

Las funciones características de Hamilton en el diseño de una lente asférica

MARCELA GRETHER Y ENRIQUE LÓPEZ MORENO

*Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México
04510 México, D.F., México*

Recibido el 14 de noviembre de 1991; aceptado el 15 de junio de 1992

RESUMEN. Hacemos una breve revisión de la formulación de Hamilton de la óptica. Utilizando este formalismo, encontramos las ecuaciones paramétricas de la superficie correctora en una lente plano-asférica. Se muestran los cambios generales que sufre la superficie asférica de esta lente, ante la variación de todos los parámetros involucrados en el problema. La superficie asférica recupera la forma de los óvalos cartesianos clásicos al anularse la distancia entre el objeto luminoso y la cara plana de la lente; en particular, se recuperan los casos del caracol de Pascal y los puntos aplanáticos de la esfera.

ABSTRACT. After a brief review of Hamiltonian optics, we find the parametric equations for a correcting surface of a plane-aspherical lens. Under the variation of all the parameters involved, the general shapes adopted by this aspherical surface are shown. When the source position coincides with the plane refracting surface, the aspherical surface recovers a cartesian oval shape, as expected. As an example of this, we recover explicitly the cases of the aplanatic sphere and the Limaçon of Pascal in analytical form.

PACS: 02.40.+m; 42.30.Di; 42.90.+m

1. INTRODUCCIÓN

Cuando un rayo luminoso viaja desde un punto inicial P_0 hasta un punto final P_1 a través de un sistema óptico, lo debe hacer satisfaciendo el principio variacional de Fermat. Encontramos así que las direcciones del rayo en P_0 y P_1 no pueden ser del todo arbitrarias. Podemos plantear el problema fundamental de la óptica geométrica de la siguiente manera: dadas la posición y dirección inicial de un rayo, se tienen que determinar su posición y dirección final, diseñando un dispositivo óptico de tal forma que la relación entre las cantidades iniciales y las finales tengan varias propiedades deseadas. Hamilton fue el primero en hacer un estudio sistemático de las restricciones implicadas por el principio de Fermat [1]. Él demuestra que, independientemente del sistema óptico del que se trate, existe una sola función de seis variables, la cual determina completamente la relación entre las cantidades iniciales y finales del rayo. Esta clase de funciones son las conocidas funciones características de Hamilton. Los métodos de Hamilton han sido una poderosa herramienta en las investigación analítica y sistemática de las propiedades generales de sistemas ópticos. El poder de este método radica en su capacidad de ofrecer resultados generales que gobiernan la conducta de diversas clases de sistemas ópticos, definidos solamente con respecto a sus simetrías, sin importar muchos de sus detalles.

Con cada simetría se encuentran implicadas restricciones sobre la forma general de la función característica y, de una manera más particular, de su representación en series de potencias. Los coeficientes de esta serie son los coeficientes de aberración. Cada simetría de un sistema general implica relaciones particulares entre estos coeficientes. Estas relaciones imponen fuertes limitaciones sobre el carácter general de las aberraciones producidas por el sistema, las cuales pueden así ser estudiadas sin tener que tratar con los detalles de éste. También es notable la utilidad de las funciones características al diseñar un sistema óptico con las propiedades deseadas. Estos métodos, si bien se les describe en tratados [2a] y revistas de investigación [2b,2c], se encuentran escasamente difundidos en los textos de óptica para estudiantes de física e ingeniería aun al nivel de posgrado [3]. La intención del presente trabajo es la de ilustrar el empleo de las funciones características de Hamilton en el diseño de una lente plano-asférica con un eje de simetría y en el caso más general.

La aplicación de los métodos de Hamilton en el diseño de una lente plano-asférica ha sido ilustrada por Luneburg para el caso de imagen al infinito [4]. En este artículo presentamos la solución en un caso más general, con la imagen formándose a una distancia finita. De la expresión analítica de la solución, nos encontramos que resulta sumamente difícil imaginarse la geometría del perfil esférico general en toda la variedad de formas obtenidas al ir variando cualesquiera de los parámetros del sistema. Sin embargo, mediante el desarrollo de un programa interactivo de cálculo y graficación (disponible en los Laboratorios de Óptica y Electromagnetismo de la FCUNAM) se puede obtener la geometría de las soluciones obtenidas; con este programa se dibujaron las Figs. 2 y 3.

2. OPTICA HAMILTONIANA

A manera de revisión breve, y con el propósito de hacer autocontenido y más claro el método de diseño que exponemos en las secciones que siguen, en esta sección derivamos algunas relaciones de la formulación hamiltoniana de la óptica. Referimos al lector al tratado de Luneburg [4] para un tratamiento más profundo; al texto de Ghatak y Thyagarajan [3] para uno más didáctico; al artículo de Dragt, Forest y Wolf [6] para uno más moderno, donde se presentan los fundamentos y métodos algebraicos de Lie en la óptica hamiltoniana; o, finalmente, a los artículos de Torres del Castillo [7] y de López-Moreno y Wolf [8] aparecidos en esta misma revista, en los cuales se discuten varios aspectos de la geometría del espacio fase de la óptica geométrica.

Esperamos que el lector que desconozca el tema encuentre además una motivación para adentrarse en esta clase de tratamientos.

El Principio de Fermat

Una curva C cualquiera en el espacio tridimensional, definida paramétricamente por

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u), \quad (1)$$

donde u es un parámetro arbitrario, será recorrida por un rayo luminoso si se cumple el principio de Fermat. En el enunciado de Fermat resulta central la definición de longitud

de camino óptico (l.c.o.). Esta cantidad es la funcional $\mathcal{S}(\mathcal{C})$, que depende de la curva \mathcal{C} descrita en (1) según

$$\mathcal{S} = \int_{u_0}^{u_1} n(x, y, z) \left[\left(\frac{dx}{du} \right)^2 + \left(\frac{dy}{du} \right)^2 + \left(\frac{dz}{du} \right)^2 \right]^{1/2} du, \quad (2)$$

donde $n(x, y, z)$ es la función índice de refracción; los valores del parámetro $u = u_0$, $u = u_1$, corresponden a los puntos P_0 inicial y P_1 final, respectivamente, de la curva. El principio de Fermat establece que \mathcal{S} debe tener un extremo a lo largo de cualquier rayo luminoso real; i.e., la condición $\delta\mathcal{S} = 0$ distingue a los rayos de otras curvas más generales en el espacio [9].

Al efectuar la variación $\delta\mathcal{S}$, pasando así de una curva a otra vecina próxima, obtenemos

$$\delta\mathcal{S} = \int_{u_0}^{u_1} \left[\sum \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} \delta\dot{x} + \sum \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} \delta x \right] du, \quad (3)$$

donde \mathcal{L} es la función en el integrando de (2), la cual juega el papel de la lagrangiana óptica; aquí y en adelante, la \sum indica la suma sobre términos similares, y usamos la notación

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{du}; \quad \delta\dot{x} \equiv \frac{d}{du} \delta x.$$

Así, integrando por partes (3), obtenemos

$$\delta\mathcal{S} = \left[\sum \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} \delta x \right]_{u_0}^{u_1} - \int_{u_0}^{u_1} \sum \left(\frac{d}{du} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} \right) \delta x du. \quad (4)$$

El principio de Hamilton. Ecuaciones de Euler

Primero consideraremos una clase especial de variaciones en las cuales se dejan fijos los puntos extremos de la curva. Este caso se conoce en mecánica clásica como el principio de Hamilton; más adelante consideraremos el principio de acción de Weiss, el cual también permite variaciones en dichos extremos. De acuerdo con el principio de Hamilton, el primer sumando en (4) es nulo, ya que para u_0 y u_1 $\delta x = 0$. Así, \mathcal{S} tendrá un valor extremo sólo si la integral se anula. Para que esto se cumpla ante cambios δx arbitrarios, es necesario que se satisfagan las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0; \quad (5)$$

y similarmente para las coordenadas y, z . Sustituyendo el valor de \mathcal{L} encontramos

$$\frac{d}{du} \left\{ \frac{n\dot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}} \right\} - \frac{\partial n}{\partial x} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 0, \quad (6)$$

y similarmente para las coordenadas y, z . Las cantidades entre llaves en (6) representan, respectivamente, la expresión explícita de las componentes del vector momento óptico $\vec{P} \equiv (p, q, m)$:

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}; \quad q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}; \quad m = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}. \tag{7a}$$

Asimismo, notamos que el valor absoluto del momento se encuentra acotado:

$$p^2 + q^2 + m^2 = n^2. \tag{7b}$$

La elección del parámetro u , como se dijo antes, es arbitraria, y en lo que sigue haremos dos selecciones.

La ecuación diferencial del rayo

Cuando elegimos $u = s$, donde s es la longitud de arco medida sobre la curva \mathcal{C} , obtenemos en la Ec. (6),

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) - \frac{\partial n}{\partial x} = 0; \tag{8}$$

y similarmente para las coordenadas y, z . Aquí utilizamos el hecho de que el vector

$$\frac{d}{ds}(x, y, z) \equiv \hat{t}$$

es unitario y tangente a cada punto de la curva. En términos del vector momento óptico, que en esta elección de parámetros resulta

$$\vec{P} = n\hat{t}; \tag{9}$$

podemos escribir en forma vectorial la Ec. (8); ésta es la ecuación diferencial de los rayos

$$\frac{d}{ds} \vec{P} = \nabla n(x, y, z). \tag{10}$$

En óptica, esta ecuación juega un papel similar a aquél desempeñado por la segunda ley de Newton en la mecánica.

La lagrangiana y hamiltoniana de un sistema óptico

Si existe una dirección general en la cual los rayos se están propagando aproximadamente, como sucede en la mayoría de los instrumentos ópticos, lo más conveniente es la elección

de la tercera coordenada cartesiana como parámetro: $u = z$, orientando entonces el eje z en esa dirección. Con esta elección del parámetro, la lagrangiana óptica queda

$$\mathcal{L} = n(x, y, z) (1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}. \quad (11)$$

Notamos que en este caso $\dot{z} = 1$, y además la tercera componente del momento óptico es nula; *i.e.*, $m = 0$. De acuerdo a la regla usual, definimos la hamiltoniana óptica correspondiente a la \mathcal{L} en (11), según la transformación de Legendre

$$\mathcal{H} = p\dot{x} + q\dot{y} - \mathcal{L}. \quad (12)$$

Con la hamiltoniana \mathcal{H} las nuevas variables son los momentos p, q , las coordenadas x, y , mientras que la coordenada z es el parámetro.

Las ecuaciones canónicas las podemos obtener tomando la diferencial de \mathcal{H} en (12) y usando las expresiones (11), (7) y (5)

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad \dot{y} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, \quad \dot{q} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}. \quad (13)$$

Asimismo, de esas mismas ecuaciones, haciendo explícitos los valores a la derecha de (12) obtenemos

$$\mathcal{H} = -\frac{n}{(1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}}; \quad (14)$$

o bien, como se demuestra con un poco de álgebra,

$$\mathcal{H} = -(n^2(x, y, z) - p^2 - q^2)^{1/2}. \quad (15)$$

El principio de mínima acción. La característica principal

Consideremos ahora una clase más general de variaciones de la l.c.o. en (2), en las cuales los puntos inicial y final de la curva también son infinitesimalmente variados. En la mecánica éste se llama el principio de mínima acción. Tratamos ahora con una magnitud que caracteriza la propagación de la luz a lo largo de rayos reales; y por esto, para distinguirla de \mathcal{S} , la denotaremos por una \mathcal{V} . Comparamos los valores de \mathcal{V} para rayos que tienen una fuente común $P_0 = P(u_0)$, pero que cuando $u = u_1$ pasan por posiciones distintas. Claramente, \mathcal{V} será función de las coordenadas del punto final. En este caso, como se están considerando variaciones a lo largo de rayos reales, se satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange (5); y es así que todavía la integral en (4) es nula. Sin embargo, de una manera general, $\delta x(u_1) \neq 0$. Así, la diferencial en (4) queda

$$\delta \mathcal{V} = p \delta x + q \delta y + m \delta z. \quad (16)$$

De aquí concluimos que

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} = p; \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} = q; \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} = m. \tag{17}$$

Similarmente, cuando se varía la posición inicial, obtenemos

$$\delta \mathcal{V} = -(p_0 \delta x_0 + q_0 \delta y_0 + m_0 \delta z_0); \tag{18}$$

de donde

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_0} = -p_0; \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_0} = -q; \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z_0} = -m_0. \tag{19}$$

Las Ecs. (17) y (19) representan uno de los principales resultados de la teoría de Hamilton de la óptica. La función \mathcal{V} es función sólo de las coordenadas de los puntos inicial y final. Físicamente, representa la longitud de camino óptico entre estos puntos al ser conectados por un rayo real. Es importante resaltar que \mathcal{V} está determinada por el medio, definido por la función índice de refracción $n(\mathbf{r})$. En palabras: conociendo la forma de la función $\mathcal{V}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1)$, podremos calcular la correspondencia que el medio óptico (instrumento óptico) establece entre los rayos inicial y final, solamente evaluando sus derivadas. Esta correspondencia caracteriza por completo la conducta óptica del instrumento; y por esto es que a \mathcal{V} se le conoce como la función característica de punto.

La función característica mezclada

Hamilton también introdujo otras funciones características, las cuales se pueden obtener de la de punto por medio de transformaciones de Legendre. En la función característica mezclada \mathcal{W} , las componentes del momento óptico resultan ser las variables del extremo final del rayo, en vez de sus coordenadas. También es posible definir otra función característica mezclada \mathcal{W}' en la cual las variables son el momento inicial y las coordenadas del punto final. La transformación que define a \mathcal{W} es

$$\mathcal{W} = \mathcal{V} - \sum px, \tag{20}$$

donde la suma se realiza sobre términos similares. De (16) y (18), tomando la diferencial de \mathcal{W} , obtenemos:

$$\delta \mathcal{W} = - \sum (p_0 \delta x_0 + x \delta p). \tag{21}$$

Esta ecuación conlleva las relaciones hamiltonianas para \mathcal{W}

$$p_0 = -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x_0}; \quad q_0 = -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial y_0}; \quad m_0 = -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_0}; \tag{22a}$$

$$x = -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p}; \quad y = -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q}; \quad z = -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial m}. \tag{22b}$$

La característica mezclada en un medio $n(z)$

Siguiendo a Luneburg [4], veremos que es posible dar una expresión exacta de \mathcal{W} para un medio estratificado $n(z)$. Esta \mathcal{W} nos servirá como punto de partida en nuestro problema de diseño de la lente plano esférica.

Si el índice de refracción depende sólo de la coordenada z , entonces, de (22a) y (7b), tenemos

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_0} = - \left(n^2(z_0) - \left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x_0} \right)^2 - \left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial y_0} \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (23)$$

Queremos determinar una solución de esta ecuación con la condición de frontera

$$\mathcal{W} = -(x_0 p + y_0 q), \quad \text{si } z = z_0; \quad (24)$$

la cual, si $z = z_0$, efectivamente cumple con la Ec. (22), ya que entonces $p = p_0$; $q = q_0$; $x = x_0$ y $y = y_0$.

La solución que cumple con la condición de frontera es

$$\mathcal{W} = \int_{z_0}^z (n^2(z) - p^2 - q^2)^{1/2} dz - (x_0 p + y_0 q). \quad (25)$$

Esta expresión nos permite dar una generalización de la ley de Snell para medios inhomogéneos diferenciables $n(z)$. Supongamos por ejemplo que $q_0 = 0$; entonces por (22a) $q = 0$, manteniéndose el rayo en el "plano de incidencia". Además, también de (22a) se sigue que $p_0 = p$; lo cual puede describirse entérminos del ángulo $\theta(z)$, que forma el rayo con el eje z , como

$$n(z_0) \text{sen } \theta(z_0) = n(z) \text{sen } \theta(z). \quad (26)$$

3. LAS FUNCIONES CARACTERÍSTICAS EN EL DISEÑO DE UNALENTE PLANO-ASFÉRICA

En óptica geométrica se dice que dos puntos son *conjugados perfectos* si todos los rayos que son aceptados por el sistema óptico y emanan de uno de los puntos se cortan mutuamente en el otro punto. La formación de la imagen en tal caso es perfecta para la pareja conjugada; y por el *principio de reversibilidad* de los rayos luminosos, cualquiera de los puntos puede jugar el papel de objeto y entonces el otro será su imagen. Queremos determinar la forma de la superficie refractora $\omega(x, y, z) = 0$ (véase Fig. 1) de la lente plano-asférica que tiene al eje z como un eje de simetría, de modo que P_0 y P_1 sean conjugados perfectos. Gracias a la simetría, sólo consideraremos los rayos meridionales sobre el plano XZ y describiremos la superficie de revolución por la ecuación $\omega(z, x) = 0$.

Para que los puntos P_0 y P_1 sean conjugados perfectos (véase Fig. 1) es necesario que la función característica de punto $\mathcal{V}(P_0; P_1)$ sea una constante K independiente de los momentos ópticos de los rayos.

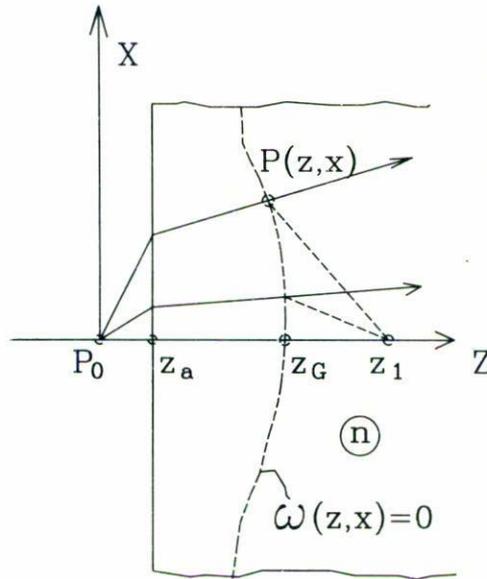


FIGURA 1. Esquema que ilustra la definición de las cantidades involucradas en el diseño de la superficie esférica $\omega(z, x) = 0$.

Con referencia a la misma Fig. 1, por conveniencia, coloquemos el origen de coordenadas en la fuente P_0 . La imagen P_1 se coloca sobre el eje z (el eje óptico) a una distancia z_1 arbitraria. El espesor de la lente plano-asférica se determina por la posición z_a del plano y por la posición del vértice de la superficie sobre el eje óptico, cuya posición denotaremos como z_G . Llamemos n al índice relativo del medio de la lente respecto al exterior. Sea $P(z, x)$ un punto cualquiera sobre la segunda superficie refractora $\omega(z, x) = 0$, cuya ecuación queremos determinar. Entonces, la función característica de punto del rayo que une P_0 y P_1 , vía el punto P , se puede escribir como

$$\mathcal{V}(0, 0; z_1, 0) = \mathcal{V}_1(0, 0; z, x) + \mathcal{V}_2(z, x; z_1, 0). \tag{27}$$

En la Ec. (1) hemos expresado $\mathcal{V}(P_0, P_1)$ en dos partes: \mathcal{V}_1 desde la fuente P_0 hasta un punto P sobre la superficie $\omega = 0$; y \mathcal{V}_2 desde este punto hasta la imagen P_1 . A continuación damos expresiones explícitas para \mathcal{V}_1 y \mathcal{V}_2 .

En nuestro problema de diseño tenemos inicialmente un bloque de vidrio con una primera cara plana como se muestra en la Fig. 1. La línea punteada representa la superficie esférica $\omega(z, x) = 0$ que vamos a determinar. Antes de cortar la superficie $\omega(z, x) = 0$, el índice de refracción relativo del bloque es de la forma $n = n(z)$, donde se considera ilimitada la abertura del sistema. Para un medio tal, la característica mezclada resulta [veáse Ec. (25)]

$$\mathcal{W}(z_0, y_0, x_0; p, q) = \int_{z_0}^z \sqrt{n^2(z) - p^2 - q^2} dz - [x_0 p + y_0 q]. \tag{28}$$

Sin pérdida de generalidad los rayos oblicuos (*skew rays*) no existen estando los puntos conjugados P_0 y P_1 sobre el eje óptico. En este caso tenemos $q = 0$.

Conocida la función $n(z)$, podremos calcular el valor de \mathcal{W} después de integrar (28). En el ejemplo que estamos considerando, el medio es homogéneo y la función del índice es

$$n = n(z) = \begin{cases} 1; & \text{si } -\infty < z \leq z_a, \\ n; & \text{si } z_a < z, \end{cases} \tag{29}$$

donde estamos suponiendo una abertura ilimitada del sistema.

Así, colocando la fuente en el origen; *i.e.*, tomando $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, y de (28) y (29), tenemos, después de integrar

$$\mathcal{W}(0, 0; p) = z_a \sqrt{1 - p^2} + (z - z_a) \sqrt{n^2 - p^2}. \tag{30}$$

La transformación de Legendre (20) nos permite obtener una expresión para la característica de punto \mathcal{V}_1

$$\mathcal{V}_1 = \frac{z_a}{(1 - p^2)^{1/2}} + \frac{z - z_a}{(n^2 - p^2)^{1/2}} n^2, \tag{31}$$

\mathcal{V}_1 se ha expresado como función de $z_0 = 0, z_a, p$ y de z ; pero el lector puede verificar que se trata precisamente de la longitud de camino óptico entre P_0 y P . En efecto, podríamos eliminar p para escribir \mathcal{V}_1 en términos de x_a y x , pero no lo haremos porque la invariante p [veáse Ec. (26)] nos resultará un buen parámetro en términos del cual se realizará el cálculo numérico de la superficie esférica más adelante.

Ahora determinaremos la función característica de punto \mathcal{V}_2 . Esta será la longitud de camino óptico \mathcal{L}_2 entre los puntos P y P_1 (veáse la Fig. 1)

$$\mathcal{V}_2 \equiv [P, P_1] = \pm (x^2 + (z - z_1))^{1/2}, \tag{32}$$

en donde $P(z, x)$ es un punto sobre la superficie $\omega = 0$, aún por determinar, y los corchetes denotan la longitud de camino óptico en el medio externo. Como el índice del medio externo se toma como unitario, el resultado es simplemente la distancia entre puntos. En la Ec. (32) se acepta el doble signo de la raíz para incluir las dos posibilidades de la imagen: (+) real, (-) virtual.

Como mencionamos anteriormente, P_0 y P_1 serán puntos conjugados si se cumple

$$\mathcal{V}_1(0, 0; z, x) + \mathcal{V}_2(z, x; z_1, 0) = K, \tag{33}$$

donde K es una constante y (z, x) cumple simultáneamente con la ecuación de la superficie $\omega(z, x) = 0$ que enseguida determinaremos.

4. DETERMINACION DE LA SUPERFICIE ASFÉRICA

La Ec. (33) se satisface simultáneamente sobre los rayos y sobre la superficie $\omega(z, x) = 0$. De las Ecs. (31)-(33) obtenemos una ecuación para las coordenadas de la superficie $\omega = 0$

$$\frac{z_a}{(1 - p^2)^{1/2}} + \frac{(z - z_a)}{(n^2 - p^2)^{1/2}} n^2 \pm [x^2 + (z - z_1)^2]^{1/2} = K. \tag{34}$$

De (22b) y (30) obtenemos otra ecuación para la superficie $\omega = 0$

$$x = \frac{z_a}{(1 - p^2)^{1/2}} p + \frac{(z - z_a)}{(n^2 - p^2)^{1/2}} p. \tag{35}$$

Nuestro problema ahora es el de separar z y x en (34) y (35). La constante K se determina tomando $p = 0$ (el rayo axial) dentro de la Ec. (34). En este caso tendremos $x = 0, z = z_G$; y así

$$z_a + (z_G - z_a)n - (z_G - z_1) = K. \tag{36}$$

Eliminando x de (34) y (35) se obtiene una ecuación de segundo grado, cuyas raíces son

$$z(p) = \frac{-B \pm [B^2 - 4AC]^{1/2}}{2A} + z_a, \tag{37}$$

donde

$$A(p) = \frac{(p^2 - n^4)}{(n^2 - p^2)} + 1,$$

$$B(p) = 2 \left[\frac{1}{(n^2 - p^2)^{1/2}} \left(\frac{z_a(p^2 - n^2)}{(1 - p^2)^{1/2}} + Kn^2 \right) - (z_1 - z_a) \right],$$

$$C(p) = \left[(z_1 - z_a)^2 - \left(K - \frac{z_a}{(1 - p^2)^{1/2}} \right)^2 + \frac{p^2 z_a^2}{(1 - p^2)} \right].$$

Sustituyendo $z(p)$ de (37) en la Ec. (35), obtenemos una ecuación para la coordenada x de la superficie, de parámetro p

$$x(p) = x(z(p)). \tag{38}$$

Las Ecs. (37) y (38) nos dan las coordenadas de la superficie esférica en términos del momento óptico p como un parámetro. La tarea de graficar la superficie se puede realizar numéricamente con una microcomputadora PC. Las Figs. (2a-2d) muestran cualitativamente las formas típicas obtenidas al variar los parámetros n, z_a, z_G, z_1 , dentro de un programa de graficación.

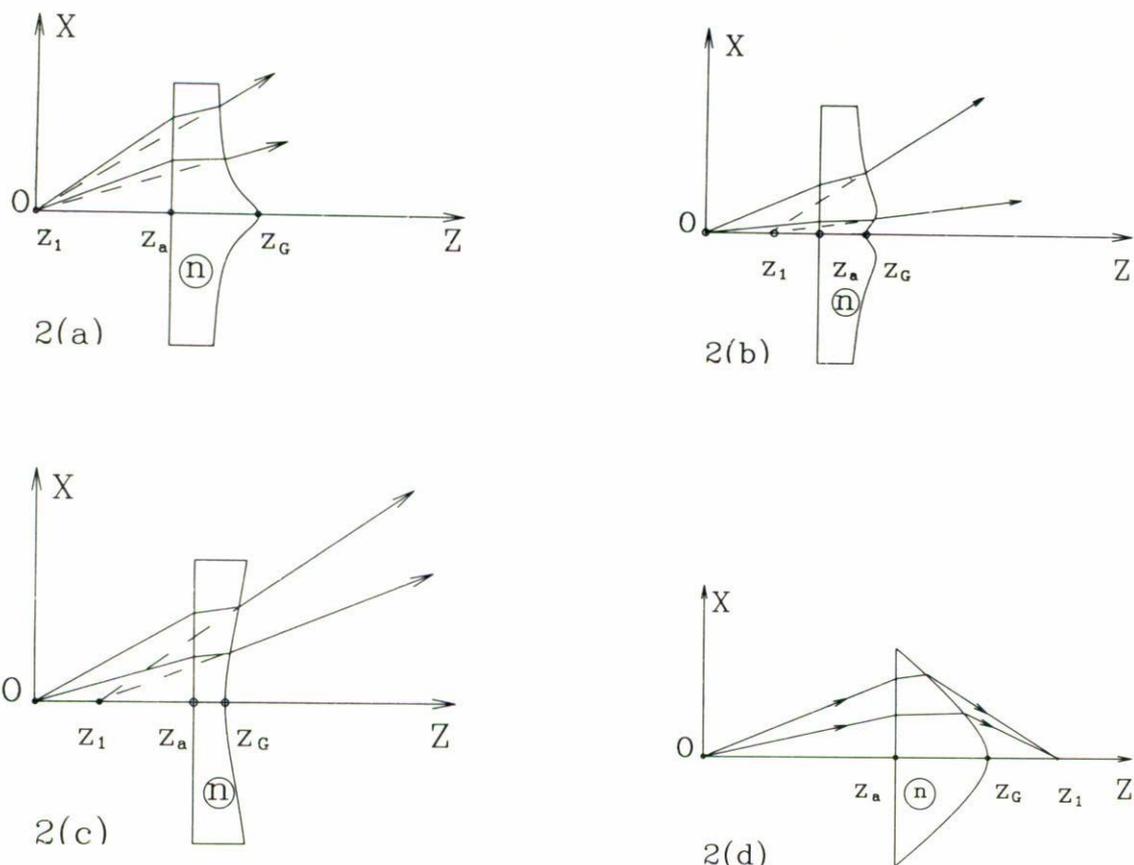


FIGURA 2. Representación cualitativa de la lente plano esférica ante variaciones de la posición de la imagen. Aquí $n = 1.5$, el objeto en el origen, $z_a = 5$, $z_G = 6$ y a) $z_1 = 0$; b) $z_1 = 0.48$; c) $z_1 = 2$; d) $z_1 = 6.75$. En 2b) el centro de la lente se encuentra cambiando el signo de su curvatura. Las figuras han sido exageradas y las distancias en el papel, con propósitos de presentación, no corresponden a la escala real; sin embargo la geometría del perfil de las lentes se ha respetado para los valores dados.

5. LOS ÓVALOS CARTESIANOS COMO UN CASO PARTICULAR

Cuando el plano refractor se coloca sobre el origen, donde está la fuente luminosa, la refracción tendrá lugar sólo en la segunda superficie. En este caso las ecuaciones que describen la superficie esférica [Ecs. (34) y (35)] deben recuperar las formas clásicas de los óvalos de Descartes. Como veremos, el parámetro K de la Ec. (34) los genera a todos ellos al ir variando su valor.

En esta sección ilustraremos *analíticamente* esta afirmación con dos ejemplos. En el primero consideraremos los puntos aplanáticos de una esfera; *i.e.*, encontramos bajo qué condiciones una esfera puede ser cartesiana. Como es bien sabido, este problema sirve de base en el diseño del objetivo de inmersión en aceite, con el cual se logra el máximo poder de resolución del microscopio óptico [2a]. En un segundo ejemplo demostraremos que un caracol de Pascal de revolución también puede representar una superficie refractora

cartesiana. A diferencia de la anterior, esta forma de la superficie es poco conocida y se le discute rara vez [5].

Supongamos que la superficie plana de la lente plano-asférica coincide con la fuente en el origen, es decir, hagamos

$$z_a = 0. \tag{39}$$

sustituyendo (39) en (34) y (35) tenemos

$$\frac{n^2}{[n^2 - p^2]^{1/2}} z \pm [x^2 + (z - z_1)^2]^{1/2} = K \tag{40}$$

y

$$p^2 = \left[\frac{x^2}{x^2 + z^2} \right] n^2. \tag{41}$$

De (40) y (41) eliminamos p :

$$n(z^2 + x^2)^{1/2} \pm [x^2 + (z - z_1)^2]^{1/2} = K. \tag{42}$$

Esta última ecuación genera todos los óvalos cartesianos al variar el parámetro K .

Los puntos aplanáticos de la esfera

Si nuestros puntos conjugados P_0 y P_1 cumplen además la importante *condición del seno de Abbe* [2a, Pág. 68], se dice que forman un *par aplanático*. Dicho par se encuentra libre no sólo de aberración esférica en todos los órdenes de aberración, sino que además se encuentra libre de la aberración llamada *coma circular*. Esta cuestión es importante en el diseño óptico al considerar imágenes fuera del eje de simetría, y no podremos entrar en mayores detalles aquí. Lo que queremos demostrar es que se generará una esfera cuando se anule el valor del parámetro K de la Ec. (40), resultando entonces el par aplanático de la esfera [2a, Pág.50].

Sustituyendo los valores $z_a = K = 0$ en la Ec. (36), obtenemos

$$z_G(n - 1) + z_1 = 0. \tag{43}$$

Debemos elegir el valor de z_G que señala la posición del vértice. Tomemos este valor de la forma

$$z_G = cn, \tag{44}$$

donde hemos expresado la distancia del vértice al origen en múltiplos del índice de refracción n . De estas dos últimas ecuaciones podemos expresar la distancia de la imagen como

$$z_1 = -cn(n - 1). \tag{45}$$

Sustituyendo este valor de z_1 en (42) podemos escribir

$$x^2 + \left[z - \frac{cn}{1+n} \right]^2 = \frac{c^2 n^4}{(1+n)^2}. \quad (46)$$

Esta es la ecuación de un círculo. Llamemos R al radio,

$$R \equiv \frac{cn^2}{(1+n)}. \quad (47)$$

Las Ecs. (44)-(46), en términos de esta R , quedan

$$R^2 = x^2 + \left[z - \frac{R}{n} \right]^2, \quad (48)$$

$$z_G = \frac{R}{n} + R, \quad (49)$$

$$z_1 = \frac{R}{n} - nR. \quad (50)$$

Los valores de z_a, z_G y z_1 que acabamos de obtener, recuperan exactamente los puntos aplanáticos de la esfera.

Caracol de Pascal

Podremos obtener un caracol de Pascal si suponemos, en el caso de incidencia externa ($n < 1$), que el parámetro K toma el valor

$$K = \frac{n^2 - 1}{2}. \quad (51)$$

Notamos que el valor de K resulta negativo, lo cual implica que la imagen será virtual; i.e., $z_1 < z_g$. Así, en la Ec. (36) obtenemos

$$(n-1)z_G + z_1 = \frac{n^2 - 1}{2}. \quad (52)$$

Es directo verificar que los siguientes valores para las posiciones del vértice y de la imagen satisfacen la ecuación anterior

$$z_1 = \left[\frac{1-n^2}{2n} \right]; \quad z_G = \frac{(1+n)^2}{2n}. \quad (53)$$

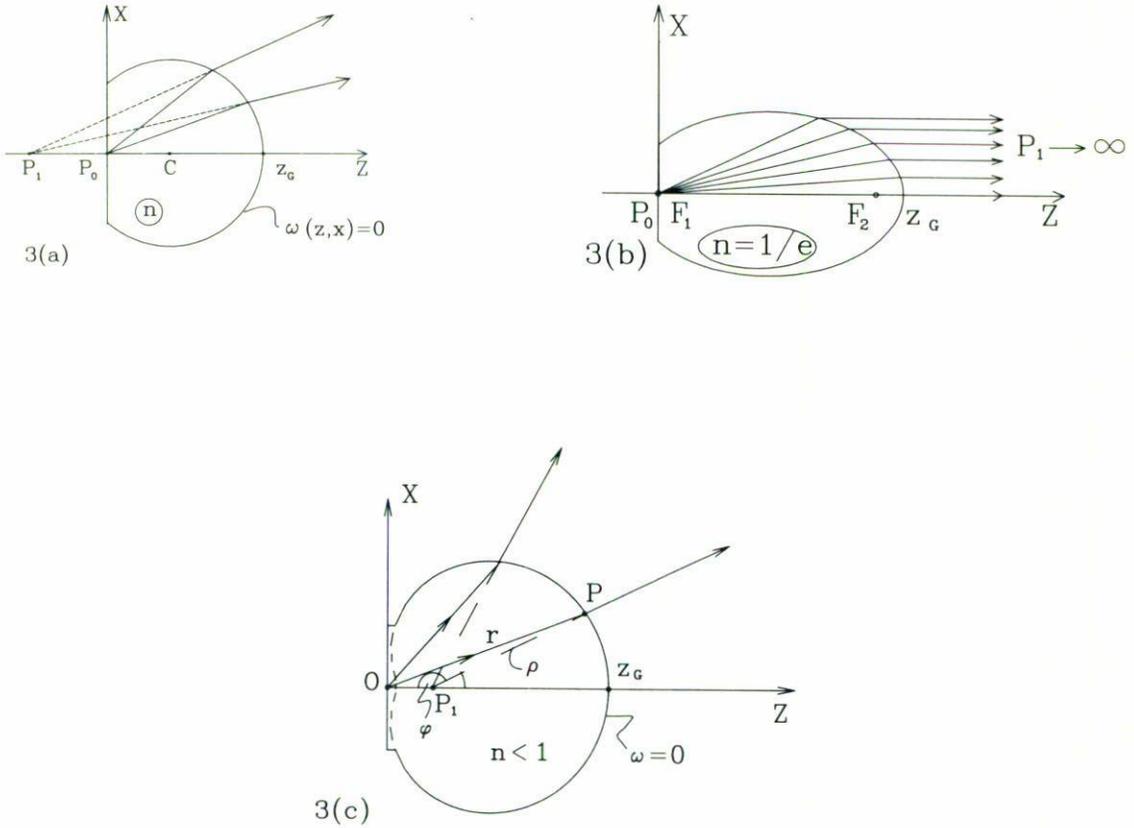


FIGURA 3. Algunos óvalos cartesianos obtenidos haciendo $z_a = 0$ en la Ec. (37). Los valores de n , z_1 y z_G se eligieron *ad hoc* en las Ecs. (49-53). 3a) esfera aplanática; 3b) elipse; 3c) caracol de Pascal.

Para reconocer de una manera más familiar que estos valores nos dan el caracol de Pascal, considérese la Fig. (3c); donde se definen las distancias entre puntos

$$\rho \equiv |\overline{P_1P}| \quad r \equiv |\overline{OP}|; \tag{54}$$

y en donde ϕ es el ángulo en el vértice P_1 del triángulo OPP_1 . Ahora escribamos la Ec. (42) en términos de ρ , r y del valor de la K en (51)

$$nr - \rho = \frac{n^2 - 1}{2}; \tag{55}$$

el signo negativo aparece debido a que la imagen es virtual. Por otro lado, la ley de los cosenos aplicada al triángulo OPP_1 de la Fig. (3c) nos da:

$$r^2 = z_1^2 + \rho^2 - 2\rho z_1 \cos \phi. \tag{56}$$

Sustituyendo el valor de r de (56) en (55), obtenemos:

$$\rho^2(1 - n^2) = -\rho[(n^2 - 1) - 2n^2 z_1 \cos \phi] + \left[n^2 z_1^2 - \left(\frac{n^2 - 1}{2} \right)^2 \right]. \quad (57)$$

Finalmente, al sustituir el valor z_1 de (53) en (57), tenemos

$$\rho = (1 - n \cos \phi); \quad 0 < n < 1; \quad (58)$$

la cual describe un caracol de Pascal en coordenadas polares (ρ, ϕ) con el origen de coordenadas sobre la imagen P_1 , como se quería demostrar.

6. CONCLUSIONES

Después de hacer una breve revisión de los conceptos fundamentales de la óptica hamiltoniana, ilustramos una aplicación de sus métodos en el problema de diseño de una lenté plano-asférica libre de aberraciones. El planteamiento hamiltoniano permite una aproximación general, sistemática y directa en la solución de este problema, e incluye asimismo al conjunto completo de los óvalos cartesianos como una particularidad notable. Consideramos que esta aproximación formal, utilizando los métodos de Hamilton, así como el manejo de una computadora personal en el cálculo y visualización de los resultados, puede representar una alternativa accesible y novedosa en la enseñanza de la óptica.

AGRADECIMIENTOS

Es un placer reconocer la labor del Profesor Jorge Andrade Herrera, del Departamento de Física de la Facultad de Ciencias UNAM, por la elaboración de la versión final del programa de cálculo de la esférica en lenguaje de programación Turbo-Basic, el cual incluye, además de la presentación en pantalla del perfil esférico, una subrutina en lenguaje de graficador (GP-GL) que permite dibujar los resultados vía la salida en el puerto paralelo de la computadora. Asimismo, esta versión incluye la creación de un archivo de datos con las parejas ordenadas que representan los puntos del perfil esférico, el cual puede fácilmente ser exportado a alguno de los más importantes *softwares* de dibujo CAD; las figuras del presente artículo fueron dibujadas de esta manera por los autores.

REFERENCIAS

1. W.R. Hamilton, *The Mathematical Papers of Sir W.R. Hamilton*, edited by A.W. Conway and J.L. Synge. Cambridge University Press (1931).
2. a) M. Born, and E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford, 6th. ed. (1980); b) F. Klein, *Z. Math. Phys.* **46** (1901) 376; c) M. Herzberger y J.L. Synge, *J. Opt. Soc. Amer.* **427** 1(1937) 75, 133, 138.

3. A.K. Ghatak and K. Thyagarajan, *Contemporary Optics*, Plenum Press, New York and London (1978).
4. R.K. Luneburg, *Mathematical Theory of Optics*, University of California Press, Berkeley (1964).
5. S. Cornbleet, *Microwave and Optical Ray Geometry*, John Wiley and Sons, Chichester. New York. Brisbane. Toronto. Singapore (1984).
6. A.J. Dragt, E. Forest and K.B. Wolf, *Lecture Notes in Physics*, **250**, Springer, New York (1986) 105-158.
7. G.F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **35**, No. 2 (1989)301-318.
8. E. López Moreno y K.B. Wolf, *Rev. Mex. Fís.* **35**, No. 2 (1989)291-300.
9. R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. I, Interscience Publishers, Inc. New York (1953).