos entre galaxias podrían resultar en un sistema binario gravitacionalmente ligado. En 1941 no había computadoras a las que Holmberg pudiera tener acceso. Sin desanimarse por esto, Holmberg ideó la manera de realizar un experimento de N cuerpos aprovechando el hecho de que la iluminación de una fuente luminosa decae con la distancia de la misma manera que la fuerza de gravedad. En lo que constituye la primera simulación de N cuerpos publicada en astronomía, Holmberg realizó un experimento en el que las partículas son sustituidas por bombillas eléctricas cuya intensidad luminosa es proporcional a la masa que representan. La fuerza sobre ellas es obtenida midiendo la iluminación total en la posición de cada partícula. Aunque

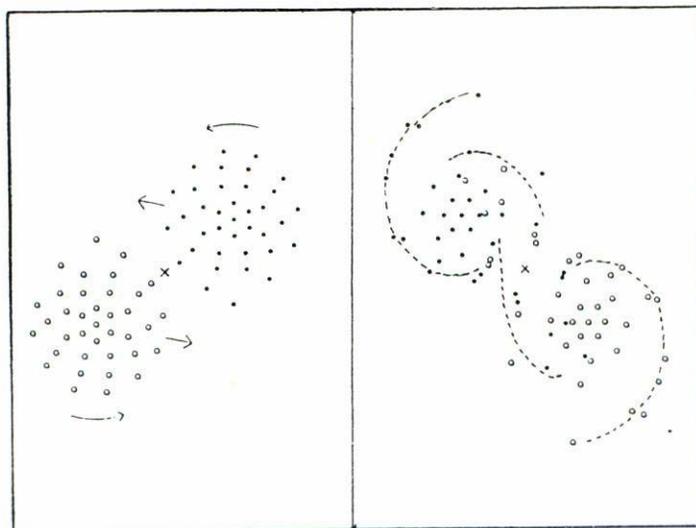


FIGURA 15. Deformación producida por las fuerzas de marea sobre dos galaxias de disco que pasan cerca una de otra. En esta simulación cada galaxia está representada por 37 bombillas eléctricas que se deslizan sobre la superficie de una mesa. Nótese cómo en la configuración final (cuadro de la derecha) las galaxias presentan estructuras elongadas en forma de brazos espirales.

los resultados cuantitativos de Holmberg no son correctos, las características cualitativas de un encuentro entre galaxias de disco pueden ser observadas en sus resultados, en particular, la formación de los llamados “puentes de marea” que constituyen estructuras elongadas diametralmente opuestas y en forma de brazos espirales que son producidas por las fuerzas de marea (véase la figura 15). El artículo de Holmberg nos demuestra que en una simulación numérica el elemento más importante no es la computadora, sino el ingenio humano. Este trabajo debe ser lectura obligada para todo investigador que emplea códigos de N cuerpos.

6. PROSPECTOS A FUTURO

En esta sección presentamos algunos avances recientes que parecen ser promisorios en el campo del problema de N cuerpos. Hablaremos primero de avances que han sido posibles gracias a los adelantos tecnológicos en el campo de la computación (planetarios digitales y computadoras de arquitectura paralela), y luego de uno que es debido a un nuevo algoritmo (códigos de árbol).

6.1 Planetarios digitales

El sistema solar es un sistema de pocos cuerpos que presenta problemas interesantes no resueltos tal como el de su estabilidad. Por ejemplo, la órbita de Plutón cruza la órbita de Neptuno, de manera que a menos que exista algún mecanismo que lo impida, un encuentro cercano entre estos dos planetas ocurrirá eventualmente. En este caso particular de pocos

cuerpos, es posible construir computadoras cuya arquitectura ha sido optimizada para resolver este problema. Applegate *et al.* (1985) reportan la construcción de una computadora, el "Planetario Digital", que consiste en un anillo de 10 procesadores "planetarios" independientes que reciben instrucciones de un procesador central. En este caso cada procesador planetario contiene la información de un planeta y la información de todo el sistema es circulada entre todos los procesadores después de 9 ciclos de comunicación. El planetario digital funciona como un procesador esclavo que es controlado por una computadora personal. Su tamaño físico es de sólo 0.036 m^3 , consume 140 W de potencia y alcanza velocidades de cálculo de 10 Mflops.* El uso de componentes convencionales hace que su costo sea muy reducido. Applegate *et al.* (1986) han utilizado el planetario digital para efectuar una integración de las órbitas de los 5 planetas más externos del sistema solar, 112 millones de años hacia el pasado y un intervalo igual hacia el futuro, sin encontrar evidencia de inestabilidad. Estos autores hacen notar que una integración similar en una computadora DEC VAX 11/780 hubiera requerido de aproximadamente un año de procesador, mientras que en el planetario digital tomó solo 6 días.

Ito *et al.* (1990) y Sugimoto *et al.* (1990), han llevado un paso adelante la idea del planetario digital y han construido el procesador "GRAPE", que consiste en una unidad de cómputo con arquitectura de cálculo concatenado (*pipeline*) en el que la fórmula de la interacción gravitacional [Ec. (1)] ha sido implementada en los circuitos del procesador (*hardware*). El procesador GRAPE tiene su propia memoria y actúa como un coprocesador matemático de una estación de trabajo. La estación de trabajo es la que efectúa la integración de las ecuaciones de movimiento por el método de integración directa y cada vez que necesita el valor de las fuerzas sobre cada partícula, llama al procesador GRAPE, el cual, debido a su arquitectura, es capaz de calcular todas las fuerzas en un tiempo muy corto; al momento presente, los autores reportan una velocidad de cálculo de 0.24 Gflops.** Ito *et al.* están desarrollando ahora un procesador de arquitectura paralela que debe acelerar el cálculo de fuerzas por un factor igual al número de procesadores independientes. Resulta interesante especular acerca de las velocidades que será posible alcanzar en un futuro inmediato con procesadores dedicados que tienen un costo muy inferior al de una supercomputadora de uso general.

6.2 Computadoras de arquitectura paralela

La mayor parte de las computadoras que existen hoy en día son máquinas de propósito múltiple en las que un procesador único opera sobre un solo dato a la vez (SISD: *Single Instruction stream, Single Data stream*). Es claro que si la naturaleza del problema a resolver es tal que se necesita realizar la misma secuencia de operaciones sobre un gran número de datos, una computadora que tuviese varios procesadores que pudiesen efectuar la misma instrucción sobre varios datos a la vez nos permitiría resolver nuestro problema en un tiempo mucho menor que con una computadora convencional. Estas máquinas, llamadas SIMD (*Single Instruction stream, Multiple Data stream*), existen y la llamada

*Mega-flops: 10^6 operaciones de aritmética de punto flotante por segundo.

**Giga-flops: 10^9 operaciones de aritmética de punto flotante por segundo.

“Connection Machine” de la compañía Thinking Machines Corporation representa el ejemplo más exitoso a la fecha (Hillis, 1985, 1987).

Hay una dificultad básica a la que se enfrenta una computadora de este tipo, y es que, a menos que sea empleada y diseñada para un problema específico, las conexiones entre los procesadores deben ser cambiables de acuerdo con la naturaleza del problema a resolver. Por ejemplo, una simulación hidrodinámica en la que cada procesador simula un elemento del fluido, necesita de conexiones entre procesadores vecinos inmediatos, mientras que un proceso de convolución de dos imágenes, en las que cada procesador representa un pixel de una imagen, necesita una geometría de conexiones completamente distinta. Una manera obvia de resolver este problema es construyendo una computadora en la que todos los procesadores tienen conexiones con todos los demás. En la práctica, esto no es realizable, ya que se requieren $(N/2)(N-1)$ conexiones en una máquina con N procesadores, número que crece muy rápidamente.

El éxito de la “Connection Machine” estriba en el uso de una topología de hipercubo para las conexiones entre procesadores. Un hipercubo de dimensión d consiste en 2^d nodos en los que cada uno se comunica, de manera directa, con d nodos vecinos. Es posible demostrar que un hipercubo de dimensión d es la manera óptima de conectar 2^d procesadores con una red de conexiones de propósito múltiple, ya que a lo más se necesitan d conexiones para establecer comunicación entre dos nodos cualesquiera, requiriendo para ello de solo $d2^{d-1}$ conexiones. La “Connection Machine” consiste en 2^{11} nodos de proceso interconectados con la topología de un hipercubo de 11 dimensiones, contando cada nodo con un número máximo de 32 procesadores para un gran total de 65,536 procesadores. Aunque los procesadores empleados tienen una capacidad de cómputo un poco menor al de una computadora personal, la “Connection Machine” alcanza velocidades típicas de 0.1 Gflops, o sea, comparables a las supercomputadoras más rápidas en el mercado.

En el caso particular de un código de N cuerpos en el que la fuerza de interacción es de largo alcance, es necesario establecer comunicación entre todos los procesadores. Brunet *et al.* (1990) han implementado un código de N cuerpos de integración directa utilizando un esquema óptimo de comunicación entre los nodos en el que la fuerza en cada partícula es calculada al tiempo que la información de cada una de ellas es circulada por el hipercubo de procesadores; en este caso el tiempo de cómputo se escala como $N^2/2^d$, que aunque adolece del escalamiento cuadrático en el número de cuerpos, característico del método de integración directa, tiene el factor 2^{-d} que reduce en gran medida el tiempo requerido. Estos autores reportan velocidades de hasta 5.2 Gflops, entre las más altas alcanzadas hasta ahora en cualquier clase de computadora.

6.3 Códigos de “árbol”

La mente humana organiza la información que recibe del mundo exterior de manera jerárquica, es decir, con una cantidad de detalle que depende directamente de la importancia que tiene esa información. Así, por ejemplo, conocemos con mayor detalle la vida de nuestros parientes cercanos que la de parientes lejanos. Este esquema jerárquico de organización de información es muy eficiente para sobrevivir, sin ser agobiado, en un medio ambiente dinámico y rico en información. Este esquema organizativo ha servido

de modelo a un nuevo algoritmo para tratar el problema de N cuerpos: el algoritmo de "árbol".

Según hemos visto en la Sec. 2, la naturaleza de la fuerza experimentada por una partícula depende de la distancia a la que se encuentran las partículas responsables de esta fuerza. En un código de árbol, la información del sistema de N cuerpos es guardada en una estructura jerárquica, llamada árbol, en la que la distancia entre la información de dos partículas está en función directa de la distancia física entre ellas; esto permite que al calcular la fuerza sobre una partícula, un recorrido parcial del árbol, en el que la información de nodos lejanos es recobrada con menor detalle, sea posible, ahorrando así tiempo de cálculo de una manera natural al problema. Existen en la actualidad dos tipos de árbol que han sido implementados en códigos de N cuerpos: árboles binarios y árboles octales.

En un árbol binario (Appel, 1981, 1985; Jernigan, 1985; Porter, 1985), la información de las partículas individuales está en el nivel más inferior; en el siguiente nivel las partículas son apareadas con sus vecinos más cercanos y la información de las N partículas es sustituida por la información de los $N/2$ centros de masa de tales pares. La misma operación es usada para definir los niveles superiores del árbol en la que se guarda la información de los centros de masa de pares de pares de partículas y así sucesivamente hasta llegar al nivel superior que consta de un solo nodo que contiene la información del centro de masa de todo el sistema. Un ejemplo de árbol binario es mostrado en la Fig. 16a. En un árbol octal (Barnes y Hut, 1986; Barnes, 1986), partimos de un cubo que contiene por completo al sistema, el cual se subdivide en 8 octantes, cada uno de los cuales es a su vez dividido en octantes y así sucesivamente, hasta que queda sólo una partícula en cada división. La información del centro de masa de las partículas contenidas en cada división es guardada en los nodos del nivel correspondiente del árbol octal. Un ejemplo (en dos dimensiones y cuadrantes en lugar de octantes) de un árbol octal es mostrado en la Fig. 16b. El número de niveles de un árbol que describe a un sistema de N partículas es típicamente del orden de $\log_k(N)$, donde k es igual a 2 para un árbol binario, y 8 para un árbol octal.

Un ejemplo del cálculo de la fuerza sobre una partícula, usando un árbol binario, se muestra en la Fig. 17, donde partiendo de la partícula en cuestión, recorreremos el árbol examinando nodos cada vez más superiores a medida que nos alejamos del origen de nuestro recorrido. Se necesita entonces un criterio para decidir hasta qué nivel debemos recorrer el árbol al calcular la fuerza sobre una partícula y reglas de composición para propagar la información física del sistema de un nivel a otro del árbol. Un criterio que ha sido usado con éxito en códigos de N cuerpos de este tipo, es comparar el diámetro d_l del grupo de partículas contenidas en un nodo l , con la distancia r entre la partícula para la que se calcula la fuerza y el centro de masa del nodo en cuestión:

$$\left(\frac{d_l}{r}\right) < \theta_0. \quad (22)$$

Si este criterio no se cumple, entonces es necesario descender a un nivel inferior y examinar cada uno de los k nodos del nivel $l+1$ que descienden del nodo examinado. Es claro que el parámetro θ_0 fija la resolución angular del cálculo de fuerzas.

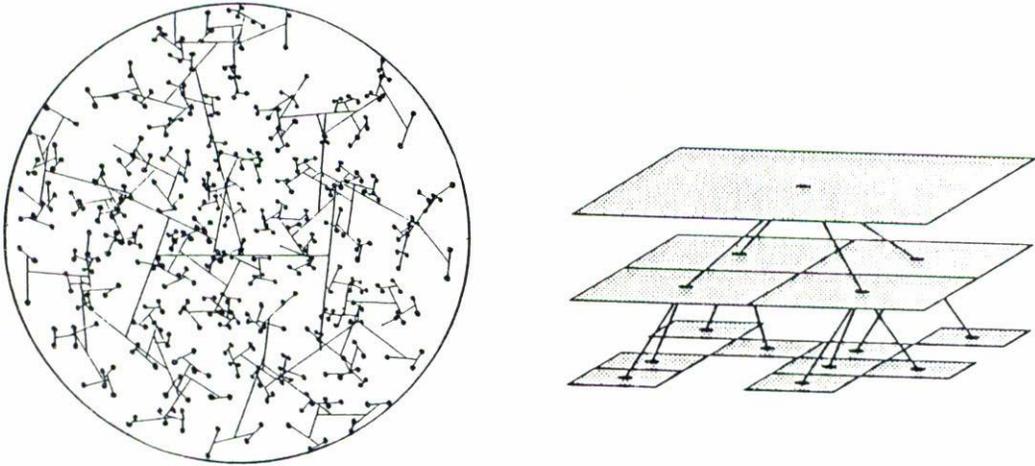


FIGURA 16. Ejemplos en dos dimensiones de un árbol binario (a) y un árbol octal (b).

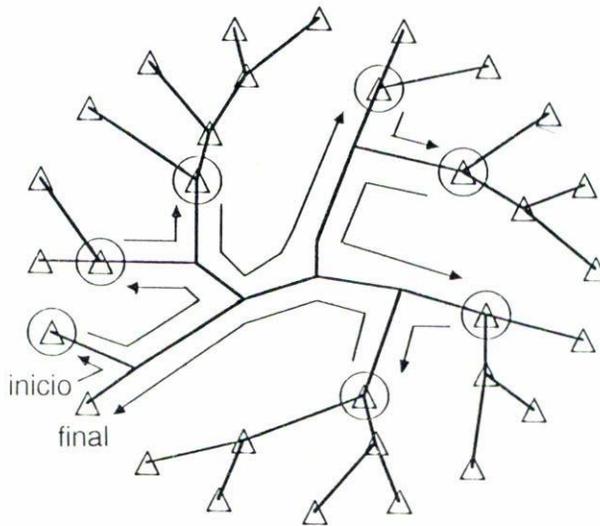


FIGURA 17. Ejemplo del recorrido de un árbol binario para calcular la fuerza sobre una partícula; nótese cómo la profundidad del recorrido es función de la distancia a la partícula de interés.

Dado que el criterio usado implica una resolución angular constante, es natural guardar la información de las partículas contenidas en un nodo como una expansión en armónicos esféricos, donde el número de términos considerados en esta expansión determina, a precisión constante, el parámetro de resolución θ_0 . Si, por ejemplo, M_l , \mathbf{r}_l y \mathbf{Q}_l son la masa

total, posición del centro de masa y el tensor de momento cuadrupolar de las partículas contenidas en el nodo l y denotamos con los índices $kl, kl + 1, \dots, kl + (k - 1)$ los k nodos por debajo del nodo l , las fórmulas de composición son entonces (Goldstein, 1980; Press, 1986):

$$\begin{aligned}
 M_l &= \sum_{i=kl}^{kl+(k-1)} M_i, & \mathbf{r}_l &= (M_l)^{-1} \sum_{i=kl}^{kl+(k-1)} M_i \mathbf{r}_i, \\
 \mathbf{Q}_l &= \sum_{i=kl}^{kl+(k-1)} \mathbf{Q}_i + \sum_{i=kl}^{kl+(k-1)} M_i (3\mathbf{r}_i \mathbf{r}_i - r_i^2 \mathbf{1}),
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

donde $\mathbf{1}$ es la matriz unitaria de 3×3 . Nótese que la nomenclatura usada para los índices de los nodos hace muy sencillo el movernos de un nivel a otro en el árbol: al descender en el árbol, basta una multiplicación por k para encontrar el primer nodo. Al ascender en el árbol, basta una división entre k , la parte entera del cociente nos indica el nodo superior y el residuo nos proporciona el número de subnodo.

Si la fuerza de interacción entre las partículas i y j es de la forma $\mathbf{F}_{ij} = m_i m_j f(r) \mathbf{r}$, donde $f(r)$ es una función escalar, la fuerza que siente una partícula de masa m debido al grupo de partículas contenidas en el nodo l es

$$\frac{\mathbf{F}}{m} = M_l f(r_l) \mathbf{r}_l + \frac{f'(r_l)}{r_l} (\mathbf{Q}_l \cdot \mathbf{r}_l) + \frac{1}{2} \left[\frac{f''(r_l)}{r_l^2} (\mathbf{r}_l \cdot \mathbf{Q}_l \cdot \mathbf{r}_l) + \frac{f'(r_l)}{r_l} \left(\text{tr } \mathbf{Q}_l - \frac{\mathbf{r}_l \cdot \mathbf{Q}_l \cdot \mathbf{r}_l}{r_l^2} \right) \right].
 \tag{24}$$

Los códigos de N cuerpos que usan el algoritmo de árbol son, en general, mucho más rápidos que un código de integración directa, ya que, típicamente, es necesario calcular del orden de $\log_k(N)$ interacciones por partícula (Hernquist, 1987). Además, al reflejar el árbol la estructura jerárquica misma del sistema, el algoritmo no impone sobre el sistema ninguna limitación sobre la simetría global del mismo, a diferencia de los códigos de expansión en funciones armónicas. Por último, dado que no es necesario introducir una red cartesiana fija, como es el caso de los códigos de Fourier, sino que el árbol representa una red lagrangiana, la resolución espacial del código se ajusta a las inhomogeneidades del sistema. Por todo esto, los códigos de árbol son, al momento presente, los programas más eficientes para estudiar la dinámica de sistemas de muchos cuerpos, siendo limitante principal la búsqueda de nodos que satisfacen el criterio de resolución espacial, y, para el caso de códigos que usan árboles binarios, la velocidad a la que el árbol puede ser regenerado y que se escala con el número de partículas como $N \log(N)$ (Hernquist, 1987). Rutinas de regeneración parcial del árbol podrían mejorar sustancialmente la eficiencia de estos códigos. Al momento presente existe sólo un número muy limitado de trabajos que han sido publicados y que hacen uso de esta técnica (Porter, 1985; Barnes, 1988; Bouchet y Hernquist, 1988; Katz, 1991).

7. CONCLUSIONES

La simulación numérica constituye, hoy en día, un pilar adicional de la ciencia que complementa los ya tradicionales de la teoría y la experimentación. Este hecho es reconocido en sociedades científicas internacionales y universidades que han organizado simposios, publicado libros, dedicado revistas e incluido cursos dedicados a esta metodología. La habilidad de poder diseñar un experimento numérico que pueda emular un fenómeno físico, que por sus características es imposible o muy difícil de recrear en un laboratorio, debe ser parte del currículum básico de los físicos que se forman en la actualidad. Hoy en día existen muchos problemas en la astronomía moderna que sólo pueden ser estudiados por medio de simulaciones numéricas, *e.g.*, el proceso de formación de una estrella de neutrones o las condiciones extremas que se dan en la proximidad de un agujero negro. Dentro de este tipo de problemas el "clásico" y con mayor tradición es el problema de N cuerpos.

En este artículo hemos presentado una panorámica moderna del estado actual del problema de N cuerpos en la astronomía y de sus perspectivas hacia el futuro. Hemos examinado con cierto detalle las técnicas usadas y dado ejemplos de actualidad del uso de cada una de ellas. Se han discutido también los peligros inherentes en simulaciones que no han sido diseñadas adecuadamente y en los excesos que pueden ocurrir al aceptar resultados numéricos que no han sido racionalizados de alguna manera. Esperamos que el lector haya obtenido un esbozo de la importancia de este tipo de códigos en la Astronomía en particular, y de la física, en general, ya que estos códigos se aplican de igual manera a todo sistema formado de partículas, o que puede de alguna manera modelarse por medio de una representación granular, y cuyas fuerzas están dadas por las mismas partes del sistema. Esperamos que este trabajo haya contribuido también a formar en la mente del lector una opinión diferente a la expresada por la Real Academia de la Lengua Española en la decimonovena edición del *Diccionario de la Lengua Española* que asevera:

Simular: Representar una cosa, fingiendo o imitando lo que no es.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece a J. Barnes, P. Hut, D. Porter y S. White el haber permitido el uso de algunas figuras tomadas de sus trabajos, a H. Velázquez por haber realizado los cálculos necesarios para elaborar la Fig. 9 y a J. Bohigas, R. Costero, A. Serrano, F. Graef y H. Velázquez el haber leído el manuscrito original de este artículo y haber señalado errores en el mismo. Parte de los cálculos necesarios para realizar algunas de las figuras fueron efectuados en la computadora CRAY-Y/MP de la UNAM. Este trabajo fue apoyado con fondos del proyecto IN-103189 de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la UNAM.

Nota: El autor tiene en su poder programas de N cuerpos de varios de los métodos explorados en este artículo, los cuales están a disposición del lector interesado en explorar la aplicabilidad de ellos a su área de interés profesional.

REFERENCIAS

- Aarseth, S., 1985, en *Multiple Time-Scales*. Ed. por J.U. Brackbill y B.I. Cohen. Academic Press, New York, p. 377.
- Aguilar, L.A., 1985, Tesis de Doctorado en Astronomía, Universidad de California, Berkeley.
- Aguilar, L.A. y Merritt, D., 1990, *Ap. J.* **354**, 33.
- Appel, A.W., 1981, Tesis de Licenciatura en Ciencias Computacionales, Universidad de Princeton.
- Appel, A.W., 1985, *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, **6**, 85.
- Applegate, J.H., Douglas, M.R., Gürsel, Y., Hunter, P., Seitz, C.L. y Sussman, G.J., 1985, *IEEE Trans. on Computers* **C-34**, # 9.
- Applegate, J.H., Douglas, M.R., Gürsel, Y., Sussman, G.J., y Wisdom, J., 1986, *A. J.* **92**, 176.
- Barnes, J., 1986, en *The Use of Supercomputers in Stellar Dynamics*, Ed. por P. Hut y S. McMillan, Springer-Verlag, p.175.
- Barnes, J., 1988, *Ap. J.* **331**, 699.
- Barnes, J., y Hut, P., 1986, *Nature*, **324**, 446.
- Binney, J. y Tremaine, S., 1987, *Galactic Dynamics*, Princeton University Press.
- Bouchet, F.R. y Hernquist, L., 1988, *Ap. J. Suppl. S.* **68**, 521.
- Bracewell, R.N., 1978, *The Fourier Transform and its Applications*, 2nd Ed., Mc Graw Hill.
- Brunet, J.P., Edelman, A., y Mesirov, J.P., 1990, *Proceedings Supercomputing 1990*. ACM Press.
- Centrella, J., y Melott, A.L., 1983, *Nature*, **305**, 196.
- Cooley, J.W. y Tukey, J.W., 1965, *Math. Comput.*, **19**, 297.
- Duncan, M.J., 1986, en *The Use of Supercomputers in Stellar Dynamics*, Ed. por P. Hut y S. McMillan, Springer-Verlag, p.162.
- Efstathiou, G. y Eastwood, J.W., 1981, *M.N.R.A.S.* **194**, 503.
- Efstathiou, G., Davis, M., Frenk, C.S., y White, S.D.M., 1985, *Ap. J. Suppl. S.* **57**, 241.
- Fridman, A.M. y Polyachenko, V.L., 1984, *Physics of Gravitating Systems*, Vol. 1 y 2, Springer-Verlag.
- Geller, M.J. y Huchra, J.P., 1989, *Science*, **246**, 897.
- Goldstein, H., 1980, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley.
- Gregory, S.A. y Thompson, L.A., 1982, *Sci. Am.*, **246**, # 3, 106.
- Hernquist, L., 1987, *Ap. J. Suppl. S.* **64**, 715.
- Hillis, D.W., 1985, *The Connection Machine*, MIT Press.
- Hillis, D.W., 1987, *Sci. Am.*, **256** # 6, 536.
- Holmberg, E., 1941, *Ap. J.* **94**, 385.
- Huchra, J., Geller, M., de Lapparent, V. y Burg, R., 1988, en *I.A.U. Symp. # 130*. Ed. por J. Audouze, M.C. Pelletier y A. Szalay. Kluwer Academic Publishers, p.105.
- Hut, P. y Bahcall, J.N., 1983, *Ap. J.* **268**, 319.
- Hut, P., 1983a, *Ap. J.* **268**, 342.
- Hut, P., 1983b, *Ap. J. Lett.* **272**, L29.
- Hut, P., 1983c, *A. J.* **88**, 1549.
- Hut, P., 1984, *Ap. J. Suppl. S.* **55**, 301.
- Ito, T.; Makino, J., Ebisuzaki, T. y Sugimoto, D., 1990, *Comp. Phys. Comm.*, **60**, # 2, 187.
- Jackson, J.D., 1975, *Classical Electrodynamics*, 2nd Ed., John Wiley & Sons.
- Jernigan, J.G., 1985, Simposio de la U.A.I. # 113: Dynamics of Star Clusters, Ed. por J. Goodman y P. Hut, Dordrecht: Reidel, p. 131.
- Katz, N., 1991, *Ap. J.* **368**, 325.
- Klypin, A.A., y Shandarin, S.F., 1983, *M.N.R.A.S.* **204**, 891.
- Kustaanheimo, P. y Steifel, E.L., 1965, *J. Math.*, **218**, 204.
- Lightman, A.P. y McMillan, S.L.W., 1985, en *I.A.U. Symposium # 113: Dynamics of Star Clusters*. Ed. por J. Goodman y P. Hut, p. 261. D. Reidel Publishing Co.
- Merritt, D. y Aguilar, L.A., (1985), *M.N.R.A.S.* **217**, 787.
- Miller, R.H. y B.F. Smith, 1981, *Ap. J.* **244**, 467.

- Miller, R.H., 1983, *Ap. J.* **270**, 390.
Porter, D., 1985, Tesis de Doctorado en Astronomía, Univesidad de California, Berkeley.
Press, W.H., 1986, en *The Use of Supercomputers in Stellar Dynamics*, Ed. por P. Hut y S. MsMillan, Springer-Verlag, p.184.
Press., W.H. y Spergel, D.N., 1989, *Physics Today*, **42**, #3, 9.
Sugimoto, D., Chikada, Y., Makino, J., Ito, T., Abisuzaki, T. y Umemura, M., 1990, *Nature*, **345**, 33.
van Albada, T.S., 1982, *M.N.R.A.S.* **201**, 939.
White, S.D.M., Frenk, C.S. y Davis, M., 1983, *Ap. J. Lett.* **274**, L1.
White, S.D.M., Frenk, C.S., Davis, M. y Efstathiou, G., 1987, *Ap. J.* **313**, 505.