

# Relaciones de Fresnel y teorema de conservación de la energía para un haz electromagnético

O. MATA-MÉNDEZ

*Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas  
Instituto Politécnico Nacional, Lindavista, 07738 México, D.F.*

Recibido el 28 de noviembre de 1991; aceptado el 10 de junio de 1992

RESUMEN. Estudiamos la interacción de un haz electromagnético bidimensional arbitrario con una interfase plana dieléctrico-metal. El formalismo utilizado permite manipular simultáneamente los dos casos fundamentales de polarización. Se presenta una generalización del teorema de Green aplicable a medios homogéneos con conductividad finita. Como consecuencia de este teorema, se obtiene la conservación de la energía para un haz arbitrario que interacciona con una interfase plana dieléctrico-metal.

ABSTRACT. We study the interaction of a two-dimensional electromagnetic beam with an insulator-metal interface. The two fundamental cases of polarization are considered. We present a generalization of Green's theorem applicable to metals. As a consequence of this theorem, an expression for the energy-balance equation is obtained.

PACS: 41.10.-j

## 1. INTRODUCCIÓN

Desde hace muchos años ha habido gran interés en el estudio de la interacción de un haz electromagnético arbitrario con ciertas estructuras particulares: rendijas [1], superficies rugosas [2], películas lisas [3], superficies lisas [4-5], redes de difracción [6], etc. Este tema ha sido muy importante, tanto en óptica como en la física del estado sólido, debido a las aplicaciones científicas y tecnológicas que se han desarrollado.

En este artículo estudiamos la interacción de una onda electromagnética bidimensional con una interfase plana dieléctrico-metal. Supondremos que nuestro sistema consta de dos medios semi-infinitos, homogéneos y lineales, pudiendo ser uno de ellos un conductor. Contrariamente a lo que se acostumbra en los libros de electromagnetismo, el haz incidente bidimensional que consideraremos será un haz electromagnético arbitrario. Por ejemplo, puede ser un haz gaussiano [1], o un haz con alguna otra estructura espacial más complicada. El problema se formula de tal manera que en las ecuaciones es posible incluir automáticamente la noción de una onda arbitraria. Manejar ondas arbitrarias no es solamente pedagógico, ya que como es sabido, éstas dan lugar a efectos diferentes a los que se obtienen cuando la onda incidente es plana [7]. Por citar algunos de ellos, mencionaremos el llamado efecto Goos-Hanken y el efecto Imbert. El efecto Goos-Hanken fue descubierto en 1947 y muestra que existe un corrimiento entre el punto en el cual un haz de ancho finito toca la superficie y el punto en el cual el haz reflejado parece salir de

la superficie. Más recientemente, en 1984, se demostró que un corrimiento similar existe también en transmisión para películas [7].

En la Sec. 2 expresamos la solución general de la ecuación escalar de Helmholtz en un medio homogéneo mediante un desarrollo de ondas planas. En la Sec. 3 obtenemos las relaciones de Fresnel de manera unificada para los dos tipos de polarización, T.E. y T.M. En la Sec. 4 presentamos una generalización del teorema de Green para medios homogéneos con conductividad finita. Finalmente, en la Sec. 5 a partir del teorema de Green, obtenemos la expresión de la conservación de la energía para haces bidimensionales arbitrarios.

## 2. SOLUCIÓN GENERAL

En lo que sigue, admitiremos que la dependencia en el tiempo es de la forma  $\exp(-i\omega t)$  y que los materiales que se consideran son no-magnéticos. Supongamos que disponemos de un medio homogéneo de permitividad  $\epsilon(\omega)$ , real o compleja, normalizada a la permitividad del vacío  $\epsilon_0$ . El campo eléctrico y el campo magnético deben verificar la ecuación vectorial de Helmholtz:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

donde se ha definido la magnitud del vector de onda del medio de la siguiente manera:

$$k^2 = k_0^2 \epsilon(\omega), \quad (3)$$

siendo  $k_0$  la magnitud del vector de onda del vacío ( $k_0 = \omega/c$ ). En el medio fijaremos un sistema de coordenadas ortogonal  $Oxyz$ .

Un campo electromagnético arbitrario puede descomponerse en dos polarizaciones fundamentales independientes. Una de ellas es la polarización T.E., donde el campo eléctrico total en cada punto del espacio es paralelo al eje  $Oz$ . Y otra, la polarización T.M., para la cual el campo magnético total es paralelo a  $Oz$ . Es posible manipular simultáneamente estas dos polarizaciones si se define la función  $U$  como sigue [8]:

$$U = \begin{cases} E, & \text{caso T.E.} \\ H, & \text{caso T.M.} \end{cases} \quad (4)$$

Para simplificar el tratamiento matemático, supondremos en todo el artículo que el campo  $U$  es independiente de la coordenada  $z$  y diremos que  $U$  es una onda cilíndrica. En esta situación,  $U$  verifica la ecuación escalar de Helmholtz en dos dimensiones:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + k^2 U = 0. \quad (5)$$



En esta sección estamos interesados en determinar la solución general de la Ec. (5). Para esto, utilizaremos la transformada de Fourier en  $x$  del campo  $U(x, y)$ :

$$U(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{U}(\alpha, y) \exp(i\alpha x) d\alpha, \quad (6)$$

y cuya transformada de Fourier inversa es

$$\hat{U}(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y) \exp(-i\alpha x) dx. \quad (7)$$

Si sustituimos la Ec. (6) en la Ec. (5), factorizamos la exponencial y tomamos en cuenta que la transformada de Fourier de una función nula es nula, se obtendrá la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial y^2} + (k^2 - \alpha^2) \hat{U} = 0, \quad (8)$$

cuya solución es

$$\hat{U}(\alpha, y) = a(\alpha) \exp(-i\beta y) + b(\alpha) \exp(i\beta y), \quad (9)$$

donde  $\beta$  es alguna raíz de  $\beta^2 + \alpha^2 = k^2$ . Arbitrariamente seleccionaremos esta raíz, de tal forma que  $\beta > 0$  si  $\beta$  es real y  $\text{Im } \beta > 0$  si  $\beta$  es compleja. Si sustituimos la Ec. (9) en la Ec. (6), obtendremos la solución general de la ecuación escalar de Helmholtz en dos dimensiones para un medio homogéneo con conductividad:

$$U(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta y)} d\alpha + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} b(\alpha) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha. \quad (10)$$

Como puede observarse, cada integrando es una onda plana con vector de onda  $(\alpha, \pm\beta)$ . Así que el campo  $U(x, y)$  está dado como una superposición de ondas planas con parámetro  $\alpha$  [1-2]. Se acostumbra decir que  $U$  está expresado mediante un “desarrollo de ondas planas”, o que está dado en “la base de Fourier” [3]. Es importante mencionar, que no es la única base posible, ya que por la simetría cilíndrica podemos expresar a  $U$  en la base de funciones Bessel o en alguna otra base conveniente.

### 3. RELACIONES DE FRESNEL

Supongamos que dos medios semi-infinitos de permitividades  $\epsilon_1(\omega)$  y  $\epsilon_2(\omega)$ , normalizadas a  $\epsilon_0$ , están en contacto mediante una interfase plana, como se muestra en la Fig. 1. La

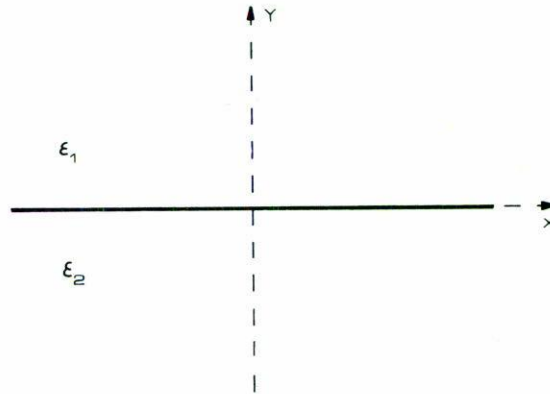


FIGURA 1. Nuestro sistema.

interfase coincide con el plano  $Oxz$ . En el resto del artículo supondremos que  $\epsilon_1(\omega)$  es real y positiva, mientras que  $\epsilon_2(\omega)$  puede ser real (positiva o negativa) o compleja.

Estamos interesados en determinar el campo total  $U$  en todo el plano  $Oxy$ , producido por una onda cilíndrica arbitraria que incide sobre la interfase. Supondremos que esta onda incidente proviene de  $y = +\infty$ , es decir, de la parte superior de la región  $\epsilon_1(\omega)$ . De la solución general determinada en la sección anterior, es posible obtener la solución en cada región semi-infinita:

Para  $y > 0$ :

$$U_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta_1 y)} d\alpha + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha) e^{i(\alpha x + \beta_1 y)} d\alpha. \quad (11)$$

Para  $y < 0$ :

$$U_2(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta_2 y)} d\alpha + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} D(\alpha) e^{i(\alpha x + \beta_2 y)} d\alpha; \quad (12)$$

estando definidas las funciones  $\beta_i (i = 1, 2)$  inmediatamente abajo de la Ec. (9).

Las condiciones de frontera, en la interfase ( $y = 0$ ) y en infinito ( $y = \pm\infty$ ), aunadas a la condición física de que la onda incidente viene de arriba de la interfase, nos permitirán resolver totalmente el problema como se verá a continuación, conduciéndonos a las relaciones de Fresnel para ondas incidentes arbitrarias. Para esto, analicemos antes que nada los valores permitidos de  $\beta_1$  y  $\beta_2$ , tomando en consideración que la condición apropiada en infinito es que los integrandos de las Ecs. (11) y (12) sean acotados cuando  $y \rightarrow \pm\infty$ .

Primero consideraremos a  $\beta_1$ . De la definición se sigue que es un real positivo si  $\alpha \in [-k_1, k_1]$ , y es imaginario puro fuera de este intervalo, con  $\text{Im } \beta_1 > 0$ . Cuando es un imaginario puro, la primera integral de la Ec. (11) no es acotada en infinito, mientras que con la segunda integral no hay problema, como puede verse fácilmente. Así, para que la condición de ser acotada pueda cumplirse, debemos imponer la siguiente restricción a  $A(\alpha)$ :

$$A(\alpha) \begin{cases} \neq 0, & \text{si } \alpha \in [-k_1, k_1] \\ = 0, & \text{si } \alpha \notin [-k_1, k_1]. \end{cases} \quad (13)$$

Como el vector de onda  $(\alpha, -\beta_1)$  de las ondas planas asociadas a  $A(\alpha)$  apuntan hacia la interfase, identificaremos como campo incidente  $U_i(x, y)$  a la siguiente integral:

$$U_i(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k_1}^{k_1} A(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta_1 y)} d\alpha. \quad (14)$$

Consideremos ahora a  $\beta_2$ . Si es real, las ondas planas de la Ec. (12) son acotadas cuando  $y \rightarrow \pm\infty$ . Pero si es complejo, como  $\text{Im } \beta_2 > 0$  las ondas planas que intervienen en la última integral de la Ec. (12) divergen. Por otro lado, cuando  $\beta_2$  es real las ondas planas de esta última integral se dirigen a la interfase, teniéndose así una onda incidente por abajo, violándose con esto nuestra hipótesis inicial de incidencia. De estos razonamientos concluimos que para cualquier caso de  $\beta_2$  (real o complejo),  $D(\alpha)$  debe ser una función nula. Cuando esta condición es satisfecha, se dice que el campo generado por la onda incidente cumple la condición de radiación de Sommerfeld, es decir, el campo producido en la interfase debe alejarse de ella.

De las consideraciones anteriores, concluimos que las soluciones admisibles en las dos regiones semi-infinitas son [1]:

Para  $y > 0$ :

$$U_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k_1}^{k_1} A(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta_1 y)} d\alpha + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha) e^{i(\alpha x + \beta_1 y)} d\alpha; \quad (15)$$

Para  $y < 0$ :

$$U_2(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta_2 y)} d\alpha. \quad (16)$$

Las funciones  $A(\alpha)$ ,  $B(\alpha)$  y  $C(\alpha)$  no son independientes, están relacionadas por las condiciones de frontera en la interfase. Estas condiciones son dadas en términos de la transformada de Fourier de  $U$  [8] de la siguiente manera:

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_2, \quad (17)$$

$$\frac{1}{v_1} \frac{\partial \hat{U}_1}{\partial y} = \frac{1}{v_2} \frac{\partial \hat{U}_2}{\partial y}, \quad (18)$$

donde

$$v = \begin{cases} 1, & \text{caso T.E.} \\ \epsilon, & \text{caso T.M.} \end{cases} \quad (19)$$

Si aplicamos estas condiciones a las Ecs. (15) y (16) obtenemos

$$A(\alpha) + B(\alpha) = C(\alpha), \quad (20)$$

$$\frac{1}{v_1} [-i\beta_1 A(\alpha) + i\beta_1 B(\alpha)] = \frac{1}{v_2} [-i\beta_2 C(\alpha)]. \quad (21)$$



Como se ha dicho,  $A(\alpha)$  es conocida, ya que es la transformada de Fourier del campo incidente en  $y = 0$ . Podemos entonces resolver el sistema anterior en terminos de  $A(\alpha)$ , obteniéndose

$$B(\alpha) = r(\alpha)A(\alpha), \quad (22)$$

$$C(\alpha) = t(\alpha)A(\alpha); \quad (23)$$

luego,  $B(\alpha)$  y  $C(\alpha)$  son lineales en  $A(\alpha)$ , es decir, en el campo incidente. Esto último debe ser así, dado que las ecuaciones de Maxwell son lineales. A las funciones  $r(\alpha)$  y  $t(\alpha)$  se les conoce con el nombre de *amplitudes de reflexión y transmisión*, respectivamente. Estas amplitudes son dadas por las *relaciones de Fresnel*:

$$r(\alpha) = \frac{\beta_1/v_1 - \beta_2/v_2}{\beta_1/v_1 + \beta_2/v_2}, \quad (24)$$

$$t(\alpha) = \frac{2\beta_1/v_1}{\beta_1/v_1 + \beta_2/v_2}. \quad (25)$$

Debemos mencionar que estas funciones dependen exclusivamente de las características del medio y pueden ser complejas. Explicitemos las relaciones de Fresnel para cada polarización:

Caso T.E.

$$r(\alpha) = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 + \beta_2}, \quad (26)$$

$$t(\alpha) = \frac{2\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}. \quad (27)$$

Caso T.M.

$$r(\alpha) = \frac{\beta_1/\epsilon_1 - \beta_2/\epsilon_2}{\beta_1/\epsilon_1 + \beta_2/\epsilon_2}, \quad (28)$$

$$t(\alpha) = \frac{2\beta_1/\epsilon_1}{\beta_1/\epsilon_1 + \beta_2/\epsilon_2}. \quad (29)$$

Es conveniente mencionar que las Ecs. (26)–(29) son equivalentes a las que se presentan usualmente en los textos de electromagnetismo [9].

Si sustituimos las Ecs. (22) y (23) en las Ecs. (15) y (16), se tendrá la solución a nuestro problema inicial, es decir, la determinación del campo  $U(x, y)$  en todo el plano  $Oxy$ .

Para  $y > 0$ :

$$U_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k_1}^{k_1} A(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta_1 y)} d\alpha + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k_1}^{k_1} r(\alpha) A(\alpha) e^{i(\alpha x + \beta_1 y)} d\alpha; \quad (30)$$

Para  $y < 0$ :

$$U_2(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k_1}^{k_1} t(\alpha)A(\alpha)e^{i(\alpha x - \beta_2 y)} d\alpha. \tag{31}$$

En estas expresiones se ha utilizado la Ec. (13). Para aplicar estas ecuaciones es necesario disponer de un modelo apropiado del campo incidente. En realidad, lo que necesitamos es la forma de la función  $A(\alpha)$ , la cual en una primera aproximación podría ser una gaussiana [1].

Finalmente, de las Ecs. (30) y (31) explicitemos las funciones  $\hat{U}_1$  y  $\hat{U}_2$ :

$$\hat{U}_1(\alpha, y) = A(\alpha)e^{-i\beta_1 y} + r(\alpha)A(\alpha)e^{i\beta_1 y}, \tag{32}$$

$$\hat{U}_2(\alpha, y) = t(\alpha)A(\alpha)e^{-i\beta_2 y}. \tag{33}$$

#### 4. TEOREMA DE GREEN

En esta sección estamos interesados en presentar una generalización del teorema de Green aplicable a medios homogéneos con conductividad. Sea  $R$  una región del plano sin hoyos y supongamos que tiene asociada una permitividad compleja  $\epsilon(\omega)$ . Denotemos por  $\mathcal{S}$  a la frontera de la región  $R$ . En la región  $R$  están definidas dos funciones complejas  $W$  y  $G$  que satisfacen la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 W + k^2 W = 0, \tag{34}$$

$$\nabla^2 G + k^2 G = 0. \tag{35}$$

En estas ecuaciones el operador laplaciano está dado en el plano  $Oxy$ , es decir, en dos dimensiones. Utilizando estas funciones calculemos la siguiente integral de línea:

$$I = \oint_{\mathcal{S}} \left( \frac{1}{v^*} W \frac{\partial G^*}{\partial n} - \frac{1}{v} G^* \frac{\partial W}{\partial n} \right) ds, \tag{36}$$

donde  $\hat{n}$  es el vector normal a la frontera  $\mathcal{S}$  (apunta hacia el exterior de la región  $R$ ) y  $ds$  es el elemento de arco. El asterisco denota el complejo conjugado. Además, el escalar  $v$  es el mismo que se definió en la Ec. (19).

Si aplicamos el teorema de la divergencia en el plano, transformaremos la integral de línea en una integral de área:

$$I = \int_R \nabla \cdot \left( \frac{1}{v^*} W \nabla G^* - \frac{1}{v} G^* \nabla W \right) dx dy. \tag{37}$$

Tomando en cuenta el resultado  $\nabla \cdot (ab) = a\nabla \cdot b + b \cdot \nabla a$ , la integral anterior se expresa como

$$I = \int_R \left( \frac{1}{v^*} W \nabla^2 G^* - \frac{1}{v} G^* \nabla^2 W \right) dx dy + \int_R \left( \frac{1}{v^*} \nabla W \cdot \nabla G^* - \frac{1}{v} \nabla G^* \cdot \nabla W \right) dx dy. \tag{38}$$

Por otro lado, de las Ecs. (34) y (35) se sigue que

$$\frac{1}{v^*} W \nabla^2 G^* - \frac{1}{v} G^* \nabla^2 W = \frac{1}{v} k^2 G^* W - \frac{1}{v^*} k^{*2} W G^*. \tag{39}$$

Si sustituimos esta última expresión en la Ec. (38) y consideramos la definición de  $I$  [Ec. (36)], obtendremos el resultado buscado:

$$\oint_S \left( \frac{1}{v^*} W \frac{\partial G^*}{\partial n} - \frac{1}{v} G^* \frac{\partial W}{\partial n} \right) ds = \left( \frac{k^2}{v} - \frac{k^{*2}}{v^*} \right) \int_R G^* W dx dy + \left( \frac{1}{v^*} - \frac{1}{v} \right) \int_R \nabla G^* \cdot \nabla W dx dy. \tag{40}$$

Esta ecuación nos muestra que los valores de  $W$  y  $G$  en el interior de la región  $R$ , están relacionados a sus valores en la frontera. Es por esta razón que podemos considerar a la Ec. (40) un teorema de Green para medios conductores.

### 5. CONSIDERACIONES ENERGÉTICAS

En esta sección utilizaremos el teorema de Green para determinar la expresión del teorema de la conservación de la energía. Nuestra configuración será la misma que se empleó en la Sec. 3 al deducir las relaciones de Fresnel. Así que disponemos de dos medios semi-infinitos, uno con permitividad real y positiva  $\epsilon_1$  y el otro con permitividad compleja  $\epsilon_2$ . La interfase seguirá siendo el plano  $Oxz$ .

Apliquemos nuestro teorema de Green a las dos regiones  $R_1$  y  $R_2$  mostradas en la Fig. 2. La región  $R_1$  está acotada por la interfase y una recta paralela al eje  $Ox$  con coordenada  $y$ , mientras que la región  $R_2$  está acotada por la interfase y una recta paralela a  $Ox$  con coordenada  $-y$ . Consideremos primero a la región  $R_1$ . De la Ec. (40) con  $G$  y  $W$  iguales a la función  $U_1$  definida en la Ec. (11) se obtiene

$$\oint_S \left( \frac{1}{v_1^*} U_1 \frac{\partial U_1^*}{\partial n} - \frac{1}{v_1} U_1^* \frac{\partial U_1}{\partial n} \right) ds = 0. \tag{41}$$

Las integrales de área se anulan debido a que  $\epsilon_1$  es real y positivo. En esta integral podemos explicitar la contribución de la interfase:

$$\int_{\text{interfase}} \left( \frac{1}{v_1^*} U_1 \frac{\partial U_1^*}{\partial y} - \frac{1}{v_1} U_1^* \frac{\partial U_1}{\partial y} \right) dx = \int_y \left( \frac{1}{v_1^*} U_1 \frac{\partial U_1^*}{\partial y} - \frac{1}{v_1} U_1^* \frac{\partial U_1}{\partial y} \right) dx. \tag{42}$$



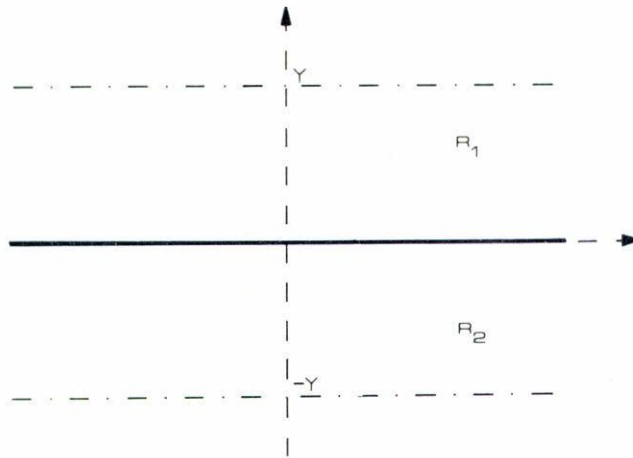


FIGURA 2. Regiones  $R_1$  y  $R_2$  donde se aplica el teorema de Green.

Para la región  $R_2$ , si hacemos a  $G$  y a  $W$  iguales a la función  $U_2$  dada en la Ec. (12), se obtiene

$$\begin{aligned}
 \int_{\text{interfase}} \left( \frac{1}{v_2^*} U_2 \frac{\partial U_2^*}{\partial y} - \frac{1}{v_2} U_2^* \frac{\partial U_2}{\partial y} \right) dx &= \int_{-y} \left( \frac{1}{v_2^*} U_2 \frac{\partial U_2^*}{\partial y} - \frac{1}{v_2} U_2^* \frac{\partial U_2}{\partial y} \right) dx \\
 &+ \left( \frac{k_2^2}{v_2} - \frac{k_2^{*2}}{v_2^*} \right) \int_{R_2} |U_2|^2 dx dy \\
 &+ \left( \frac{1}{v_2^*} - \frac{1}{v_2} \right) \int_{R_2} |\nabla U_2|^2 dx dy. \quad (43)
 \end{aligned}$$

De las condiciones de frontera se sigue, que las dos integrales de las Ecs. (42) y (43) que se calculan sobre la interfase son iguales, luego

$$\begin{aligned}
 \int_y \left( \frac{1}{v_1^*} \hat{U}_1 \frac{\partial \hat{U}_1^*}{\partial y} - \frac{1}{v_1} \hat{U}_1^* \frac{\partial \hat{U}_1}{\partial y} \right) d\alpha &= \int_{-y} \left( \frac{1}{v_2^*} \hat{U}_2 \frac{\partial \hat{U}_2^*}{\partial y} - \frac{1}{v_2} \hat{U}_2^* \frac{\partial \hat{U}_2}{\partial y} \right) d\alpha \\
 &+ \left( \frac{k_2^2}{v_2} - \frac{k_2^{*2}}{v_2^*} \right) \int_{R_2} |U_2|^2 dx dy \\
 &+ \left( \frac{1}{v_2^*} - \frac{1}{v_2} \right) \int_{R_2} |\nabla U_2|^2 dx dy, \quad (44)
 \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el teorema de Parseval-Plancherel que se expresa de la siguiente manera:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha)\hat{g}^*(\alpha) d\alpha. \quad (45)$$

Finalmente, si reemplazamos las Ecs. (32) y (33) en la Ec. (44) y tenemos la precaución de considerar que  $\beta_1$  es real, mientras que  $\beta_2$  es complejo, se obtendrá sin dificultad nuestro teorema general de la conservación de la energía:

$$\begin{aligned} \int_{-k_1}^{k_1} \frac{\beta_1}{v_1} |A(\alpha)|^2 d\alpha &= \int_{-k_1}^{k_1} \frac{\beta_1}{v_1} |r(\alpha)|^2 |A(\alpha)|^2 d\alpha \\ &+ \int_{-k_1}^{k_1} \operatorname{Re} \left[ \frac{\beta_2}{v_2} e^{i(\beta_2^* - \beta_2)y} \right] |t(\alpha)|^2 |A(\alpha)|^2 d\alpha \\ &+ \frac{1}{2i} \left( \frac{k_2^2}{v_2} - \frac{k_2^{*2}}{v_2^*} \right) \int_{R_2} |U_2|^2 dx dy \\ &+ \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{v_2^*} - \frac{1}{v_2} \right) \int_{R_2} |\nabla U_2|^2 dx dy. \end{aligned} \quad (46)$$

Si explicitamos este teorema según la polarización, se tiene lo siguiente:  
Caso T.E.

$$\begin{aligned} \int_{-k_1}^{k_1} \beta_1 |A(\alpha)|^2 d\alpha &= \int_{-k_1}^{k_1} \beta_1 |r(\alpha)|^2 |A(\alpha)|^2 d\alpha \\ &+ \int_{-k_1}^{k_1} \operatorname{Re} [\beta_2 e^{i(\beta_2^* - \beta_2)y}] |t(\alpha)|^2 |A(\alpha)|^2 d\alpha \\ &+ k_0^2 \epsilon_2'' \int_{R_2} |E_2|^2 dx dy. \end{aligned} \quad (47)$$

Caso T.M.

$$\begin{aligned} \int_{-k_1}^{k_1} \frac{\beta_1}{\epsilon_1} |A(\alpha)|^2 d\alpha &= \int_{-k_1}^{k_1} \frac{\beta_1}{\epsilon_1} |r(\alpha)|^2 |A(\alpha)|^2 d\alpha \\ &+ \int_{-k_1}^{k_1} \operatorname{Re} \left[ \frac{\beta_2}{\epsilon_2} e^{i(\beta_2^* - \beta_2)y} \right] |t(\alpha)|^2 |A(\alpha)|^2 d\alpha \\ &+ \frac{\epsilon_2''}{|\epsilon_2|^2} \int_{R_2} |\nabla H_2|^2 dx dy. \end{aligned} \quad (48)$$

Hemos llamado a la Ec. (46) el "teorema de la conservación de la energía"; debemos justificar este nombre. Para realizar esto, utilizaremos el vector de Poynting complejo:

$$\mathbf{S}_c = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \quad (49)$$

Consideremos primero el caso T.E. Utilizando la ley de Faraday podemos expresar el campo magnético en términos del campo eléctrico:

$$\mathbf{S}_c = \frac{i}{2\mu_0\omega} \left[ E \frac{\partial E^*}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + E \frac{\partial E^*}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} \right]. \quad (50)$$

La potencia promedio incidente  $\langle P_i \rangle$  que llega a la interfase es

$$\langle P_i \rangle = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_c \cdot (-\hat{\mathbf{j}}) dx = \frac{-1}{2\mu_0\omega} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}_i^*(\alpha, 0) \frac{\partial \hat{E}_i}{\partial y}(\alpha, 0) d\alpha, \quad (51)$$

donde nuevamente se ha empleado la relación de Parseval-Plancherel. Luego, la potencia promedio incidente resulta ser

$$\langle P_i \rangle = \frac{1}{2\mu_0\omega} \int_{-k_1}^{k_1} \beta_1 |A(\alpha)|^2 d\alpha. \quad (52)$$

Si comparamos esta expresión con el primer miembro de la Ec. (47), se concluirá que este último es la energía promedio incidente normalizada a  $1/2\mu_0\omega$ . De igual manera se prueba que el primer término del segundo miembro es la potencia promedio reflejada por la interfase y, por lo tanto, los dos últimos términos los identificaremos con la potencia transmitida. Todas las energías están normalizadas a  $1/2\mu_0\omega$ . Interpretemos el último término de la Ec. (47), para esto recordemos [10] que el calor promedio producido por unidad de área y de tiempo es proporcional a  $\epsilon''|E|^2$ , luego este último término proporciona la disipación de energía en la región  $R_2$ .

Consideremos ahora el caso T.M. El vector de Poynting complejo se expresa como

$$\mathbf{S}_c = \frac{i}{2\omega\epsilon} \left[ H^* \frac{\partial H}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + H^* \frac{\partial H}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} \right], \quad (53)$$

luego, la potencia promedio incidente en el caso T.M. es

$$\langle P_i \rangle = \frac{-1}{2\omega\epsilon_1} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}_i^*(\alpha, 0) \frac{\partial \hat{H}_i}{\partial y}(\alpha, 0) d\alpha; \quad (54)$$

es decir,

$$\langle P_i \rangle = \frac{1}{2\omega} \int_{-k_1}^{k_1} \frac{\beta_1}{\epsilon_1} |A(\alpha)|^2 d\alpha. \quad (55)$$

El mismo razonamiento que en el caso T.E. nos conduce a las siguientes conclusiones. El miembro izquierdo de la Ec. (48) es la potencia incidente, el primer término del segundo miembro es la potencia reflejada y los dos últimos corresponden a la potencia transmitida. Todas las potencias son normalizadas a  $1/2\omega$ . El último término corresponde al calor



promedio producido en la región  $R_2$ ; es de notar que está dado en función de  $H$  y no de  $E$ . Con esto hemos justificado la Ec. (46) como un teorema de conservación de la energía.

## 6. CONCLUSIONES

A partir del descubrimiento del efecto Goos-Hanken en 1947 [7], quedó establecido que un haz de ancho finito era capaz de dar propiedades diferentes a las obtenidas con una onda incidente plana. A pesar de este importante efecto y de interesantes investigaciones posteriores, poco se ha escrito sobre el tema en los textos de electromagnetismo [11].

En este artículo hemos obtenido las relaciones clásicas de Fresnel y el teorema de conservación de la energía para haces arbitrarios. Nos fue posible manipular simultáneamente los dos tipos de polarización. Consideramos que lo más importante del artículo es la manera como se obtuvo el teorema de conservación de la energía, ya que este método nos permitirá extenderlo sin dificultad a situaciones más complicadas, como es el caso de superficies rugosas metálicas [2]. Con estos resultados, podremos en un futuro tratar de manera más adecuada la interacción de un haz de un láser con una interfase plana dieléctrico-metal, donde las transformadas de Fourier de los diferentes modos del láser están dadas por productos de gaussianas con polinomios de Hermite de orden arbitrario [12]. También será posible estudiar el efecto Goos-Hanken en transmisión para películas delgadas, un tema muy importante y poco estudiado.

## REFERENCIAS

1. O. Mata-Mendez, M. Cadilhac and R. Petit, *J. Opt. Soc. Am.* **73** (1983) 328.
2. O. Mata-Mendez, *Phys. Rev.* **B37** (1988) 8182.
3. F. Falco and T. Tamir, *J. Opt. Soc. Am.* **A7** (1990) 185.
4. Shuzhang Zhang and Chongcheng Fan, *J. Opt. Soc. Am.* **A5** (1988) 1407.
5. W. Nasalski, T. Tamir and Lida Lin, *J. Opt. Soc. Am.* **A5** (1988) 132.
6. Takato Kudou, Mitsuhiro Yokota and Otozo Fukumitsu, *J. Opt. Soc. Am.* **A8** (1991) 718.
7. Jeffrey J. Regan and David R. Andersen, *Computers in Physics* (Jan./Feb. 1991) p. 49.
8. O. Mata-Mendez and P. Halevi, *Phys. Rev.* **B36** (1987) 1007.
9. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York (1975).
10. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Electrodynamics of continuous media*, Pergamon Press, New York (1960) p. 254.
11. Por ejemplo, no se discuten haces de ancho finito en la Ref. [9]; Ref. [10]; J. Van Bladel, *Electromagnetic fields* Mc Graw-Hill, New York (1968); J.R. Reitz y F.J. Milford *Fundamentos de teoría electromagnética*, UTEHA, México (1969), por citar algunos textos clásicos.
12. A. Zuñiga-Segundo and O. Mata-Mendez, "Interaction of S-polarized beams with infinitely conducting grooves: enhanced fields and dips in the reflectivity", *Phys. Rev.* **B46** (1992) 536.