

Forma de equilibrio de dominios hexáticos

MARÍA EUGENIA COSTAS

*Facultad de Química, Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad Universitaria, 04510 México, D.F.*

Y

CHARLES M. KNOBLER

*Department of Chemistry and Biochemistry, University of California
Los Angeles, CA 90024 USA*

Recibido el 5 de marzo de 1992; aceptado el 4 de junio de 1992

RESUMEN. Determinamos la forma de equilibrio de un dominio de una fase hexática en coexistencia con un medio isotrópico por medio de la construcción de Wulff, estimando la energía interfacial a $T = 0$; encontramos que los dominios hexáticos son hexágonos irregulares y son circulares sólo cuando su tamaño es infinito.

ABSTRACT. We calculate the equilibrium shape for an hexatic domain in coexistence with an isotropic medium using the Wulff construction, with the estimate of the interfacial free energy at $T = 0$; we find that the domain is an irregular hexagon and it is circular only when its size is infinite.

PACS: 61.30.Jf; 68.10.Cr; 64.70.Md

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de las propiedades de la materia condensada se ha concentrado principalmente en uno de los dos extremos del diagrama de fases: la fase sólida cristalina altamente ordenada, caracterizada por un rompimiento de simetría tanto traslacional como rotacional, y la fase fluida que presenta desorden posicional y en la que no existe ningún rompimiento de simetría. Sin embargo, existe una plétora de estados intermedios [1] conocidos como mesofases, cuyas propiedades difieren notablemente de las del sólido y del líquido. Las distintas mesofases se distinguen entre sí por el grado de orden que presentan y por la forma funcional con que el grado de orden depende de las coordenadas espaciales a través del sistema, es decir, a corto, a quasi-largo o a largo alcance. Su densidad es anisótropa debido a que las moléculas tienen formas anisótropas y por tanto las mesofases presentan orden orientacional en ausencia de orden traslacional de los centros de masa, o, en algunos casos, debido a que las moléculas muestran orden orientacional a largo alcance de los "enlaces" que cada molécula forma con sus primeros vecinos (el término enlace no se refiere aquí a un enlace químico, sino a la asignación de primeros vecinos de acuerdo a alguna construcción geométrica en particular). Halperin y Nelson [2] sugirieron la existencia de una de estas fases intermedias entre el sólido y el líquido, que llamaron "hexática", a partir del estudio teórico del proceso de fusión de un cristal triangular en dos dimensiones. La fase hexática



FIGURA 1. Representación esquemática de la estructura de las fases (a) esméctica BH, (b) esméctica I, y (c) esméctica F.

se caracteriza por la presencia de correlaciones a largo alcance en las orientaciones de los enlaces. Los resultados de este modelo, junto con algunos estudios de simulación [3] que mostraban evidencia de una fase hexática estable, fueron corroborados más tarde con el estudio experimental [4] de gases fisisorbidos en diferentes sustratos, de arreglos de esferas de acero, de la “fusión” de películas magnéticas [5], de monocapas de anfifilos en la interfase agua-aire [6] y de cristales líquidos termotrópicos y liotrópicos [7]. Estos experimentos han demostrado sin duda la existencia de la fase hexática en dos dimensiones y de su contraparte en tres dimensiones.

El mejor ejemplo de fases hexáticas se encuentra en los cristales líquidos esmécticos termotrópicos. Estas fases presentan un grado de orden posicional intermedio, además de orden orientacional molecular y, en algunos casos, de orden orientacional de los enlaces [8]. Hasta la fecha se han determinado por lo menos una docena de distintas fases esmécticas, cuyas diferencias estriban en el comportamiento de los parámetros de orden que las describen y su dependencia funcional con la distancia: el orden puede existir a corto alcance, es decir, que decae *exponencialmente* con la distancia dentro de la capa, o quasi-largo alcance, cuyo decaimiento sigue una *ley de potencias* como función de la distancia. Birgenau y Litster [9] sugirieron que cada capa en la fase esméctica es un sistema independiente en dos dimensiones con orden orientacional a largo alcance; por lo tanto, estas fases representan la contraparte en tres dimensiones de la mesofase con orden orientacional en dos dimensiones. Cuatro de las fases esmécticas son hexáticas en dos dimensiones: en una de ellas las moléculas no presentan inclinación con respecto a la superficie que determina la capa (fase BH); en las otras tres, las moléculas muestran inclinación hacia primeros vecinos (fase I), hacia segundos vecinos (fase F) o en una dirección intermedia (fase L). La Fig. 1 muestra un esquema de la estructura de tres de estas fases.

Otro ejemplo lo constituyen las monocapas de Langmuir de anfifilos simples [6] que presentan también un alto grado de polimorfismo. En el diagrama de fases de estos sistemas se puede observar, además de un gas bidimensional y una fase líquida (líquido expandido), fases sólidas equivalentes a aquellas observadas en los cristales y una fase mesomorfa intermedia entre el cristal y el líquido, llamado *líquido condensado*, que es análoga a un cristal líquido esméctico. En algunas sustancias se pueden encontrar hasta siete distintas fases condensadas, cuatro de las cuales corresponden a diferentes estados del líquido condensado en equilibrio con el líquido expandido. Estas fases son hexáticas, esto es, son fases con orden posicional de corto alcance y orden orientacional de quasi-largo alcance y presentan orden de largo alcance en la inclinación de las moléculas con respecto a la superficie; este tipo de estructura ha sido confirmada por experimentos de difracción de electrones y de microscopía de luz fluorescente [10]. El diagrama de fases genérico de las monocapas de Langmuir muestra una gran similitud con el comportamiento de los cristales líquidos esmécticos.

Tanto los cristales líquidos esmécticos como las monocapas de Langmuir han sido muy útiles en el estudio de las transiciones de fase, de la física de los defectos y del movimiento de la interfase (crecimiento de dominios) que separa a dos fases en coexistencia. Experimentos sobre el crecimiento de dominios de un cristal líquido esméctico B rodeado de una fase esméctica A han mostrado [11] que las interfases pueden ser planas, curvas, periódicas y hasta caóticas y no estacionarias dependiendo de la velocidad de crecimiento y de otros parámetros como la temperatura. En monocapas formadas por metil ésteres sobre una superficie de agua, se ha observado una transición [10] en la forma geométrica de los dominios de líquido condensado en equilibrio con el líquido expandido correspondiente. A alta temperatura, los dominios de líquido condensado son hexáticos en el plano y su forma es circular; las moléculas no presentan inclinación, es decir, la parte no polar de las moléculas se encuentra perpendicular (en promedio) a la superficie de agua. Cuando la temperatura disminuye en la región de coexistencia los dominios siguen siendo hexáticos, pero su forma es hexagonal y las moléculas presentan una inclinación distinta a la perpendicular con respecto a la superficie. Esta transición en la forma de los dominios y en la inclinación de las moléculas es completamente reversible, *i.e.*, los dominios vuelven a ser circulares cuando se eleva la temperatura. Las monocapas formadas por etil ésteres presentan una transición similar en la inclinación de las moléculas, pero los dominios conservan una forma circular como función de la temperatura [12]. Estudios recientes sobre el comportamiento de monocapas formadas por mezclas de metil y etil ésteres muestran [13] que las transiciones en la inclinación de las moléculas y en la forma de los dominios del líquido condensado que ocurren a la misma temperatura para las monocapas de metil ésteres, se desacoplan al aumentar la concentración de etil éster en la monocapa; ello indica que la anisotropía en la tensión lineal entre las dos fases en coexistencia aumenta notablemente al disminuir la temperatura de la muestra. Los resultados experimentales descritos demuestran la clara similitud en la topología de los dominios de los cristales líquidos esmécticos y de las monocapas de Lagmuir.

Aun cuando la determinación experimental de estas formas de equilibrio ha avanzado claramente en los últimos años, no existe a la fecha un modelo que permita calcularlas para un dominio de una fase hexática en dos dimensiones rodeado de un líquido isótropo; a partir del estudio de la forma de fases cristalinas [14], se sabe que cuando un cristal

presenta una forma isótropa a $T = 0$ (es decir, no se observan caras o facetas en el cristal), mantendrá estas características a temperaturas más altas; por otro lado, cuando a $T = 0$ el cristal es anisótropo, no se puede predecir si la forma de equilibrio persistirá o desaparecerá a temperaturas mayores que cero. En este trabajo estudiamos la forma de equilibrio de un dominio hexático en dos dimensiones rodeado de un medio isótropo, utilizando la metodología que se ha desarrollado para determinar la forma de equilibrio de un sólido cristalino. Primero, construimos una fase hexática a partir de una malla triangular perfecta que contiene una alta concentración de defectos; para comprobar que la fase producida es hexática calculamos las funciones de correlación traslacional y orientacional, y analizamos su decaimiento con la distancia en forma cualitativa. Estimamos la energía libre interfacial a $T = 0$, y después realizamos la construcción de Wulff [15] para determinar la forma de equilibrio como aquella que presenta la mínima energía interfacial posible. Encontramos que los dominios hexáticos presentan una simetría hexagonal como consecuencia del orden orientacional de enlace de quasi-largo alcance entre las moléculas, y su forma es por tanto la de un hexágono irregular; a esta temperatura, los dominios de la fase hexática son circulares sólo cuando el tamaño de la muestra es infinito.

2. LA FASE HEXÁTICA

Una fase hexática se puede construir colocando al azar una alta concentración de defectos en una malla triangular perfecta y relajándola suponiendo que es un medio perfectamente elástico [16]; para ello, utilizamos la idea de que un defecto en una malla cristalina es un concepto esencialmente geométrico [17]. En un cristal, los defectos de línea se pueden definir de la siguiente manera: supongamos que se traza un circuito cerrado en una malla cristalina y se cuenta el número de pasos con longitud igual al espaciamiento entre los átomos de la malla que se necesitan para regresar al punto original del circuito. En un cristal perfecto el número neto de traslaciones en cada dirección debe ser cero. Si al regresar al punto original este número no se anula, debe existir una imperfección en la estructura cristalina en la región encerrada por el circuito, como se muestra en la Fig. 2 (el circuito está definido por un vector llamado de Burgers). El defecto se encuentra en la vecindad de una línea que no puede terminar en el interior del cristal; esto es, la línea se extiende de una frontera a otra o forma un ciclo cerrado. Una concentración elevada de este tipo de defectos destruye el orden traslacional de corto alcance conservando el orden orientacional de enlace de largo alcance.

El vector de desplazamiento (u_x, u_y) en un punto de la malla (con un comportamiento elástico lineal) producido por todos los defectos en la muestra, es la suma vectorial de los desplazamientos debidos a cada defecto individual. En un medio isótropo, este desplazamiento está dado por

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta + \frac{\alpha}{2} \sin \theta & (1 - \alpha) \ln r - \frac{\alpha}{2} \cos 2\theta \\ -(1 - \alpha) \ln r - \frac{\alpha}{2} \cos 2\theta & \theta + \frac{\alpha}{2} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x/2\pi \\ b_y/2\pi \end{pmatrix}, \quad (1)$$

donde α es el parámetro elástico del medio, r y θ las coordenadas polares usuales centradas en el defecto y (b_x, b_y) es el vector de Burgers que define al defecto [15].

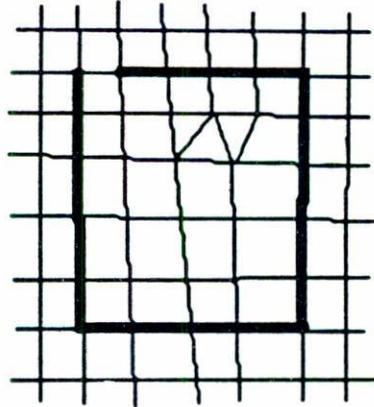


FIGURA 2. Imperfección en un cristal definida por el vector de Burgers.

Para generar la fase hexática de esta forma, construimos primero una malla triangular perfecta y colocamos al azar una concentración fija de defectos; para cada punto de la malla regular original, calculamos el vector desplazamiento sumando todas aquellas contribuciones debidas a los defectos existentes en la muestra con la Ec. (1); para este cálculo tomamos el vector de Burgers definido para la malla triangular perfecta, es decir, $(b_x = a \cos \theta, b_y = a \sin \theta)$, donde a es la constante de la malla y $\theta = s \frac{\pi}{3}$ con s un número entero al azar entre 0 y 6. La concentración de defectos en la malla original juega el papel de la temperatura en el sistema: un aumento en la concentración de defectos destruye primero el orden traslacional y posteriormente el orden orientacional, dando como resultado una fase isotrópica. La Fig. 3 muestra una fase hexática construida por medio de este procedimiento (el tamaño de esta muestra es de 2645 puntos), con una concentración de defectos del 50%. En ella se puede observar que cada punto de la malla contiene preferentemente cinco, seis o siete primeros vecinos y se pueden seguir los defectos de línea producidos en la malla original.

Las funciones de correlación proporcionan una medida cuantitativa del orden en una fase; para determinar si la fase generada es hexática, calculamos la función de correlación traslacional y la función de correlación orientacional definidas por Nelson y Halperin [18] y utilizadas en el estudio del orden en arreglos bidimensionales de una mezcla de esferas duras [19]. Aun cuando en una fase hexática existen regiones de ordenamiento cristalino, estos dominios se encuentran desfasados uno con respecto a otro: no existe una trayectoria que contenga un número entero de pasos sobre la malla perfecta original que lleve de un punto de uno de los dominios a otro punto de un dominio vecino. Este desfasamiento está determinado por el parámetro de orden traslacional, definido para un punto en la posición \mathbf{r}_j como

$$\psi_{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_j) \equiv \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}_j), \quad (2)$$

donde \mathbf{G} es un vector recíproco de la malla original sin defectos. Como los defectos desfasan esta función en π , se espera que la función de correlación traslacional muestre

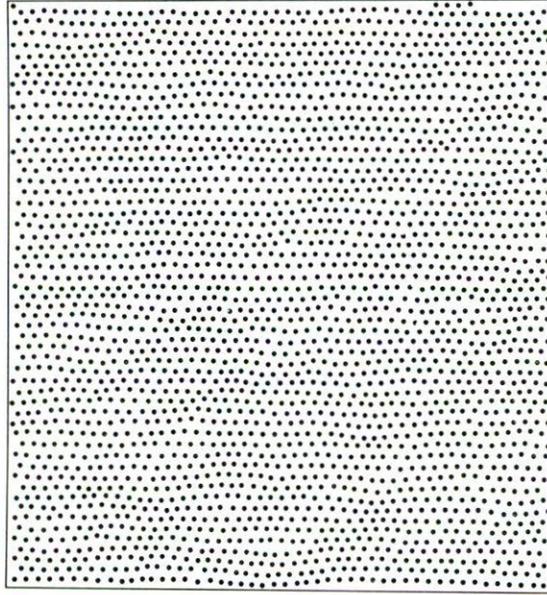


FIGURA 3. Fase hexática generada a partir de una malla triangular que contiene una alta concentración de defectos (el tamaño de la muestra es de 2645 puntos).

un decaimiento exponencial con la distancia, es decir,

$$G_T(\mathbf{r}) \equiv \langle \psi_{\mathbf{G}}^*(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{G}}(\mathbf{0}) \rangle \sim \exp(-r/\xi_T). \quad (3)$$

El promedio se efectúa sobre todos los puntos del sistema, y la longitud de correlación traslacional ξ_T debe ser comparable a la distancia entre defectos. Para la fase hexática generada, un vector recíproco de la malla triangular en el plano xy es $\mathbf{G} = \frac{2\pi}{a} \hat{x} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}a} \hat{y}$.

Para definir el orden orientacional de enlace en dos dimensiones, consideremos una distribución de enlaces en una esfera con proyección $\mathbf{r}(x, y)$ sobre el plano (x, y) . Las intersecciones de los enlaces con un círculo centrado en \mathbf{r} define una densidad angular de enlaces $\rho(\mathbf{r}, \theta)$. Cuando θ varía, $\rho(\mathbf{r}, \theta)$ registra una contribución (función delta) para cada enlace. Desarrollando esta densidad en series de Fourier, se puede escribir

$$\rho(\mathbf{r}, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \psi_m(\mathbf{r}) \exp(-im\theta), \quad (4)$$

donde $\{\psi_m(\mathbf{r})\}$ es el conjunto de coeficientes de Fourier en el plano complejo. En un líquido isótropo en dos dimensiones, la densidad de enlaces promedio debe ser exactamente igual a 6. La fase hexática está caracterizada por las fluctuaciones en $\psi_6(\mathbf{r})$, sin importar la ausencia de orden traslacional. En particular, las correlaciones en $\psi_6(\mathbf{r})$ decaen algebraicamente según la expresión

$$G_6(\mathbf{r}) = \langle \psi_6^*(\mathbf{r}) \psi_6(\mathbf{0}) \rangle \sim 1/r^\eta, \quad (5)$$

en la que el exponente η es una función de la temperatura [18]. En un líquido isótropo, $G_6(\mathbf{r})$ decae exponencialmente, lo que implica que $\psi_6(\mathbf{r})$ no presenta correlación alguna con sus puntos vecinos. Una definición alternativa para $\psi_6(\mathbf{r})$, que considera a esta cantidad en el punto medio de cada enlace, es [19]

$$\psi_6(\mathbf{r}) \equiv \exp[6i\theta(\mathbf{r})]. \tag{6}$$

Las funciones de correlación traslacional y orientacional que calculamos para la fase hexática son entonces

$$G_T(r_{ij}) = \left\langle \cos \left[\frac{2\pi}{a} \Delta x + \frac{2\pi}{\sqrt{3}a} \Delta y \right] \right\rangle \tag{7}$$

y

$$G_6(r_{ij}) = \left\langle \cos \left[6(\theta_i - \theta_j) \right] \right\rangle, \tag{8}$$

donde a es la constante de malla del medio original, r_{ij} es la distancia entre dos puntos en la fase hexática (con $\Delta x = x_i - x_j$ y $\Delta y = y_i - y_j$), θ_k es la orientación de cada enlace con respecto al eje de las x y el promedio se efectúa sobre todos los puntos de la malla. Nótese que el promedio de la parte imaginaria de cada una de las funciones de correlación se anula. Para identificar a los primeros vecinos de cada punto en la fase hexática, utilizamos la construcción de polígonos de Voronoi.

La Fig. 4 muestra las funciones de correlación traslacional y orientacional de la fase hexática de la Fig. 3. Se puede observar que G_T decae exponencialmente a muy corto alcance, pero G_6 decae como una potencia de la distancia. A distancia infinita, el valor de esta función de correlación orientacional debe ser cero. El comportamiento de las funciones de correlación es equivalente al obtenido por Nelson *et al.* [19] para una mezcla de esferas duras en un arreglo hexático. Las funciones de correlación se calcularon también para una malla triangular perfecta (a partir de la que se construye la fase hexática) y para una fase isótropa obtenida con una alta concentración de defectos en la malla original. Para la malla regular, ambas funciones de correlación son constantes e iguales a la unidad; para la fase isótropa, ambas decaen exponencialmente con la distancia.

3. LA FORMA DE EQUILIBRIO: CONSTRUCCIÓN DE WULFF

A principios de siglo Wulff [15] propuso que la forma de equilibrio de un cristal puede determinarse minimizando la energía libre interfacial para un volumen fijo de la muestra. Varias décadas después, Herring [20] formuló la teoría termodinámica que predice la forma de equilibrio de un cristal a partir de la energía libre interfacial. A la fecha, las teorías estadísticas [14] han proporcionado resultados cuantitativos satisfactorios para la energía libre interfacial a $T = 0$ y sólo algunas han considerado el efecto de las fluctuaciones térmicas sobre la forma de equilibrio de un cristal [21].

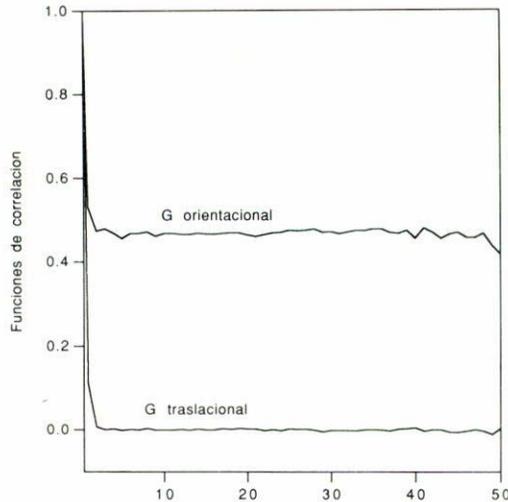


FIGURA 4. Funciones de correlación traslacional y orientacional para la fase hexática mostrada en la Fig. 1.

La variedad de formas de equilibrio que presentan los cristales es una consecuencia de la dependencia que muestra la energía libre interfacial por unidad de longitud [15] (o de área en tres dimensiones) con la orientación \hat{m} de la interfase con respecto al eje cristalográfico del bulto del material; en dos dimensiones, la energía libre interfacial es proporcional a la tensión lineal. La Fig. 5a muestra esta dependencia a nivel microscópico para un sólido con malla cuadrada; supongamos que los átomos se encuentran “enlazados” por una fuerza de pares representada en la figura por las líneas continuas entre los puntos de la malla (a esta estructura se le conoce como un cristal de Kossel). La energía libre interfacial por unidad de longitud a $T = 0$ es proporcional al número de enlaces cortados por unidad de longitud interfacial; la interfase AB corta un número distinto de enlaces que la interfase AC de la misma longitud. Si se realiza una gráfica polar de la energía libre interfacial en función de \hat{m} , se obtiene la curva externa que se muestra en la Fig. 5b; esta curva presenta mínimos en ciertas direcciones. En cada punto de esta gráfica polar se traza una línea perpendicular al radio vector en ese punto; el área que puede alcanzarse desde el origen sin cruzar ninguna de las líneas tangentes es, de acuerdo a la construcción de Wulff, geoméricamente similar a la forma de equilibrio del cristal; es decir, la forma que minimiza la energía libre por unidad de longitud para un área fija. Esta construcción se muestra con la línea interna de la Fig. 5b. Si la energía interfacial se calcula a $T = 0$, la forma de equilibrio de un dominio de un cristal con este tipo de malla será cuadrada. La metodología de Wulff para encontrar la forma de equilibrio ha sido utilizada principalmente para dominios con estructura regular; pocos trabajos se han enfocado al caso de sistemas no cristalinos anisótropos. Herring [20] analizó las energías libres relativas de distintas formas de equilibrio y estructuras de cristales, cristales líquidos y tactoides, y recientemente Oswald *et al.* [11a] estudiaron la energía libre interfacial de una interfase entre dos cristales líquidos esmécticos en equilibrio.

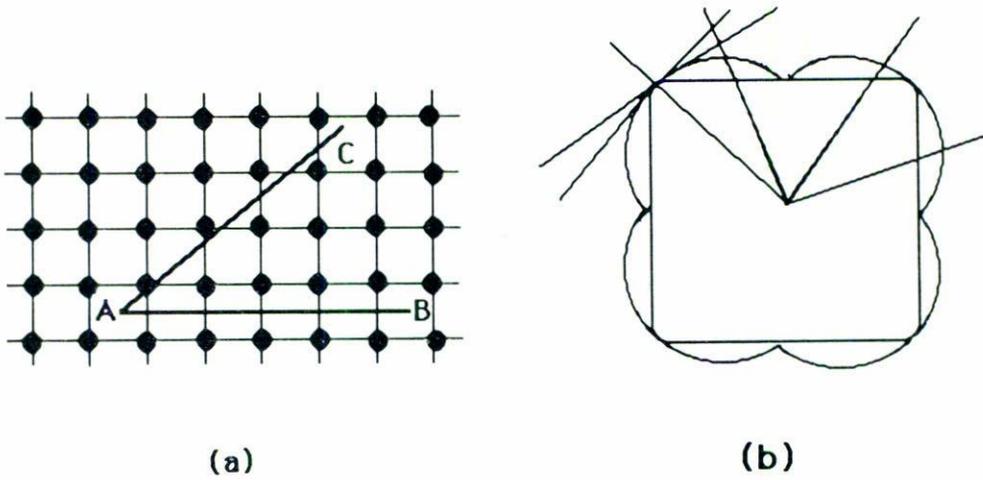


FIGURA 5. Determinación de la forma de equilibrio de un dominio con estructura cuadrada. (a) Cristal de Kossel, (b) construcción de Wulff.

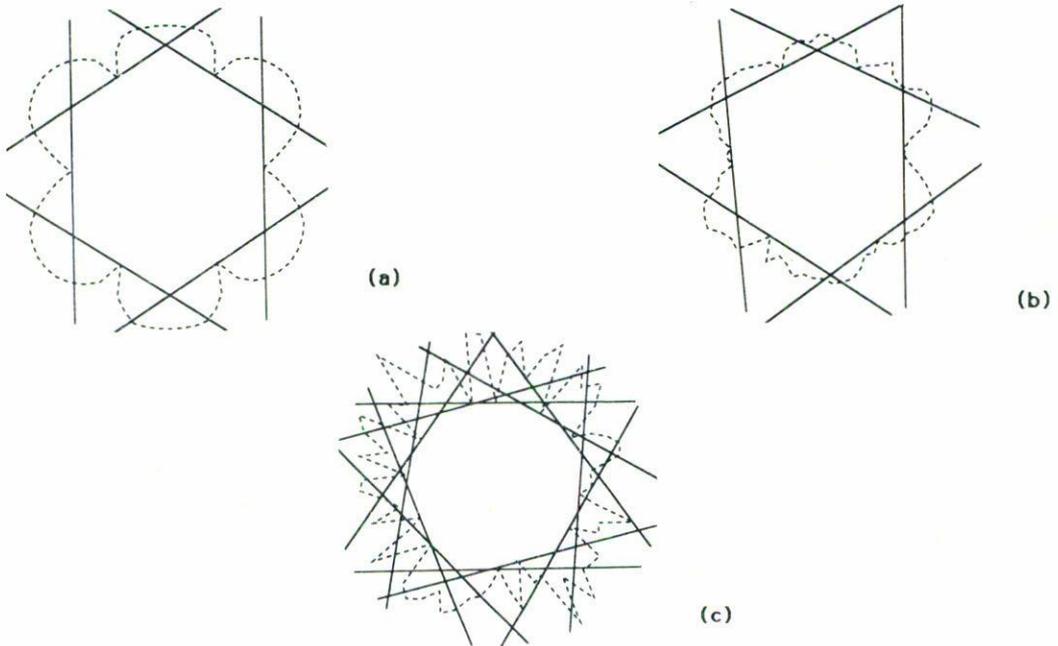


FIGURA 6. Forma de equilibrio de dominios de (a) una malla triangular perfecta, (b) una fase hexática y (c) una fase isotrópica.

Utilizamos la construcción de Wulff para calcular la forma de equilibrio de un dominio hexático rodeado por un medio isótropo; para efectos de comparación, mostramos la forma de equilibrio de una malla triangular perfecta (Fig. 6a) y de un medio isótropo (Fig. 6c) (los dominios considerados para las gráficas mostradas en la Fig. 6 tienen el mismo número de puntos). La línea punteada muestra la gráfica polar de la energía libre interfacial en función de la orientación a $T = 0$, y sólo se trazan las tangentes que representan sus valores mínimos; la forma de equilibrio es un hexágono. En el caso de la fase isótropa la energía libre muestra un mayor número de mínimos, la forma de equilibrio es irregular y tiende a ser circular. La Fig. 6b muestra la gráfica polar para la fase hexática de la Fig. 3. La construcción de Wulff predice que la energía libre en función de la orientación a $T = 0$ muestra mínimos en un arreglo con simetría hexagonal y que la forma de equilibrio para la fase hexática es un hexágono irregular. Cuando aumentamos el tamaño de la muestra, la energía libre interfacial a $T = 0$ tiene un mayor número de mínimos y la forma es circular cuando el tamaño de la muestra es infinito.

Por medio de este cálculo, encontramos que la forma de equilibrio para un dominio hexático generado a partir de una malla triangular perfecta, estimando la energía libre interfacial a $T = 0$, muestra una simetría hexagonal, es decir, es un hexágono irregular para una muestra cuyo tamaño es finito. Este comportamiento es una consecuencia del orden de los enlaces a cuasi-largo alcance presente en la fase hexática; la existencia de caras o facetas en este cálculo no garantiza que la forma de equilibrio de una fase hexática las muestre cuando la energía libre interfacial se calcula a temperaturas mayores que cero. Para poder analizar este sistema en una situación física más cercana a los resultados experimentales descritos para las monocapas de Langmuir, debemos modificar este modelo considerando el efecto de las fluctuaciones térmicas sobre la energía libre interfacial [22] y la anisotropía en la tensión lineal generada por la inclinación de las moléculas en una orientación preferencial por regiones de los dominios de la fase hexática rodeados por un medio isótropo.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a Jonathan V. Selinger y Carlos Amador por sus valiosos comentarios acerca de este trabajo y a Ian Petersen por su ayuda en la construcción de la fase hexática. M.E.C. agradece la beca otorgada por la UNAM y el apoyo parcial de la NSF (USA) para su estancia posdoctoral en la UCLA.

REFERENCIAS

1. J.D. Brock, R.J. Birgenau, J.D. Litster y A. Aharony, *Contemporary Physics* **30** (1989) 321.
2. B.I. Halperin y D.R. Nelson, *Phys. Rev. Lett.* **41** (1978) 121; *Phys. Rev. Lett.* **41** (1978) 519.
3. S. Sinha, *Proceedings of the Conference on Ordering in Two Dimensions*, ed. S. Sinha, North-Holland (1980).
4. D.Y. Noh, J.D. Brock, J.D. Litster y R.J. Birgeneau, *Phys. Rev.* **B40** (1989) 4920.
5. K.L. Babcock y R.M. Westervelt, *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 175.
6. C.M. Knobler y R.C. Desai, *Ann. Rev. Phys. Chem.* **43** (1992) (en prensa).

7. D.E. Moncton y R. Pindak, *Phys. Rev. Lett.* **43** (1979) 701.
8. J.D. Brock, R.J. Birgenau, J.D. Litster y A. Aharony, *Physics Today* 42/7 (1989) 52.
9. R.J. Birgenau y J.D. Lister, *J. Phys. Lett. Paris* **38** (1978) 1399.
10. X. Qiu, J. Ruiz García, K.J. Stine y C.M. Knobler, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 703.
11. a) P. Oswald, F. Melo y C. Germain, *J. Phys. France* **50** (1980) 3527; b) P. Oswald, J. Bechhoefer y F. Melo, *MRS Bulletin*, Volume XVI, No. 1 (1990) 38.
12. X. Qiu, J. Ruiz-García y C.M. Knobler, *Materials Research Society Symposium Series* **237** (1992) 263.
13. J. Ruiz-García, (comunicación personal).
14. C. Rottman y M. Wortis, *Physics Reports* **103** (1984) 59.
15. G. Wulff, *Z. Kristallogr. Mineral.* **34** (1901) 449.
16. I. Petersen, (comunicación personal).
17. F.R.N. Nabarro, *Theory of Crystal Dislocations*, Dover (1967).
18. D.R. Nelson y B.I. Halperin, *Phys. Rev.*, **B19** (1979) 2457.
19. D.R. Nelson, M. Rubinstein y F. Spaepen, *Philosophical Magazine A* **46** (1982) 105.
20. C. Herring, *Phys. Rev.* **82** (1951) 87.
21. C. Rottman y M. Wortis, *Phys. Rev.* **B24** (1981) 6274; R.K.P. Zia y J.E. Avron, *Phys. Rev.* **B25** (1982) 2042; C. Rottman y M. Wortis, *Phys. Rev.* **B29** (1984) 328.
22. C. Rottman y M. Wortis, *Phys. Rev.* **B24** (1981) 6274.