Las ecuaciones diferenciales de campo para flujo potencial a partir de un principio variacional tipo Hamilton

ANGEL FIERROS PALACIOS
Consejo Consultivo de Investigación
Instituto Mexicano del Petróleo
Recibido el 18 de julio de 1991; aceptado el 22 de abril de 1992

RESUMEN. En este trabajo se utiliza el marco teórico que se desarrolló para resolver el problema de las ecuaciones de campo para el fluido viscoso [6]. El objetivo que se persigue es obtener las ecuaciones diferenciales de campo para el flujo potencial a partir de un formalismo lagrangiano como el de la teoría clásica de campos. Se establece una funcional de acción como una integral espacio-temporal sobre una región del espacio euclídeo tridimensional de una densidad lagrangiana, en función de ciertas variables de campo. Se propone un principio de acción extremal del tipo Hamilton con condiciones de frontera adecuadas y se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales de campo. Se calcula una densidad lagrangiana particular del tipo $T-V$, que al sustituirla en las ecuaciones diferenciales de campo, reproduce la ecuación de onda que satisface el potencial de velocidades.

ABSTRACT. The same theoretical frame that was used to solve the problem of the field equations for a viscous fluid is utilized in this work [6]. The purpose is to obtain the differential field equations for a potential flow from the Lagrangian formalism as in classical field theory. An action functional is introduced as a space-time integral over a region of three-dimensional Euclidean space, of a Lagrangian density as a function of certain field variables. A Hamilton type extremum action principle is postulated with adequate boundary conditions, and a set of differential field equations is derived. A particular Lagrangian density of the $T-V$ type leads to the wave equation for the velocity potential.

PACS: 03.40.–t

1. INTRODUCCIÓN

Un fluido no viscoso es un sistema continuo cuya evolución dinámica se puede caracterizar completamente por medio de un juego de funciones de campo [1], como son el campo de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$, la densidad de masa $\rho(\mathbf{x},t)$ y la presión $p(\mathbf{x},t)$. Si la vorticidad es cero en todo el espacio ocupado por el fluido, el campo de velocidades es irrotacional, el flujo es potencial y la descripción del comportamiento del sistema se puede hacer en términos de una función escalar de la posición y el tiempo $\phi(\mathbf{x},t)$, tal que

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \operatorname{grad}\phi(\mathbf{x},t). \tag{1.1}$$

A esta función se le conoce como el potencial de velocidades. Si en un fluido ideal compresible se tiene un movimiento oscilatorio de amplitud pequeña, en cada punto de él se producirán alternadamente compresiones y descompresiones al paso del disturbio. Esto es lo que se llama una onda de sonido.

Como el disturbio es pequeño, la velocidad también es pequeña, de modo que el término $(\mathbf{v} \cdot \mathrm{grad})\mathbf{v}'$ en las ecuaciones de Euler puede ser despreciado.* Por la misma razón, los cambios relativos en la densidad y la presión del fluido son pequeños, de tal manera que se puede suponer que

$$p = p_0 + p', \tag{1.2}$$

$$\rho = \rho_0 + \rho', \tag{1.3}$$

donde p_0 y ρ_0 son constantes referidas a la presión termodinámica y a la densidad de equilibrio, y $p' \ll p_0$, $\rho' \ll \rho_o$ sus variaciones a entropía específica constante, debidas al paso de la onda sónica. En un fluido perfecto compresible una onda de sonido resulta ser un movimiento adiabático, para el cual la entropía es constante a través de todo el volumen ocupado por el sistema, de modo que la ecuación adiabática es, simplemente,

$$s = \text{constante}. \tag{1.4}$$

En ese caso, la presión resulta ser una función de la densidad únicamente

$$p = p(\rho). \tag{1.5}$$

En consecuencia, a un cambio pequeño en p le corresponde una pequeña variación en ρ, es decir,

$$p' = c^2\rho', \tag{1.6}$$

en donde c es la velocidad del sonido en el medio definida como

$$c = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)_s} \tag{1.7}$$

y es tal que $|\mathbf{v}| \ll c$.

Si se supone que la fuerza externa es cero y que la viscosidad del fluido es despreciable, la ecuación de movimiento,** en primera aproximación toma la forma siguiente

$$\mathrm{grad}_i \left[\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + p'\right] = 0, \tag{1.8}$$

*En lo que sigue, se escribirá $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ en vez de $\mathbf{v}'(\mathbf{x}, t)$ para no arrastrar la prima en todo el trabajo. Así, se sobreentiende que para un disturbio sónico de amplitud pequeña, la definición (1.1) corresponde al pequeño término perturbativo.

**La ecuación de movimiento es la de Euler

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathrm{grad})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\, p.$$

Con el auxilio de las relaciones (1.1), (1.2) y (1.3) se obtiene

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{grad}_i\, \phi) + \mathrm{grad}_i\, p' = 0.$$

Intercambiando los operadores $\frac{\partial}{\partial t}$ y grad_i se obtiene la Ec. (1.8).

en donde se han usado las relaciones (1.1), (1.2), (1.3) y se ha despreciado el término $(\mathbf{v}\cdot \text{grad})\mathbf{v}$. Al integrar esta ecuación se obtiene

$$p' = -\rho_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right), \tag{1.9}$$

en donde, sin pérdida de generalidad, se ha considerado como cero a la constante de integración. De acuerdo con (1.6),

$$\rho' = -\frac{\rho_0}{c^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right). \tag{1.10}$$

Si ahora se usa la ecuación de continuidad convenientemente linealizada

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{1.11}$$

y en ella se sustituyen las relaciones (1.1) y (1.10), se obtiene

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \tag{1.12}$$

Esta es la ecuación de onda que satisface el potencial de velocidades ϕ, en ella ∇^2 es el operador laplaciano.

2. El principio tipo Hamilton y las ecuaciones diferenciales de campo

Para el caso de oscilaciones pequeñas en un fluido ideal, se define una densidad lagrangiana como una función continua y con derivadas continuas hasta de tercer orden en sus argumentos [1]

$$\ell = \ell\left(\text{grad}\,\phi; \frac{\partial \phi}{\partial t}\right), \tag{2.1}$$

tal que la integral de ℓ sobre una región R del espacio euclídeo tridimensional, corresponde a la lagrangiana clásica

$$\mathcal{L} = \int_R \ell\, dV, \tag{2.2}$$

donde dV es el elemento de volumen en la región R.

Se define la acción como es usual, es decir,

$$W = \int_{t_1}^{t_2}\int_R \ell\, dV\, dt. \tag{2.3}$$

El principio tipo Hamilton propone que la funcional de acción sea invariante frente a una variación geométrica continua e infinitesimal, esto es

$$\delta W = 0. \tag{2.4}$$

Como resultado de la invariancia de la acción, se obtienen las ecuaciones diferenciales de campo. Sea

$$\ell = \rho\lambda, \tag{2.5}$$

con λ la lagrangiana especifica del sistema, tal que

$$\lambda = \lambda\left(\operatorname{grad}\phi; \frac{\partial\phi}{\partial t}\right). \tag{2.6}$$

De acuerdo con la definición usual de las variaciones geométricas, $\delta t = 0$ para toda t, de modo que la variación de la función escalar $\phi(\mathbf{x}, t)$ satisface la siguiente ecuación

$$\delta\phi(\mathbf{x}, t) = \operatorname{grad}_i\phi\delta x^i(t). \tag{2.7}$$

Adicionalmente, se considera la siguiente condición de frontera

$$\delta x^i(t_1) = \delta x^i(t_2) = 0. \tag{2.8}$$

La variación de la integral de acción (2.3) sujeta a la condición (2.4) conduce a la siguiente relación

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_R \{\rho\,\delta\lambda + \lambda[\delta\rho + \rho\operatorname{div}(\delta\mathbf{x})]\}dV\,dt = 0. \tag{2.9}$$

El tercer término del integrando de la ecuación anterior, proviene del hecho que el elemento de volumen también depende de los parámetros geométricos y, por tanto, debe sujetarse al proceso de variación. Como consecuencia de ello, se obtiene la expresión del paréntesis cuadrado, que es cero porque

$$\delta\rho = -\rho\operatorname{div}(\delta\mathbf{x}). \tag{2.10}$$

En ese caso, en (2.9) se obtiene

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_R \rho\,\delta\lambda\,dV\,dt = 0. \tag{2.11}$$

Ahora, y de acuerdo con (2.6),

$$\delta\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial(\nabla_i\phi)}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\{\operatorname{grad}_i\phi\delta\mathbf{x}(t)\}\right] + \frac{\partial\lambda}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\{\operatorname{grad}_i\phi\delta\mathbf{x}(t)\}\right], \tag{2.12}$$

en donde se usó (2.7) y el hecho que los operadores δ, $\partial/\partial\mathbf{x}$ y $\partial/\partial t$ son independientes entre sí y se pueden intercambiar.

Integrando por partes se obtiene, hasta términos de primer orden,

$$\delta\lambda = -\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial(\nabla_i\phi)}\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)}\right]\right\}\operatorname{grad}_i \phi\delta\mathbf{x}(t).$$

Entonces, en (2.11) sólo se tiene que

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_R\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial(\nabla_i\phi)}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)}\right)\right]\rho_0 \operatorname{grad}\phi\right\}\delta x^i\, dV\, dt = 0. \tag{2.13}$$

Como las variaciones locales de $\mathbf{x}$ son arbitrarias y linealmente independientes entre sí, y del mismo modo, tanto dV como dt son incrementos totalmente arbitrarios y en consecuencia distintos de cero, la Ec. (2.13) sólo se satisface si el integrando es nulo, es decir,

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial(\nabla_i\phi)}\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)}\right] = 0, \tag{2.14}$$

ya que $\rho_0 \operatorname{grad}_i\phi \neq 0$. Estas son las ecuaciones diferenciales de campo que satisface la lagrangiana específica.

3. La lagrangiana específica para el flujo potencial y las ecuaciones de onda y de Laplace [3]

Se sabe que la densidad lagrangiana para el fluido ideal es [2]

$$\ell = \tfrac{1}{2}\rho v^2 - \rho\varepsilon - \rho\psi(\mathbf{x}), \tag{3.1}$$

en donde $\frac{1}{2}\rho v^2$ es la densidad de energía cinética, ε es la energía interna específica y $\psi(\mathbf{x})$ es algún potencial conservativo, función de la posición únicamente, tal que

$$-\operatorname{grad}\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{f}, \tag{3.2}$$

con $\mathbf{f}$ la fuerza externa. Por comodidad se supondrá que $\mathbf{f} = 0$, de modo que la densidad lagrangiana sea del tipo $t - u$, con $t = \frac{1}{2}\rho v^2$ y $u = \rho\varepsilon$ las densidades de energía cinética y potencial, respectivamente.

Al paso del disturbio sónico, la densidad lagrangiana cambia, de modo que

$$\ell = \ell_0 + \ell', \tag{3.3}$$

con ℓ_0 la densidad de energía cinética debida al paso del disturbio sónico y ℓ' la variación de la densidad lagrangiana a entropía específica constante, producida por la onda de sonido. Así, a primera aproximación,*

$$\ell = \tfrac{1}{2}\rho_0 v^2 - \rho_0\varepsilon_0 - \rho_0\varepsilon', \tag{3.4}$$

de modo que

$$\ell_0 = \rho_0(\tfrac{1}{2}v^2 - \varepsilon_0) \tag{3.5}$$

y

$$\ell' = -\rho_0\varepsilon'. \tag{3.6}$$

En estas últimas expresiones,

$$\varepsilon' = \varepsilon - \varepsilon_0 \tag{3.7}$$

es la variación de entropía específica constante de ε, y ε_0 es el valor de equilibrio de la energía interna específica del sistema.

Si se hace el cálculo directo, se puede demostrar que

$$u = -\tfrac{1}{2}\ell' = \frac{\rho_0}{2}\varepsilon'. \tag{3.8}$$

De la forma de Euler de la primera ley de la termodinámica,

$$\varepsilon = \theta s - \frac{p}{\rho}, \tag{3.9}$$

y de la relación de Gibbs-Duhem,

$$s\theta' - \frac{p'}{\rho} = 0, \tag{3.10}$$

se obtiene

$$\varepsilon' = \frac{p_0\rho'}{\rho_0^2} + \frac{p'\rho'}{\rho_0^2}, \tag{3.11}$$

---

*De acuerdo con (1.2) y (1.3):

$$\ell = \tfrac{1}{2}\rho_0 v^2 + \tfrac{1}{2}\rho' v^2 - \rho_0\varepsilon_0 - \rho_0\varepsilon' - \rho'\varepsilon_0 - \rho'\varepsilon'.$$

Sin embargo, $\rho_0 v^2/2 \gg \rho' v^2/2$. Por otra parte, $\rho'\varepsilon_0$ es prácticamente constante y no contribuye en nada al cambio en energía potencial. Otro tanto se puede decir del término $\rho_0\varepsilon_0$. El término $\rho'\varepsilon'$ es de segundo orden, de modo que se puede despreciar junto con los otros dos. Con todo lo anterior, se obtiene (3.4).

en donde se ha hecho el cálculo a primera aproximación. Sin embargo, de acuerdo con (1.9) y (1.10),

$$\varepsilon' = -\frac{p_0}{\rho_0 c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 \simeq \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2,$$

porque éste es el término dominante, y entonces

$$\mu = \frac{\rho_0}{2c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2. \tag{3.13}$$

Esta es la densidad de energía potencial en términos de $\phi(\mathbf{x},t)$.

Por otra parte,

$$t = \tfrac{1}{2}\rho_0|\operatorname{grad}\phi|^2. \tag{3.14}$$

En consecuencia, a primera aproximación se tiene que

$$\ell = \frac{1}{2}\rho_0\left[|\operatorname{grad}\phi|^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2\right] \tag{3.15}$$

es la densidad lagrangiana para pequeñas vibraciones en un fluido ideal compresible donde la viscosidad es despreciable.

Finalmente, y de acuerdo con (2.5),

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[|\operatorname{grad}\phi|^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2\right] \tag{3.16}$$

es la lagrangiana específica para el flujo potencial [4].

Introduciendo (3.16) en (2.14) se obtiene inmediatamente la ecuación de onda (1.12).

Si el fluido es incompresible, la densidad es una constante, de modo que $\rho' = 0$. En ese caso, $\varepsilon' = 0$ y también es cero la energía potencial específica; entonces, en (3.16) sólo se conserva el término de energía cinética específica, es decir,

$$\hat{\lambda} = \tfrac{1}{2}|\operatorname{grad}\phi|^2. \tag{3.17}$$

Por la misma razón, las ecuaciones diferenciales de campo (2.14) se reducen a

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial\hat{\lambda}}{\partial(\nabla_i\phi)}\right] = 0. \tag{3.18}$$

Sustituyendo (3.17) en (3.18) se obtiene

$$\nabla^2\phi = 0, \tag{3.19}$$

que no es otra cosa más que la ecuación de Laplace para el potencial de velocidades $\phi(\mathbf{x},t)$.

4. Las ecuaciones diferenciales de campo y la lagrangiana específica para la variación de la densidad. La ecuación de continuidad linealizada

En la parte introductoria de este trabajo se obtuvo la ecuación de onda a partir de la ecuación de continuidad linealizada, con el auxilio de las relaciones (1.1) y (1.10); con lo que quedó demostrada la equivalencia entre ambas ecuaciones.

Esto significa que debe ser posible obtener un juego de ecuaciones diferenciales de campo a partir del mismo principio de acción extremal ya postulado, y establecer una lagrangiana del tipo $T - V$; todo ello para la variación de la densidad ρ'. Al sustituir esa lagrangiana particular en las ecuaciones de campo obtenidas, se debe llegar a la ecuación de continuidad linealizada.

Considérese una densidad lagrangiana $\ell_\rho(v^i, \rho')$ y la relación (2.5) con

$$\lambda_\rho = \lambda_\rho(v^i, \rho'). \tag{4.1}$$

Si se sustituye λ_ρ directamente en la relación (2.11), se obtiene, hasta términos de primer orden en las aproximaciones,

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_R \rho_0 \delta\lambda_\rho \, dV \, dt = 0. \tag{4.2}$$

Haciendo nuevamente el cálculo de variaciones y usando las relaciones (1.1) y (1.10) se obtiene a primera aproximación

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_R \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\rho_0}{c^2} \left(\frac{\partial \lambda_\rho}{\partial \rho'} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \lambda_\rho}{\partial v^i} \right) \right] v^i \right\} \delta x^i \, dV \, dt = 0. \tag{4.3}$$

Nuevamente, y dado que $\mathbf{v} \neq 0$, para que la ecuación anterior se satisfaga es necesario que el integrando sea nulo, es decir,

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \lambda_\rho}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho_0}{c^2} \left(\frac{\partial \lambda_\rho}{\partial \rho'} \right) \right] = 0. \tag{4.4}$$

Estas son las ecuaciones diferenciales de campo buscadas.

Si se sustituyen en (3.16) las expresiones (1.1) y (1.10) se obtiene directamente la siguiente expresion para la lagrangiana específica particular que se requiere

$$\lambda_\rho = \frac{1}{2} \left(v^2 - \frac{c^2}{\rho_0^2} \rho'^2 \right). \tag{4.5}$$

Al sustituir (4.5) en (4.4) se obtiene inmediatamente la ecuación de continuidad linealizada.

Es evidente que si el fluido es incompresible, $\rho' = 0$, de modo que las ecuaciones de campo (4.4) se reducen al siguiente término:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \hat{\lambda}_\rho}{\partial v^i}\right) = 0. \tag{4.6}$$

La lagrangiana específica queda como

$$\hat{\lambda}_\rho = \tfrac{1}{2}v^2, \tag{4.7}$$

y la ecuación de Laplace se transforma en

$$\operatorname{div} \hat{v} = 0. \tag{4.8}$$

5. Las variaciones temporales y la ecuación de balance de la energía sónica

Si a la funcional de acción para cualquier fluido se le somete a un proceso variacional con respecto al parámetro de evolución, se puede demostrar que es invariante frente a transformaciones temporales continuas [2].

Considérese la integral de acción (2.3) para el caso presente, pero sujeta a una variación temporal de modo que tanto las entidades cinemáticas como las funciones de campo contenidas en ella experimenten cambios infinitesimales. Como consecuencia de tal proceso, se demuestra que la funcional de acción es una invariante [2], es decir

$$\delta^+ W = 0. \tag{5.1}$$

De acuerdo con la definición de variación temporal [2] se tiene que

$$\delta^+ W = \int_{t_1}^{t_2}\int_R \left[\delta^+\ell_\rho + \ell_\rho\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^i}\delta^+ t + \frac{d}{dt}(\delta^+ t)\right)\right] dV\,dt = 0. \tag{5.2}$$

Si se integra por partes el tercer término del integrando de (5.2), se obtiene únicamente

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_R \ell_\rho \frac{d(\delta^+ t)}{dt} dV\,dt = -\int_{t_1}^{t_2}\int_R (\mathcal{D}\ell_\rho)\delta^+ t\, dV\,dt, \tag{5.3}$$

en donde

$$\mathcal{D} \equiv \frac{d}{dt} + \operatorname{div}\mathbf{v} \tag{5.4}$$

es el operador diferencial de Reynolds [5]. En (5.3) se ha omitido el segundo término que resulta de la integración por partes, debido a que se trata de la integral de una derivada total con respecto al tiempo, la cual se cancela al integrar si se consideran las siguientes condiciones de frontera.

$$\delta^+ t_1 = \delta^+ t_2 = 0. \tag{5.5}$$

Por otra parte, si se sustituye (5.3) en (5.2), se puede ver que

$$\ell_\rho \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathcal{D}\ell_\rho = -\frac{d\ell_\rho}{dt}. \tag{5.6}$$

En ese caso, en (5.2) se obtiene

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_R \left[\delta^+ \ell_\rho - \frac{d\ell_\rho}{dt} \delta^+ t \right] dV\, dt = 0. \tag{5.7}$$

De acuerdo con la funcionalidad de ℓ_ρ, tomando en cuenta la relación (2.10) y el hecho de que [2]

$$\delta^+ v^i = \frac{dv^i}{dt}\, \delta^+ t \tag{5.8a}$$

y

$$\delta^+ \rho' = -\rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}\, \delta^+ t, \tag{5.8b}$$

se puede demostrar que, en primera aproximación,

$$\delta^+ \ell_\rho = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \ell_\rho}{\partial v^i} v^i \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \rho_0^2 \frac{\partial \lambda_\rho}{\partial \rho'} v^i \right\} \right] \delta^+ t. \tag{5.9}$$

Si se sustituye este resultado en (5.7), se obtiene

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_R \left[\frac{\partial \mathcal{H}_\rho}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\rho_0^2 \frac{\partial \lambda_\rho}{\partial \rho'} v^i \right) \right] \delta^+ t\, dV\, dt = 0, \tag{5.10}$$

en donde

$$\mathcal{H}_\rho = \frac{\partial \ell_\rho}{\partial v^i} v^i - \ell_\rho \tag{5.11}$$

y se ha despreciado el término $(\mathbf{v}\cdot\text{grad})\mathcal{H}_\rho$ por ser de segundo orden en las aproximaciones. $\mathcal{H}_\rho$ es la densidad hamiltoniana, cuya expresión en términos de ℓ_ρ está dada en (5.11).

Si se invoca a la arbitrariedad tanto de los incrementos dV y dt como de la variación temporal $\delta^+ t$, para que se satisfaga (5.10) se requiere que

$$\frac{\partial \mathcal{H}_\rho}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\rho_0^2 \frac{\partial \lambda_\rho}{\partial \rho'} \mathbf{v} \right) = 0. \tag{5.12}$$

Esta es la ecuación de balance de energía generalizada para pequeñas vibraciones en un fluido perfecto compresible. Si en (5.11) se sustituye (4.5) y se toma en cuenta (2.5), se obtiene para la densidad hamiltoniana la siguiente expresión

$$\mathcal{H}_\rho = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho_0}\rho'^2. \tag{5.13}$$

Finalmente, si se sustituye (5.13) y (4.5) en (5.12) y se toma en cuenta (1.6), se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho_0}\rho'^2\right] + \operatorname{div}(p'\mathbf{v}) = 0. \tag{5.14}$$

Esta es la ley de la conservación de la energía de las ondas de sonido [1], válida para el flujo en cualquier instante. Se puede demostrar [1] que en una onda plana viajera la variación de la presión y la velocidad están relacionadas de la siguiente manera

$$p' = c\rho_0 v. \tag{5.15}$$

Así, si $\mathbf{n}$ es un vector unitario en la dirección de propagación de la onda, que es la misma que tiene $\mathbf{v}$, se tiene que

$$\mathbf{q} = c\rho_0 v^2 \mathbf{n}, \tag{5.16}$$

en donde

$$\mathbf{q} = p'\mathbf{v} \tag{5.17}$$

es un vector que representa el flujo de energía sónica [1]. Además, para una onda plana viajera se sabe que [1]

$$\rho' = \frac{\rho_0 v}{c}, \tag{5.18}$$

de modo que los dos términos del miembro derecho de (5.13) son iguales y entonces

$$\mathcal{H}_\rho = \rho_0 v^2. \tag{5.19}$$

Sustituyendo (5.19) en (5.16), se obtiene

$$\mathbf{q} = c\mathcal{H}_\rho \mathbf{n}. \tag{5.20}$$

En otras palabras, en una onda plana viajera, la densidad de flujo de energía es igual a la densidad hamiltoniana por la velocidad del sonido en el medio. Como $\mathcal{H}_\rho$ es lo mismo que la densidad de energía, este resultado era de esperarse [1].

6. OTROS RESULTADOS INTERESANTES

En la sección anterior se obtuvo la ley de la conservación de la energía sónica (5.14) en primera aproximación. A continuación se examinarán los términos de orden superior ignorados, con el objeto de obtener otros resultados interesantes.

Si en la Ec. (5.7) se consideran todos los términos que resultan del proceso de variación, se obtiene la siguiente ecuación

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_R \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}_\rho}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho_0^2 \frac{\partial \lambda_\rho}{\partial \rho'} v^i\right) \right.$$
$$\left. - v^i \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \ell_\rho}{\partial v^i}\right) - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\mathcal{H}_\rho + \rho_0^2 \frac{\partial \lambda_\rho}{\partial \rho'}\right)\right]\right\} \delta^+ t \, dV \, dt = 0. \quad (6.1)$$

Los dos primeros términos de esta expresión son cero porque se trata de la ecuación de balance generalizada de energía sónica (5.12). Entonces en (6.1) sólo quedan los términos de orden superior en las aproximaciones, es decir,

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_R \left\{ v^i \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \ell_\rho}{\partial v^i}\right) - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\mathcal{H}_\rho + \rho_0^2 \frac{\partial \lambda_\rho}{\partial \rho'}\right)\right]\right\} \delta^+ t \, dV \, dt = 0. \quad (6.2)$$

Nuevamente, como $\delta^+ t$, dV y dt son arbitrarios, la ecuación anterior sólo se satisface si

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\mathcal{H}_\rho + \rho_0^2 \frac{\partial \lambda_\rho}{\partial \rho'}\right) = \frac{\partial}{\partial v^i}\left(\frac{\partial \ell_\rho}{\partial t}\right) - \frac{\partial \ell_\rho}{\partial x^i} + v^j \frac{\partial}{\partial v^i}\left(\frac{\partial \ell_\rho}{\partial x^j}\right), \quad (6.3)$$

en donde se ha desarrollado la derivada total con respecto al tiempo y se han intercambiado las derivadas parciales $\partial/\partial t$, $\partial/\partial \mathbf{v}$ y $\partial/\partial \mathbf{x}$.

El miembro de la derecha de (6.3) es cero porque ℓ_ρ no es una función explícita ni de t ni de $\mathbf{x}$. Por lo tanto, en esa ecuación se tiene que

$$\mathcal{H}_\rho + \rho_0^2 \frac{\partial \lambda_\rho}{\partial \rho'} = f(t). \quad (6.4)$$

Aquí, se ha realizado la integración de modo que $f(t)$ es alguna función del tiempo. Sea

$$f(t) = \frac{c^2}{\rho_0}\rho'^2; \quad (6.5)$$

en ese caso, en (6.4) se tiene que

$$p' = -\frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho_0}\rho'^2. \quad (6.6)$$

Este es el valor del cambio en la presión p' en una onda de sonido [1]. Si se considera (1.6) se puede despejar ρ', de modo que

$$\rho' = -\frac{1}{2}\frac{\rho_0}{c^2}v^2, \tag{6.7}$$

y, como era de esperarse [1], $\rho' < 0$ en una onda viajera.

De acuerdo con todo lo anterior, es claro que en la Ec. (6.2) se tiene que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \ell_\rho}{\partial v^i}\right) = \frac{d}{dt}(\rho_0 v^i) = 0, \tag{6.8}$$

en donde se han usado las expresiones (2.5) y (4.5).

Este resultado es particularmente interesante en relación con un paquete de ondas, considerado éste como un disturbio sónico que en todo instante ocupa una región finita del espacio [1]. En ese caso se puede determinar el momento total del fluido en la onda. De acuerdo con (1.3), se tiene que

$$\rho\mathbf{v} - \frac{\mathbf{q}}{c^2} = a, \tag{6.9}$$

en donde a es alguna constante con unidades de densidad de flujo de masa. Si se integra esta ecuación a todo el volumen ocupado por la onda, se obtiene el momento total de la misma, es decir,

$$\int_V \rho\mathbf{v}\, dV = \frac{1}{c^2}\int_V \mathbf{q}\, dV + A, \tag{6.10}$$

en donde A es el valor de a sobre todo el volumen ocupado por la onda. La existencia de este término constante significa que la propagación de un paquete de ondas sónico va acompañada por la transferencia de materia [1].

7. Conclusiones

La aplicación de un principio variacional del tipo Hamilton al caso del flujo potencial hizo posible no sólo la solución de ese problema con todo el rigor de los métodos de la mecánica analítica, sino también la obtención del conjunto de ecuaciones diferenciales de campo para la variación de la densidad al paso del disturbio sónico. A lo largo del presente trabajo se demostró la equivalencia entre las ecuaciones de onda para el potencial de velocidades $\phi(\mathbf{x}, t)$ y de continuidad linealizada para la densidad ρ'. Adicionalmente, y sometiendo a la funcional de acción para cualquier fluido a un proceso variacional con respecto al tiempo, no solo fue posible obtener la ley de la conservación de la energía de las ondas sónicas, sino que se hizo sin necesidad de recurrir a los argumentos usuales de promedio en el tiempo y flujos promedio [1]. El interés del presente enfoque reside en su sencillez y en su rigor teórico, ya que sólo se requiere del uso adecuado de los métodos variacionales propios de la mecánica analítica para obtener las ecuaciones diferenciales de campo y después proponer una función lagrangiana como una escalar que contiene toda la información dinámica del sistema; para que una vez sustituida en las respectivas ecuaciones diferenciales de campo permita el establecimiento de las ecuaciones de onda, de continuidad linealizada y de balance o conservación de energía sónica.

REFERENCIAS

1. L.D. Landau, y E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Addison Wesley Publishing Co. (1959).
2. F. Viniegra H., A. Salcido G. y A. Fierros P., "Las ecuaciones de balance de un fluido perfecto a partir de un principio variacional tipo Hamilton", *Rev. del IMP* **XVI**, No. 1 (enero, 1984).
3. A. Fierros P. y F. Viniegra H., "Una formulación lagrangiana unificada de la mecánica y termodinámica de los fluidos ideales", *Rev. del IMP* **XI**, No. 1 (enero, 1979).
4. P. Morse and H. Feschbach, *Methods of Theoretical Physics*, Part I.
5. A. Fierros P. y F. Viniegra H., "Notas de Mecánica de Fluidos", Facultad de Ciencias, UNAM (1977).
6. A. Fierros P., "Las ecuaciones de balance para un fluido viscoso a partir de un principio variacional tipo Hamilton", *Rev. Mex. Fís.* **38** (1992) 518.