 Revista Mexicana de Física **38**, *No. 6 (1992) 951–967*

Los cronómetros, la luz y la transformación de coordenadas espacio-temporales

JAIME KARLES GÓMEZ
Departamento de Física, Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia, Seccional Medellín. Colombia

Recibido el 30 de octubre de 1991; aceptado el 21 de agosto de 1992

RESUMEN. En este trabajo se obtienen las ecuaciones de transformación relativista para longitudes y tiempos, basándose en el hecho de que la medida de un intervalo temporal o espacial debe ser expresada por dos factores: valor y unidad de medida. Una técnica de doble subíndice permite distinguir en cuál sistema se hace la medida y a cuál sistema se refiere esta última. La transformación que experimentan las unidades de medida al cambiar de referente inercial, provoca la conocida modificación en los valores de la magnitud temporal o espacial medidas. Por este mismo expediente se obtiene la transformación relativista de velocidades.

ABSTRACT. In this paper we obtain the relativistic transformation equations for length and time, based on the fact that the measurement of a space or time interval must be expressed by two factors: value and units of measurement. A technique of double subscript allows to distinguish between the reference system in which the measurement is made and the reference system to which the measurement is referred. The transformation on the units of measurement when the inertial frame is changed produces the well known modification on the measured space-time magnitudes. By using the same analysis one obtains the relativistic velocity transformation.

PACS: 01.55.+b; 03.30.+p

1. INTRODUCCIÓN

La variable temporal se define a través de un movimiento periódico aceptado como uniforme por conveniencia. El Sol y luego las estrellas han sido privilegiados de esta manera en diferentes épocas, constituyéndose así en cronómetros considerados universales.

En la Sec. 2 de este trabajo se introduce el concepto de intervalo temporal de residencia para un cronómetro: existe un intervalo temporal durante el cual el puntero del cronómetro reside (se mantiene) en un valor determinado de la variable temporal. Esto permite definir la unidad de tiempo del cronómetro, la cual coincide con el menor intervalo de residencia de su puntero.

Después de los movimientos celestes, el último movimiento privilegiado ha sido el de la luz, y con ella los cronómetros ópticos han desplazado a los astronómicos, y la pretendida universalidad de los instantes ha dado lugar a una modesta —pero segura— localidad de los mismos.

En la Sec. 3, se examina el funcionamiento de un cronómetro de oscilador luminoso. El intervalo de residencia unitario permite estimar la magnitud de los intervalos temporales, asignándoles valores; pero también, y ello es de fundamental importancia en este desarrollo, explicitando las unidades de medida empleadas [1,2]. Se hace necesario, pues, rescatar ese doble aspecto de la medida de longitudes y tiempos: valor y unidad de medida.

Es posible, entonces, relacionar los intervalos de residencia unitarios de cronómetros ópticos que pertenecen a dos sistemas de referencia diferentes; es decir, encontrar la relación que existe entre sus respectivas unidades de tiempo. Para ello se utiliza una técnica de doble subíndice, que permite especificar tanto el sistema donde está ubicado el cronómetro, como el sistema al cual se refieren sus medidas. Al cambiarse el sistema de referencia del cronómetro, su unidad de tiempo modifica automáticamente uno de los subíndices que la identifican, convirtiéndose en una unidad de subíndices diferentes. Al efectuar las operaciones que permiten transformar las unidades híbridas en unidades de subíndices iguales, correspondientes al nuevo sistema, se obtiene una modificación en los valores de los intervalos temporales medidos, completándose así el proceso de transformación de la medida. Por lo tanto, en el proceso de transformación de una medida, lo primero que debe examinarse es lo que ocurre con la unidad de medida y luego con el valor de la misma.

En la Sec. 4 del artículo se estudia el papel que desempeñan los cronómetros en la transformación de las unidades de longitud de un sistema inercial a otro, así como la diferencia de fase que aparece entre cronómetros de un mismo sistema al mudarse la referencia [3,4].

En la Sec. 5 se obtienen los algoritmos para transformar coordenadas espaciales y temporales entre dos sistemas de referencia diferentes.

Finalmente, en la Sec. 6 se estudia la manera en que esas modificaciones experimentadas por las coordenadas espaciales y temporales determinan una transformación muy particular de las velocidades al cambiar el sistema al cual se refieren.

Todo lo anterior se desarrolla mediante un diálogo entre Olga, cuyas ideas se desenvuelven fundamentalmente en el plano conceptual, tratando de superar las concepciones usuales; José, quien fiscaliza el manejo del conocimiento oficial; y Manuel, a quien sólo le interesan las conclusiones prácticas.

2. Intervalo temporal de residencia

Manuel: ¿Qué hace un cronómetro mientras su puntero pasa de una posición a la siguiente?

Olga: Sigue marcando el mismo valor de tiempo...

José: Pero, entonces, todos los sucesos que ocurren para el mismo valor de tiempo resultarían siendo simultáneos...

Olga: Así es.

José: ¿Y si el puntero se demora una hora en pasar de un valor al siguiente?

Olga: Mientras no exista otro puntero más rápido, todos los sucesos que ocurran en esa hora serán simultáneos.

Manuel: Pero nosotros sabemos que todos esos sucesos no son simultáneos...

Olga: Es cierto, pero es que tenemos otros cronómetros que inconscientemente están ordenando mentalmente los sucesos que ocurren durante esa hora. ¿Por qué no decimos nada de los sucesos que ocurren durante una décima de segundo?

Manuel: ¡Ah! Lo que pasa es que no somos capaces de percibir la secuencia en que ocurren.

Olga: Y por eso, ¿tenemos derecho a considerarlos simultáneos?

José: Entonces, todos los fenómenos que ocurran entre un valor de tiempo y el siguiente, ¿ocurren simultáneamente?

Olga: Sí, porque son sucesos indiscernibles, temporalmente hablando. Ocurren en el mismo instante t, o durante el intervalo temporal de residencia del puntero en un valor dado de t.

Manuel: ¿Es que el puntero se queda parado en un valor durante un intervalo de tiempo?

Olga: Así es. Mientras transcurre la unidad de tiempo.

José: O sea que ¿la duración de la unidad de tiempo es la duración del instante... ?

Olga: Así es. Sin embargo, para hablar de la duración de la unidad de tiempo de un cronómetro se necesita otro cronómetro cuyo puntero se mueva más rápidamente. Empleando el minutero se puede establecer que la hora dura 60 minutos, y haciendo uso del segundero se puede establecer que cada minuto dura 60 segundos.

José: Pero también se podría establecer la duración de un segundo, haciendo uso de punteros aún más rápidos.

Olga: En efecto, el instante dura lo mismo que el intervalo temporal de residencia del puntero más rápido de que se disponga.

Manuel: ¿Por qué del más rápido?

Olga: Porque ese es el que tiene el intervalo de residencia más pequeño. No existe forma de ordenar secuencialmente los sucesos que ocurren mientras transcurre.

José: ¿Y si aparece otro puntero más rápido?

Olga: Entonces el instante lo define ese otro puntero.

Manuel: ¡O sea que el instante va cambiando con la época!

José: ¡Y es continuamente divisible!

Manuel: El instante es... la unidad de tiempo...

3. CRONÓMETROS ÓPTICOS

Manuel: ¿No se podrían emplear cronómetros mecánicos para relacionar los intervalos temporales de dos sistemas de referencia?

Olga: Sí. Podría emplearse un cronómetro constituido por una partícula moviéndose verticalmente entre dos planos horizontales. Los choques de la partícula contra los planos deberían ser perfectamente elásticos. Creo que es importante señalar que este tipo de cronómetro tiene dos componentes, cuyos movimientos pueden ser eventualmente independientes; ellos podrían denominarse "el oscilador" y "los topes", respectivamente. El oscilador se mueve entre los topes.

Manuel: ¿Y qué ocurre al referir el funcionamiento de este cronómetro a un sistema de referencia que se aparta de él con cierta velocidad... ?

José: Se modifica el estado de movimiento del oscilador y de los topes... Pasan del reposo al movimiento.

Olga: Pero, al modificar la referencia, el oscilador y los topes experimentarán los mismos cambios de velocidad, de tal manera que el movimiento del primero respecto a los segundos no variará.

José: ¿Qué pasa si el oscilador es una onda luminosa?

Olga: En ese caso el movimiento del oscilador es completamente independiente del movimiento de los topes, y al hacer los cambios de referencia uno y otro resultan afectados en diferente forma.

José: ¿Por qué?

Olga: Porque las ondas luminosas no son arrastradas por los sistemas de referencia, en sus movimientos...

José: Es decir, ¿no se les puede agregar ni quitar movimiento cuando se cambia de sistema de referencia?

Olga: Así es. Además, la velocidad de propagación de las ondas luminosas es independiente del movimiento de la fuente emisora, es decir, del movimiento del sistema que las emite.

José: ¿Qué pasa entonces con los cronómetros luminosos?

Olga: Bueno, cuando esos cronómetros están en movimiento se altera el intervalo de residencia del oscilador luminoso... respecto al intervalo de cronómetros en reposo.

José: O sea que el movimiento del cronómetro modifica sus unidades de tiempo...

Olga: ¡Correcto! Cuando estos cronómetros se refieren a un sistema móvil, sus unidades de tiempo aparecen más grandes que las de cronómetros iguales que se muevan con aquel sistema.

José: Entonces, las unidades de tiempo de los cronómetros móviles son mayores que las que esos mismos cronómetros presentan cuando están en reposo.

Olga: Es otra forma de decir lo mismo...

Manuel: ¿O sea que el cronómetro experimenta modificaciones en su funcionamiento cuando se cambia el sistema al que se refiere su movimiento?

Olga: Así es. Al cronómetro se le incorpora de alguna manera el movimiento que tiene el sistema de referencia... respecto a él.

Manuel: ¿Cómo se podría ilustrar eso?

Olga: Puede diseñarse un cronómetro de oscilador óptico, cuyo intervalo de residencia se establezca por el viaje de ida y vuelta de un haz luminoso entre dos espejos que se encuentran separados una distancia D, perpendicular a la dirección de movimiento de los sistemas S_1 y S_2.

Manuel: No veo qué pueda pasar con ese tipo de cronómetro.

Olga: Estos cronómetros funcionan de una manera cuando están en reposo y de otra cuando están en movimiento. En la Fig. 1(a) se muestra la trayectoria que describe el haz luminoso del cronómetro del sistema S_2 respecto al propio sistema S_2, mientras que en la Fig. 1(b) se muestra esa trayectoria cuando el cronómetro se refiere al sistema S_1, que se aparta de S_2 con velocidad uniforme v.

José: Parece ser que la luz recorre el brazo D con una velocidad menor que c, cuando el cronómetro se refiere a S_1.

Olga: ¿Cuál sería esa velocidad?

José: Parece ser una componente de c..., es decir, $c \operatorname{sen} \theta$...

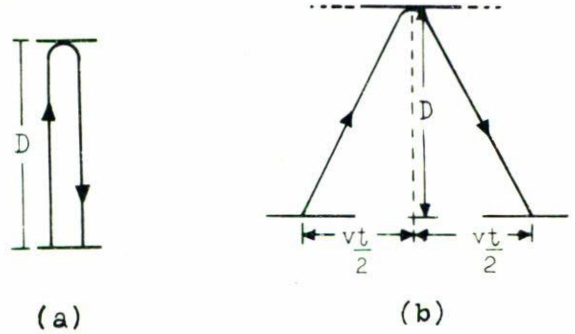

FIGURA 1.

Olga: No... Las ondas luminosas siempre tienen la misma velocidad c, en cualquier dirección. Lo que ocurre cuando el cronómetro se mueve es que el pulso luminoso emitido desde la posición que ocupa el espejo inferior debe recorrer en el sistema S_1 una distancia mayor que D.

Manuel: Así es... Debe recorrer una diagonal, en lugar de recorrer la vertical...

Olga: Podríamos hacer un esquema con diversas posiciones del cronómetro y de ese pulso luminoso en el sistema S_1, para ver cómo es el proceso de acercamiento entre ellos.

Manuel: Sí... Eso permitiría ver un poco mejor las cosas.

Olga: Primero que todo hay que aclarar que el cronómetro de S_2 tiene como referencia al sistema S_1...

Manuel: O sea que el sistema S_2 y su cronómetro se desplazan respecto al sistema S_1...

José: Así como también lo hace el pulso luminoso del cronómetro S_2...

Olga: Pero tengan en cuenta que al referir el cronómetro de S_2 al sistema S_1, los espejos de ese cronómetro adquieren la velocidad v que, en relación a S_1, tiene el sistema S_2... pero el pulso luminoso no adquiere esta velocidad adicional. Su velocidad siempre es c, al ser medida desde S_1. Al fin y al cabo, la luz se propaga en el sistema S_1 aunque sea emitida desde el sistema S_2.

Manuel: Entonces, ¿los espejos del cronómetro de S_2 se desplazan respecto a S_1 con velocidad v, mientras que el pulso luminoso lo hace con velocidad c...?

Olga: ¡Efectivamente!. Ahora bien... En la Fig. 2 pueden observarse cuatro posiciones sucesivas del cronómetro de S_2 y del pulso luminoso emitido por ese cronómetro cuando está ocupando la posición señalada como 1, en el sistema de referencia S_1.

Puede verse que la distancia z que separa el pulso del espejo superior, en el instante t del sistema S_1, viene expresada por la ecuación

$$z = \sqrt{D^2 + (vt)^2} - ct,$$

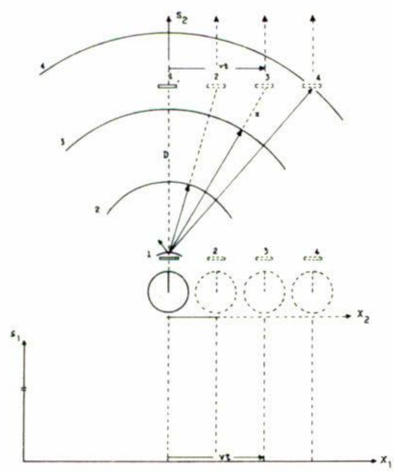

FIGURA 2.

y la rapidez con que se aproxima el pulso al espejo superior es

$$\frac{dz}{dt} = c - \frac{v^2 t}{\sqrt{D^2 + (vt)^2}}.$$

José: Todas esas distancias y tiempos están medidos en el sistema S_1...

Olga: Así es.

José: ¡Lo cual indica que la rapidez con que se aproxima el pulso al espejo superior no es c!

Olga: Así es en el sistema S_1... Pero, quién sabe qué ocurrirá con las mediciones que se hagan desde el sistema S_2.

José: Entonces, la unidad de tiempo del cronómetro de S_2 es mayor cuando se le ve mover que cuando está quieto.

Olga: En efecto. Si llamamos $[s_2]$ la unidad de tiempo del sistema móvil S_2 y $[s_1]$ la unidad de tiempo del cronómetro de S_1, las dos unidades estarán relacionadas por la ecuación $[s_1]/[s_2] = \alpha$, donde $\alpha = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$.

Manuel: Entonces, los $[s_2]$ son mayores que los $[s_1]$.

Olga: Según se aprecia desde el sistema S_1... Sin embargo, las unidades de tiempo de ambos cronómetros son iguales cuando están en reposo uno respecto a otro.

Manuel: ¡Caramba! Me parece un enredo eso de que... una cosa es la unidad de tiempo del cronómetro de S_2,... cuando éste se refiere al sistema S_2,... y otra distinta al ser referido al sistema S_1.

Olga: Sería mejor cambiar la nomenclatura empleada para nombrar las unidades de tiempo de los cronómetros...

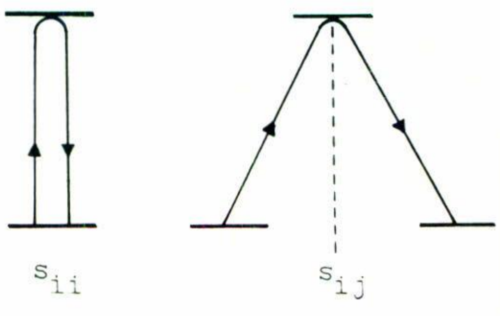

FIGURA 3.

Manuel: ¿De qué manera?

Olga: Podrían emplearse dos subíndices para especificar a toda unidad de tiempo. El primero de ellos permitiría identificar el sistema donde se encuentra el cronómetro, mientras que el segundo identificaría el sistema al cual se refiere su funcionamiento. Así,

$[s_{11}]$: unidad de tiempo del sistema 1, referida al propio sistema 1.

$[s_{22}]$: unidad de tiempo del sistema 2, referida al propio sistema 2.

$[s_{12}]$: unidad de tiempo del sistema 1, referida al sistema 2.

$[s_{21}]$: unidad de tiempo del sistema 2, referida al sistema 1.

Manuel: O sea que las unidades de tiempo de un cronómetro, referidas a un sistema en reposo respecto al cronómetro, tienen ambos subíndices iguales, mientras que las unidades de tiempo de un cronómetro, referidas a un sistema que se mueve respecto al cronómetro, tienen subíndices diferentes.

Olga: ¡Exactamente!

Manuel: ¿Y cómo se podrían relacionar, con esta nomenclatura, las unidades de tiempo de dos sistemas, S_i y S_j, en movimiento relativo?

Olga: Si los dos sistemas se apartan uno del otro con velocidad constante $v[m/s]$, a lo largo de un eje horizontal, y los espejos del cronómetro luminoso están dispuestos verticalmente, las unidades de tiempo estarían relacionadas por las siguientes expresiones:

$$[s_{ij}] = [s_{jj}]/\alpha, \qquad [s_{ji}] = [s_{ii}]/\alpha.$$

Puede decirse que la relación entre ellas está regida por las igualdades

$$[s_{ij}] = [s_{ji}]$$

$$[s_{ii}] = [s_{jj}]$$

En el la Fig. 3 se muestran las trayectorias de los pulsos luminosos, que corresponden a cada una de estas unidades de tiempo.

José: Pero, si $[s_{ii}] = [s_{jj}]$, entonces las unidades de tiempo de todos los sistema son iguales...

Olga: ...cuando se refieren al propio sistema en que se encuentra en reposo el cronómetro que hace la medida. En eso consiste precisamente la supuesta igualdad de funcionamiento de los cronómetros... cuando se encuentran en reposo relativo.

José: Y además, la igualdad $[s_{ij}] = [s_{ji}]$, indica que la modificación sufrida por la unidad de tiempo de un sistema, cuando el funcionamiento de sus cronómetros se refieren a un sistema diferente,... es recíproca.

Manuel: ¿Qué quieres decir con eso?

Olga: Es decir, igual se modifica la unidad de tiempo del sistema S_i al referirla al sistema S_j, que lo que se modifica la unidad de tiempo del sistema S_j al referirla al sistema S_i.

José: ¿Cuál sería la modificación experimentada por los intervalos temporales medidos en un sistema, al referirlos a otro sistema?

Olga: Bueno,... un intervalo temporal medido en un sistema se evalúa con unidades de tiempo de ese sistema. Es decir, con $[s_{ii}]$ o $[s_{jj}]$... Un intervalo medido en el sistema S_i estaría formado de dos partes; así por ejemplo, 4 $[s_{ii}]$, consta del valor 4 y de las unidades $[s_{ii}]$. Al referir el intervalo al sistema S_j el valor 4, obtenido en el sistema S_i, sigue siendo igual respecto al sistema S_j, pero las unidades $[s_{ii}]$ se transforman automáticamente en unidades $[s_{ij}]$.

Manuel: O sea, que el intervalo de 4 $[s_{ii}]$ se transforma en el intervalo de 4 $[s_{ij}]$...

Olga: Así es. Al valor del intervalo, que es 4 en el caso anterior, se le acostumbra llamar "valor propio" del intervalo.

José: ¿Y qué pasa entonces con esos 4 $[s_{ij}]$? ¿A cuántos $[s_{jj}]$ corresponden?

Olga: Hay que transformar los $[s_{ij}]$ en $[s_{jj}]$, que son los segundos del sistema S_j.

Manuel: Y ¿por qué no se deja el intervalo en $[s_{ij}]$?

Olga: Eso no sería correcto, ya que ningún observador percibe con segundos de subíndices diferentes.

Manuel: Entonces, ¿para qué sirven esos segundos?

Olga: Para referir segundos de un sistema a otro sistema diferente.

Manuel: ¿Y cómo se transforman los $[s_{ij}]$ en $[s_{jj}]$?

Olga: Multiplicando por una fracción cuyo numerador es 1 $[s_{jj}]$ y cuyo denominador es $\alpha[s_{ij}]$. Al hacer eso, 4 $[s_{ij}]$ se transforman en $(4/\alpha)[s_{jj}]$..., lo cual equivale a decir que 4 segundos del sistema S_i se transforman en $4/\alpha$ segundos del sistema S_j.

José: Entonces el valor "propio" 4 se transforma en otro valor mayor; es decir, en $4/\alpha$.

Olga: Ese nuevo valor se denomina "impropio". Puede decirse que si t_{ii} es el valor del intervalo temporal medido en el sistema S_i, cuando es medido en $[s_{ii}]$, y t_{ij} es el valor de ese mismo intervalo al ser referido al sistema S_j, medido en $[s_{jj}]$, la relación entre esos valores es $t_{ii}/t_{ij} = \alpha$

José: ¿Y t_{ij} es un valor "impropio"?

Olga: Así es.

4. Unidades de longitud y sincronización de cronómetros

Manuel: ¿Pueden influir los cronómetros en la medición de una longitud?

José: Tanto en la medición como en los valores que presenta dicha longitud cuando se refiere a diferentes sistemas inerciales.

Manuel: ¿Cómo es eso?

José: Los cronómetros permiten referir a otro sistema las longitudes encontradas en un sistema.

Manuel: ¿De qué manera?

José: Ellos permiten determinar el intervalo temporal que transcurre mientras un haz luminoso recorre la longitud medida en viaje de ida y vuelta.

Manuel: ¿Y así se determina la longitud?

José: En efecto. Es un procedimiento topográfico... Si se tiene una longitud L, que descansa sobre el eje horizontal del sistema S_j, la onda luminosa demora un tiempo $t_{jj}[s_{jj}]$ para hacer el recorrido de ida y vuelta, cuyo valor es... $t_{jj} = 2L/c$.

Manuel: Pero esa es una medida que se hace en el sistema en el cual se encuentra en reposo la longitud medida.

José: Así es. En la ecuación anterior podría cambiarse L por L_{reposo} y escribirse como

$$t_{jj} = 2L_{\text{reposo}}/c$$

Manuel: ¿Y cómo se refiere ese proceso al sistema S_i?

José: Al referir el proceso de medida anterior al sistema S_i se encuentra que los extremos de la longitud medida se mueven con velocidad v respecto al sistema S_i, mientras que las ondas luminosas empleadas para efectuar la medición se mueven con velocidad c respecto a este mismo sistema... Ya lo hemos comentado antes. La demora total de la onda luminosa, para el viaje de ida y vuelta sobre la longitud móvil, en el sistema S_1, es

$$\frac{L_{\text{móvil}}}{(c-v)} + \frac{L_{\text{móvil}}}{(c+v)} = t_{ii}[s_{ii}],$$

$$\frac{2cL_{\text{móvil}}}{(c^2-v^2)} = t_{ii}[s_{ii}].$$

Manuel: ¿Y cómo se relaciona la medida hecha en S_i con la medida hecha en S_j?

José: Puede referirse al sistema S_i el intervalo temporal $t_{jj}[s_{jj}]$..., obteniéndose un intervalo igual a $(t_{jj}/\alpha)[s_{ii}]$.

Manuel: ¿El valor t_{jj}/α es igual a t_{ii}?

José: Así es. Al plantear la igualdad entre las dos expresiones,

$$\frac{2cL_{\text{móvil}}}{(c^2-v^2)} = \frac{2L_{\text{reposo}}}{\alpha \cdot c},$$

se encuentra la relación entre $L_{\text{móvil}}$ y L_{reposo}.

Manuel: ¿Cuál es?

Olga: Pues

$$L_{\text{móvil}} = \alpha \cdot L_{\text{reposo}}.$$

Manuel: Pero no recuerdo haber visto anteriormente esa expresión.

José: Lo que pasa es que se acostumbra denominar L_{propia} a la L_{reposo}, mientras que a la $L_{\text{móvil}}$ se la llama L_{impropia}.

Manuel: Entonces, la ecuación anterior toma la forma

$$L_{\text{impropia}} = \alpha \cdot L_{\text{propia}}.$$

José: Así es.

Manuel: Y si L_{propia} es el metro patrón del sistema S_j?

Olga: Entonces, al ser referido al sistema S_i su longitud es menor.

Manuel: O sea, ¿que los metros del sistema móvil son diferentes a los del sistema en reposo?

Olga: No hombre... Son completamente iguales... pero cuando están en reposo relativo.

Manuel: Entonces, al patrón de longitud le ocurre algo similar a lo que sucede con las unidades de tiempo.

Olga: ¡Efectivamente! Y puede dársele un tratamiento similar al que se les daba a ellas.

Manuel: ¿Se puede representar mediante dos subíndices, como se hacía con las unidades de tiempo?

Olga: Así es. Existen metros que tienen los dos subíndices iguales, mientras que otros tienen subíndices diferentes. Por ejemplo,

$1[m_{ij}]$: es el metro patrón del sistema S_i cuando está siendo referido al sistema S_j.

$1[m_{ii}]$: es el metro patrón del sistema S_i, cuando está siendo referido al sistema S_i.

Manuel: ¿Y qué relación hay entre ellos?

Olga: De acuerdo con la ecuación que relaciona las longitudes "propias" e "impropias", puede decirse que

$$1[m_{ij}] = \alpha[m_{jj}]$$

$$1[m_{ji}] = \alpha[m_{ii}].$$

Manuel: ¿Y qué relación hay entre los metros de cada sistema de referencia?

Olga: Son idénticos entre sí... cuando están en reposo relativo. Es decir, se cumple que $1[m_{ii}] = 1[m_{jj}]$.

Manuel: Pero todo eso es muy parecido a lo que ocurre con las unidades de tiempo $[s_{ii}]$ y $[s_{ij}]$

Olga: ¡Así es!

José: Y para transformar longitudes de un sistema a otro, ¿no se podría emplear un procedimiento similar al que se usa en la transformación de intervalos temporales?

Olga: Sí.

Manuel: ¿Cómo?

Olga: Al medir una longitud que se encuentra quieta en el sistema S_i, se encuentra un valor "propio" acompañado de unidades de ese sistema. Digamos, por ejemplo, que la longitud de una varilla quieta en el sistema S_j sea $L_{jj}[m_{jj}]$. Al referirla al sistema S_i, automáticamente se transforma en $L_{jj}[m_{ji}]$. Luego, al transformar los $[m_{ji}]$ en $[m_{ii}]$, se encuentra que los $L_{jj}[m_{jj}]$ del sistema S_j se convierten en $\alpha \cdot L_{jj}[m_{ii}]$ del sistema S_i. La cantidad $\alpha \cdot L_{jj}$ es el valor impropio de la longitud de la varilla.

Manuel: ¿Cómo se sabe cuándo un valor es "impropio" y cuándo es "propio"?

Olga: Con el sistema de doble subíndice se puede indicar eso. Cuando el valor de la longitud tiene dos subíndices iguales a i, por ejemplo, es porque ha sido medida en reposo en el sistema S_i. Pero si las unidades de longitud que lo acompañan son del sistema S_j es porque la longitud ha sido referida a este último sistema. En ese caso el valor de la longitud es impropio. En el caso considerado anteriormente $\alpha \cdot L_{jj}$ es una longitud "impropia" de la varilla.

Manuel: ¿Cómo influye todo esto en la sincronización de cronómetros?

Olga: Si la sincronización se va a hacer en el sistema de referencia S_j, pero el proceso se refiere al sistema S_i, la señal luminosa emitida desde el punto intermedio entre dos cronómetros consecutivos de S_j se acerca a uno de ellos con mayor rapidez que al otro.

Manuel: O sea que no llega simultáneamente a los dos cronómetros.

Olga: En efecto. Si la distancia que separa los dos cronómetros en el sistema S_j es $x_{jj}[m_{jj}]$, al ser referida al sistema S_i será $\alpha \cdot x_{jj}[m_{ii}]$... Por otra parte, la rapidez con que se acerca la señal de sincronización a uno de los cronómetros de S_j es $c + v$, mientras que al otro es $c - v$. Esto hace que exista una diferencia temporal entre los momentos en que se activan los dos cronómetros. El valor de esta diferencia es

$$\left(\frac{\frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot x_{jj}}{(c-v)} - \frac{\frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot x_{jj}}{(c+v)} \right), \quad \text{en } [s_{ii}],$$

y su valor neto es $(v \cdot x_{jj}/\alpha \cdot c^2)$, en $[s_{ii}]$.

Manuel: Entonces, ¿los diversos cronómetros del sistema S_j, al referirlos al sistema S_i, presentan un desfase que depende de su separación mutua y de la velocidad v con que se separan los dos sistemas?

Olga: Así es.

Manuel: Pero, ¿esa separación es la que se aprecia desde el sistema S_i?

Olga: No. Esa es la separación medida en el propio sistema S_j,... en $[m_{jj}]$.

Manuel: ¿Y ese desfase existe a pesar que todos esos cronómetros están sincronizados?

Olga: Lo que pasa es que los cronómetros del sistema S_j señalan siempre el mismo tiempo cuando se refieren al propio sistema S_j. No hay necesidad de distinguir entre ellos. Pero al referirlos al sistema S_i hay que tratarlos en forma discriminada.

Manuel: ¿En qué forma?

Olga: Al fin y al cabo los cronómetros del sistema S_j estan desfasados cuando se refieren al sistema S_i.

Manuel: Es decir, ¿cuando se cambian las unidades de tiempo $[s_{jj}]$ por unidades $[s_{ji}]$?

Olga: Así es. Si el cronómetro de S_j que ocupa la posición $x_{jj}[m_{jj}]$ de ese sistema, señala un valor de tiempo igual a t_{jj}, el cronómetro del origen de ese mismo sistema señalará un valor de tiempo mayor.

Manuel: ¿En cuánto?

Olga: En $(v \cdot x_{jj}/c^2)[s_{ji}]$.

Manuel: ¿Por qué en $[s_{ji}]$? Ya habías dicho que esas unidades no pertenecían a ningún cronómetro..., que sólo servían para referir unidades del sistema S_j al sistema S_i.

Olga: Precisamente... Ese es un desfase que sólo aparece cuando los cronómetros de S_j se refieren al sistema S_i.

Manuel: O sea que sólo existe cuando las unidades de tiempo $[s_{jj}]$ se transforman en $[s_{ji}]$.

Olga: Así es. Ya habíamos comentado que todos los cronómetros de S_j están sincronizados respecto al propio sistema S_j. El desfase del que te hablo aparece automáticamente, al referir los cronómetros de S_j al sistema S_i... y, recuerda que... al cambiar de referente los intervalos temporales medidos en el sistema S_j cambian las unidades $[s_{jj}]$ en unidades $[s_{ji}]$.

Manuel: Ahora faltaría transformar los $[s_{ji}]$ en $[s_{ii}]$.

Olga: Multiplicando el intervalo expresado en $[s_{ji}]$ por la fracción $[s_{ii}]/\alpha[s_{ji}]$.

Manuel: Entonces, ¿cuál es el valor de tiempo que en el sistema S_i corresponde al valor propio t_{jj}, registrado por el cronómetro ubicado en la posición x_{jj}?

Olga: Hay que tener en cuenta que cuando el cronómetro del origen de S_j señala un tiempo propio igual a cero, el cronómetro que ocupa la posición x_{jj} de ese sistema debe estar señalando un tiempo igual a $-(vx_{jj}/c^2)[s_{ji}]$.

Manuel: ¿Y por qué ese valor negativo?

Olga: Porque el cronómetro de x_{jj} siempre debe señalar un tiempo menor que el del origen, precisamente en esa cantidad... y el cronómetro del origen está señalando en ese momento un tiempo igual a cero.

Manuel: Pero aún no se han transformado los $[s_{ji}]$ en $[s_{ii}]$.

Olga: No importa. Ese desfase entre los cronómetros de S_j aparece automáticamente al referirlos al sistema S_i , aún sin haber transformado las unidades de tiempo $[s_{ji}]$ en unidades $[s_{ii}]$ del sistema S_i

Manuel: Entonces, cuando el cronómetro de x_{jj} señale un tiempo igual a cero, ¿qué valor indicará el cronómetro del origen de S_j, al referirlo al sistema S_i?

Olga: Deberá señalar un tiempo igual a $+(vx_{jj}/c^2)[s_{ji}]$.

Manuel: ¿Y qué tiempo marcará el cronómetro del origen de S_j cuando el de x_{jj} señale un tiempo igual a $t_{jj}[s_{ji}]$?

Olga: Deberá marcar un tiempo igual a $(vx_{jj}/c^2 + t_{jj})[s_{ji}]$.

Manuel: ¿Por qué siempre puntualizas que esos resultados se obtienen "al referir a S_i los cronómetros de S_j"?

Olga: Porque el desfase entre los cronómetros de S_j no aparecería si no se refieren a S_i.

Manuel: Es decir, ¿aparece cuando se transforman las unidades $[s_{jj}]$ en $[s_{ji}]$?

Olga: En efecto... Ahora falta transformar las unidades $[s_{ji}]$ en $[s_{ii}]$, y el intervalo se transforma en $(1/\alpha)(t_{jj} + vx_{jj}/c^2)[s_{ii}]$, en unidades de tiempo del sistema S_i.

José: ¿Ese es el valor de tiempo que debe estar señalando cualquiera de los cronómetros de S_i, inicialmente sincronizados con el cronómetro del origen de S_j?

Olga : Así es.

5. Transformación de coordenadas temporales y espaciales

José: ¿Y cómo se transforman las coordenadas espaciales de un sistema a otro?

Manuel: ¿Qué quieres decir con eso?

José: Pues... ¿a qué valor de S_i corresponde el valor x_{jj} del sistema S_j?

Olga: No es posible resolver algo así de manera general, a menos que se especifique el intervalo de tiempo transcurrido desde que se cruzaron los orígenes de los sistemas S_i y S_j.

Manuel: Supongamos que fue hace $t_{jj}[s_{jj}]$, de acuerdo con el cronómetro del origen de S_j.

José: O sea que el cronómetro del origen de S_i registra un tiempo igual a $(t_{jj}/\alpha)[s_{ii}]$.

Manuel: ¿Por qué lo sabes?

José: Porque los cronómetros de ambos orígenes marcaban el valor cero en el momento que se cruzaron... Y el origen de S_j se encuentra ahora a una distancia $(v \cdot t_{jj}/\alpha)[m_{ii}]$ del origen de S_i.

Manuel: ¿Y a qué distancia del origen de S_i estará el punto de abscisa $x_{jj}[m_{jj}]$ del sistema S_j?

Olga: Hay que empezar por referir la distancia $x_{jj}[m_{jj}]$ al sistema S_i.

José: La cual adopta entonces el valor impropio $(x_{jj} \cdot \alpha)[m_{ii}]$.

Olga: Entonces, la distancia total del punto de abscisa x_{jj}, del sistema S_j, hasta el origen de S_i será en ese momento $(vt_{jj}/\alpha + x_{jj} \cdot \alpha)[m_{ii}]$.

José: Y... ¿qué cambio se origina si el valor $t_{jj}[s_{jj}]$ lo señala el cronómetro situado en el punto x_{jj} del sistema S_j?

Olga: Bueno, en ese caso, al referir ese cronómetro al sistema S_i hay que tener en cuenta el desfase $(vx_{jj}/c^2)[s_{ji}]$ que existe entre él y el cronómetro del origen de S_j... que fue el empleado para iniciar la medición.

Manuel: O sea, que se están empleando dos cronómetros diferentes del sistema S_j.

Olga: Así es.

Manuel: ¿Cuál es entonces el valor que señala el cronómetro del origen de S_j en este mismo momento?

Olga: Al referirlo al sistema S_i las unidades de tiempo $[s_{jj}]$, automáticamente se transforman en $[s_{ji}]$, y, además, hay que agregar el desfase $(v \cdot x_{jj}/c^2)[s_{ji}]$. En resumen, al ser referido al sistema S_i, el cronómetro del origen de S_j señala un tiempo igual a $(t_{jj} + v \cdot x_{jj}/c^2)[s_{ji}]$

Manuel: ¿Y eso a qué equivale de acuerdo con los cronómetros de S_i?

Olga: En unidades $[s_{ii}]$ ese intervalo temporal es igual a $\{(t_{jj} + v \cdot x_{jj}/c^2)/\alpha\}[s_{ii}]$.

Manuel: Entonces, ¿cuál es la distancia que separa al origen de S_j del origen de S_i?

José: Esa distancia deberá ser $\{v \cdot (t_{jj} + v \cdot x_{jj}/c^2)/\alpha\}[m_{ii}]$ al referir las medidas al sistema S_i.

Manuel: ¿Y cuál será el valor x_{ii} que en el sistema S_i corresponde al valor x_{jj} de S_j?

Olga: Eso depende del tiempo que señale el cronómetro situado en x_{jj}. Si ese tiempo tiene un valor t_{jj}, como ocurre en este caso, entonces a la separación entre los dos sistemas habrá que añadirle la longitud contraída del segmento x_{jj}.

Manuel: No entiendo...

José: Pues habrá que agregarle a la distancia que separa a los dos sistemas la longitud impropia del segmento x_{jj}.

Manuel: O sea, ¿la longitud $x_{jj} \cdot \alpha$?

José: Así es.

Manuel: Entonces, el valor x_{ii} del sistema S_i que corresponde al valor x_{jj} del sistema S_j...

Olga: ...cuando el cronómetro de x_{jj} es el que señala un tiempo $t_{jj}[s_{jj}]$,... es

$$x_{ii} = v[t_{jj} + vx_{jj}/c^2]/\alpha + x_{jj} \cdot \alpha.$$

José: Pero, ¡es una ecuación muy rara!

Olga: Sin embargo, luego de hacer todas las transformaciones, la relación entre los valores x_{ii} y x_{jj} toma la forma $x_{ii} = [x_{jj} + vt_{jj}]/\alpha$.

6. Transformación de velocidades

Manuel: ¡Caramba! Ahora las cosas no son tan sencillas...

Olga: En efecto. Ahora las cosas no se manejan como se hacía clásicamente... cuando se relacionaban las coordenadas temporales por un lado y las espaciales por el otro, en forma independiente. Eso repercute en el cálculo de velocidades.

Manuel: Por ejemplo, ¿en qué caso?

Olga: Cuando una varilla se mueve a lo largo del eje X del sistema S_i, la velocidad con que la luz recorre la varilla móvil respecto al sistema S_i es $(c - v)[m_{ii}/s_{ii}]$ cuando la persigue, y es $(c + v)[m_{ii}/s_{ii}]$ cuando va a su encuentro.

Manuel: ¿Y qué pasa con eso?

Olga: Pues que todo el mundo piensa que esto equivale a decir que la velocidad de la luz respecto a la varilla es menor que c.

Manuel: ¿Y no es así?

Olga: Realmente no. Lo único que puede decirse con certeza es que la onda luminosa se acerca a un extremo de la varilla con una velocidad $(c+v)$ o $(c-v)[m_{ii}/s_{ii}]$, en el sistema S_i.

Manuel: Y no es equivalente a decir que la velocidad de la onda en el sistema de la varilla es $c + v$ o $c - v$?

Olga: No. Observa que la velocidad de cualquier cosa en el sistema de la varilla debe evaluarse en $[m_{jj}]$ y $[s_{jj}]$, mientras que $c + v$ y $c - v$ están expresadas en $[m_{ii}/s_{ii}]$.

Manuel: ¿Entonces la velocidad de la onda luminosa en el sistema de la varilla no se puede evaluar por mediciones referidas al sistema S_i?

Olga: No es eso. Sólo que hay que ser más cuidadosos al hacer los cálculos.

Manuel: ¿Qué quieres decir con eso?

Olga: En el sistema S_j la onda que persigue a la varilla ocupa dos posiciones diferentes en dos momentos distintos. Eso hace que se empleen dos cronómetros del sistema S_j para indicar las posiciones de la onda en esos dos momentos. Como los cronómetros que ocupan diferentes posiciones del sistema S_j están desfasados al referirlos al sistema S_i, no es posible calcular el intervalo de tiempo transcurrido en el sistema S_j mientras la onda pasa de un sitio a otro de ese sistema, restando los valores de tiempo señalados por dos cronómetros diferentes.

Manuel: Entonces, ¿cómo se hace?

Olga: Ambas lecturas deben referirse a un mismo cronómetro.

Manuel: ¿A cuál?

Olga: A cualquiera del sistema S_j. Se acostumbra trasladar las lecturas al cronómetro del origen de S_j.

Manuel: ¿Y cómo se hace eso?

Olga: La lectura $t_{jj}[s_{jj}]$ de un cronómetro que ocupa la posición x_{jj} del sistema S_j se transforma en el valor $(t_{jj} + vx_{jj}/c^2)[s_{ji}]$, del cronómetro del origen, mientras que la lectura t'_{jj} del cronómetro que ocupa la posición x'_{jj} del sistema S_j se transforma en $(t'_{jj} + vx'_{jj}/c^2)[s_{ji}]$.

Manuel: ¿Y entonces...?

Olga: En el sistema S_j, de la varilla, la velocidad de la onda se calcula por la expresión $(x'_{jj} - x_{jj})/(t'_{jj} - t_{jj})$, pero en el sistema S_i se calcula mediante la expresión similar $(x'_{ii} - x_{ii})/(t'_{ii} - t_{ii})$.

Manuel: ¿Y qué?

Olga: Pues t_{ii} está relacionada con t_{jj} y x_{jj}, mientras que t'_{ii} lo está con t'_{jj} y x'_{jj}.

Manuel: ¿En qué forma?

Olga: Si todo el fenómeno se refiere a S_i, entonces

$$t_{ii} = (t_{jj} + vx_{jj}/c^2)/\alpha \qquad \text{y} \qquad t'_{ii} = (t'_{jj} + vx'_{jj}/c^2)/\alpha.$$

Por otra parte, las coordenadas espaciales de los puntos donde se encuentran los dos cronómetros, respecto a los sistemas S_i y S_j, se relacionan a través de las ecuaciones

$$x_{ii} = (x_{jj} + vt_{jj})/\alpha \qquad \text{y} \qquad x'_{ii} = (x'_{jj} + vt'_{jj})/\alpha.$$

Manuel: Bueno... Supongo que t_{ii} estará medido en $[s_{ii}]$, mientras que t_{jj} lo estará en $[s_{jj}]$.

Olga: Y x_{ii} está en $[m_{ii}]$ y x_{jj} en $[m_{jj}]$.

José: De tal manera que la velocidad de la onda respecto a S_j será $\{(x'_{jj} - x_{jj})/(t'_{jj} - t_{jj})\}[m_{jj}/s_{jj}]$.

Manuel: Y con respecto a S_i será $\{(x'_{ii} - x_{ii})/(t'_{ii} - t_{ii})\}[m_{ii}/s_{ii}]$.

Olga: Esas dos velocidades pueden relacionarse mediante las igualdades siguientes:

$$x'_{ii} - x_{ii} = \{(x'_{jj} + vt'_{jj})/\alpha - (x_{jj} + vt_{jj})/\alpha\}, \quad \text{en } [m_{ii}]$$

$$t'_{ii} - t_{ii} = \{(t'_{jj} + vx'_{jj}/c^2)/\alpha - (t_{jj} + vx_{jj}/c^2)/\alpha\}, \quad \text{en } [s_{ii}]$$

Manuel: ¡Bastante embrollado el asunto!

Olga: No tanto. Observa que al efectuar la división se cancela α en todos los términos. Aparte de eso, si se dividen tanto el numerador como el denominador por $(t'_{jj} - t_{jj})$, la velocidad de la onda respecto al sistema S_i estará dada por la relación

$$\frac{(x'_{ii} - x_{ii})}{(t'_{ii} - t_{ii})} = W = \frac{\{(x'_{jj} - x_{jj})/(t'_{jj} - t_{jj}) + v\}}{\{1 + (v/c^2)(x'_{jj} - x_{jj})/(t'_{jj} - t_{jj})\}}.$$

Manuel: Bueno, la cosa se simplifica bastante, pero todavía sigue siendo algo complicada.

Olga: Es tan sólo en apariencia, porque si se reemplaza por $u[m_{jj}/s_{jj}]$ la fracción $(x'_{jj} - x_{jj})/(t'_{jj} - t_{jj})$, la relación anterior toma la forma siguiente:

$$W = \frac{u+v}{1+uv/c^2}.$$

Manuel: ¡Qué expresión tan rara!

Olga: Lo que ocurre es que las velocidades u y v están en diferentes unidades; u está expresada en $[m_{jj}/s_{jj}]$, mientras que v y W están en $[m_{ii}/s_{ii}]$.

José: O sea que la ecuación, incluyendo las unidades, es

$$W[m_{ii}/s_{ii}] = \frac{u[m_{jj}/s_{jj}] + v[m_{ii}/s_{ii}]}{1 + u[m_{jj}/s_{jj}] \cdot v[m_{ii}/s_{ii}]/\{c[m_{ii}/s_{ii}]\}^2}.$$

Manuel: Bueno,... ¿y el caso de la onda que veníamos tratando... en qué terminó?

Olga: En ese caso puede reemplazarse u por c en la ecuación anterior y el valor de W es

$$\frac{(x'_{ii} - x_{ii})}{(t'_{ii} - t_{ii})} = W = \frac{c+v}{1+v/c} = c \ (!)$$

Manuel: ¿Esa es la velocidad de la onda respecto al sistema S_i?

Olga: Así es. Como puedes ver, también es igual a c.

Manuel: Entonces, la forma extraña de la ecuación que relaciona W con v y u, se debe a las diferentes unidades que tienen los términos que componen la expresión.

Olga: En efecto... Y a la manera en que se transforman esas unidades.

7. Conclusión

A lo largo del artículo se muestra que el aspecto de las transformaciones espacio-temporales entre dos sistemas de referencia inerciales depende de la manera en que se relacionan las unidades de tiempo y de longitud de esos dos sistemas. La inveterada costumbre de omitir las unidades de medida en las ecuaciones de la física, para tratar tan sólo con los valores de las magnitudes que en ellas participan, oscurece el fundamento mismo de la medida y, de manera indirecta, termina ocultando la causa de las modificaciones experimentadas por los valores de las magnitudes medidas, al cambiar el sistema al cual se refieren.

La técnica de doble subíndice que aquí se introduce, permite tener en cuenta dos aspectos de la magnitud —espacial o temporal— medida: el sistema donde se hace la medida y el sistema al cual se refiere la misma. Aparte de eso, los subíndices permiten identificar cuándo y cómo modificar el valor de una medida, sea espacial o temporal.

A lo largo del artículo puede verse que las velocidades pueden componerse de acuerdo con la regla de transformación clásica —galileana— cuando están referidas a un mismo sistema inercial; pero que ellas deben transformarse mediante las ecuaciones relativistas cuando cambian su sistema de referencia.

REFERENCIAS

1. L.A. Sena, *Unidades de las magnitudes físicas y sus dimensiones*, Editorial Mir, Moscú (1979), Capítulo 1. El autor distingue entre unidad de medida y valor de la magnitud física.
2. B. C. van Fraasen, *Introducción a la filosofía del tiempo y del espacio*, Editorial Labor, Barcelona (1978). Capítulo III, numeral 2.
3. F. W. Sears y R. W. Brehme, *Introduction to the theory of relativity*, Addison-Wesley, Reading, EEUU (1968), Capítulo 3.
4. A. B. Arons, *Evolución de los conceptos de la Física*, Trillas, México (1970). Capítulo 36.