Sistemas hamiltonianos singulares. I: planteamiento del caso discreto, teorema de Noether

P. Ripa
Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada
Km. 107 Carretera a Tijuana, 22800 Ensenada, B.C., México

Recibido el 29 de noviembre de 1991; aceptado el 14 de agosto de 1992

Resumen. Se presenta el concepto de sistemas hamiltonianos singulares (es decir, con un tensor de Poisson no invertible) para el caso de problemas discretos. En particular, se desarrolla el teorema de Noether sin hacer uso del principio variacional de Hamilton. En esta forma, el sentido físico de una simetría, y por qué está relacionada a la existencia de una integral de movimiento, es más claro que en la demostración tradicional, en que se usa el lagrangiano. Además, no se supone ni que el hamiltoniano ni que los generadores sean independientes del tiempo, es decir, el sistema puede no ser autónomo y/o las simetrías pueden corresponder a transformaciones que dependan explícitamente del tiempo. Los resultados son ejemplificados mediante sistemas singulares inmersos en simplécticos de mayor dimensión.

Abstract. The concept of singular Hamiltonian systems (namely, with a non-invertible Poisson tensor) is presented, for the case of discrete problems. In particular, Noether's theorem is developed without making use of Hamilton's variational principle; the physical meaning of a symmetry, and why it is related to an integral of motion, is clearer in this fomulation than in the traditional one, *i.e.* using the Lagrangian. Furthermore, it is assumed that neither the Hamiltonian nor the generators are time independent, *i.e.*, the system may not be autonomous and/or the symmetries may correspond to time dependent transformations. The main results are illustrated with singular systems embedded on a larger symplectic problem.

PACS: 03.20.+i

1. Introducción

Comúnmente se introduce el concepto de formulación hamiltoniana, en el marco de los sistemas *canónicos* [1,2], que son casos particulares de los *simplécticos* [3,4] (véase Fig.1). Como en estos problemas la ecuación de evolución es derivable del principio variacional de Hamilton, el teorema de Noether es generalmente presentado como una conexión entre simetrías del lagrangiano y leyes de conservación [5]. El objetivo de este trabajo es presentar el concepto de sistemas hamiltonianos singulares [6], o no-simplécticos, que son de suma importancia, por ejemplo, en el estudio de la hidrodinámica en general [7] y de la dinámica de océanos y atmósferas [8], temas a los que me referiré en una publicación futura. Con el propósito de hacer este trabajo de enseñanza más didáctico, he intercalado una serie de problemas, los que recomiendo ir resolviendo a medida que se los encuentre: muchas veces el texto que sigue presupone que el lector ha resuelto y entendido el problema; las soluciones están al final de este artículo. También al final se encuentra un glosario con las descripciones de los conceptos principales.

$$\text{Sistemas hamiltonianos}\begin{cases}\text{Simplécticos } (\det \boldsymbol{J} \neq 0) \begin{cases}\text{Canónicos}\\ \text{No-canónicos}\end{cases}\\ \\ \text{Singulares } (\det \boldsymbol{J} = 0)\end{cases}$$

FIGURA 1.

Aquí se demuestra el teorema de Noether sin hacer referencia ni a lagrangianos ni a principios variacionales, ya que éstos no están disponibles en el caso singular; se usa, en cambio, el concepto de generadores de transformaciones infinitesimales. Voy a ejemplificar cómo es posible pasar de un sistema simpléctico a uno singular mediante una reducción de variables. Esto es precisamente lo que se hace en hidrodinámica (adelantando resultados) al pasar de una formulación donde "se sigue" a cada elemento de fluido, mediante el uso de "etiquetas", a variables definidas en puntos fijos en el espacio (descripción euleriana). En este proceso de reducción de variables, se pierden simetrías y los correspondientes generadores pasan a ser "casimires" del nuevo paréntesis de Poisson; todos estos conceptos son explicados más adelante.

En esta primera parte, comienzo por repasar brevemente el concepto de sistemas canónicos, para luego introducir la notación co-simpléctica (que incluye a todos) y a los sistemas singulares, con su peculiaridad: los casimires. Luego muestro la utilidad del formalismo con el estudio de la relación entre simetrías y leyes de conservación. Los temas de la generalización de los resultados para problemas alineales de campos y la estabilidad de soluciones del caso discreto (por el método de Lyapunov), serán tratados en futuras publicaciones.

2. SISTEMA HAMILTONIANO CANÓNICO

En el caso más especial, canónico, el estado del sistema es descrito por un número par de variables, las coordenadas generalizadas $\mathbf{q}(t)\colon (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ y sus momentos conjugados $\mathbf{p}(t)\colon (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, cuya evolución está controlada por las $2n$ ecuaciones

$$\dot{q}_a = \frac{\partial H}{\partial p_a} \quad \text{y} \quad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q_a} \quad (a = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

donde $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ es la llamada función hamiltoniana o, simplemente, el hamiltoniano. Que podamos describir al estado del sistema por $2n$ variables (agrupadas en pares), tal que las ecuaciones de evolución tengan la forma (1) es lo que nos autoriza a decir que el sistema es hamiltoniano y canónico. La elección de las variables $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ no es única, lo que puede sospecharse del hecho que el sistema (1) es la solución del principio variacional

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \big(\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\big)\, dt = 0, \tag{2}$$

donde las variaciones de $\mathbf{q}(t)$ y de $\mathbf{p}(t)$ sólo están restringidas por $\delta\mathbf{q}(t_0) = \delta\mathbf{q}(t_1) = 0$; es bien conocido que la solución de un principio variacional no depende de la forma en que se parametrice la trayectoria. Esta propiedad es utilizada inmediatamente con el propósito de generalizar el concepto de estructura hamiltoniana.

Notación cosimpléctica

Si hacemos el cambio de variables $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \to \mathbf{z}$: $(z^j, j = 1, \ldots, 2n)$, o sea $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{z})$ y $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{z})$, en (2), las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden reescribir como

$$\dot{z}^i = \boldsymbol{J}^{ij}\partial_j H \quad \text{o} \quad \dot{\mathbf{z}} = \boldsymbol{J}\nabla H \tag{3}$$

para cierta matriz $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}(\mathbf{z})$, donde debe sumarse sobre índices repetidos y $\partial_j(\cdot) := \partial(\cdot)/\partial z^j$. Mediante esta ecuación vamos a generalizar el concepto de sistema hamiltoniano, llegando en particular a los singulares, que no son canónicos.

Problema 1: Mostrar que las ecuaciones de Euler-Lagrange de (2) son el sistema (1). Luego efectuar una transformación general $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \to \mathbf{z}$ en (2) y encontrar la matriz $\boldsymbol{J}$ de (3) (a partir de las nuevas ecuaciones de Euler-Lagrange); ¿Bajo qué condiciones existe $\boldsymbol{J}$?

La $\boldsymbol{J}$ que se obtiene en el problema anterior (es decir, a partir del sistema canónico) es no-singular, $\det(\boldsymbol{J}) \neq 0$, y cumple las siguientes dos propiedades: antisimetría e identidad de Jacobi,

$$\boldsymbol{J}^{ij} = -\boldsymbol{J}^{ij}, \tag{4a}$$

$$\boldsymbol{J}^{is}\partial_s\boldsymbol{J}^{jk} + \boldsymbol{J}^{js}\partial_s\boldsymbol{J}^{ki} + \boldsymbol{J}^{ks}\partial_s\boldsymbol{J}^{ij} = 0. \tag{4b}$$

En adelante diremos que un sistema discreto es hamiltoniano (a secas), si su estado instantáneo corresponde a un punto $\mathbf{z}(t)$ en el espacio de fases, no necesariamente con dimensión par, y existen H y $\boldsymbol{J}$ tales que se cumplan (3) y (4), pero no necesariamente sea $\det(\boldsymbol{J}) \neq 0$. Una gran ventaja de esta formulación, cosimpléctica, es su invariancia ante transformaciones de coordenadas (independientes del tiempo):

Así, ante el cambio de coordenadas $\mathbf{z} \to \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$, $d\mathbf{z}$ (o $\dot{\mathbf{z}}$, etc.) se transforma como un vector contravariante, es decir, $d\mathbf{z} \to d\hat{\mathbf{z}} = \boldsymbol{M}(\mathbf{z})^{\top}\,d\mathbf{z}$, donde $\boldsymbol{M}_{ij} := \partial_i\hat{z}_j$, mientras que ∇H (o el gradiente de cualquier función de estado) lo hace como un vector covariante $\nabla H \to \boldsymbol{M}^{-1}\nabla H$. Además, $\boldsymbol{J}$ es un tensor contravariante de orden dos (el tensor de Poisson) $\boldsymbol{J} \to \hat{\boldsymbol{J}} = \boldsymbol{M}^{\top}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}$. Las tres propiedades fundamentales del tensor de Poisson son también invariantes ante un cambio de coordenadas: 1) Su antisimetría (4a) claramente lo es, pues $\hat{\boldsymbol{J}}^{\top} = \boldsymbol{M}^{\top}\boldsymbol{J}^{\top}\boldsymbol{M} = -\hat{\boldsymbol{J}}$. 2) El hecho que sea singular, $\det(\boldsymbol{J}) = 0$, o no, $\det(\boldsymbol{J}) \neq 0$, también lo es ya que $\det(\hat{\boldsymbol{J}}) = \det(\boldsymbol{M})^2\det(\boldsymbol{J})$ y $\det(\boldsymbol{M}) \neq 0$. 3) Finalmente, aunque $\partial_s\boldsymbol{J}^{ij}$ *no es* un tensor, haciendo uso de (4*a*) se puede demostrar que el lado izquierdo de la ecuación (4*b*) sí lo es (contravariante y de orden tres), y por lo tanto la identidad de Jacobi es también invariante.

La formulación canónica (1), por el contrario, no es invariante ante cambios generales de coordenadas (lo es sólo ante las muy especiales transformaciones canónicas).

Problema 2: Si la dimensión del espacio de fases es igual a d, ¿cuántos elementos definen unívocamente a $\boldsymbol{J}$? Mostrar que la ecuación (4b) es satisfecha trivialmente si de los índices (i, j, k) dos son iguales. Por lo tanto, es suficiente con demostrarla para todo $i > j > k$; ¿cuántas relaciones independientes hay que satisfacer?

Problema 3: Mostrar que si la dimensión del espacio de fases (es decir, el número d de componentes de z) es impar, entonces el sistema es singular, $\det(\boldsymbol{J}) = 0$. Demostrar que el rango de $\boldsymbol{J}$ debe ser par.

Paréntesis de Poisson

Dadas dos funciones de estado cualquiera, $U(\mathbf{z}, t)$ y $V(\mathbf{z}, t)$, el paréntesis define una tercera función de estado, $\{U, V\}$, que se calcula en la forma

$$\{U, V\} = \partial_i U \boldsymbol{J}^{ij} \partial_j V = (\nabla U)^\top \boldsymbol{J} \nabla V, \tag{5}$$

y tiene las siguientes propiedades:

$$\{U, V\} = -\{V, U\}, \tag{6a}$$

$$\{U, \{V, W\}\} + \{V, \{W, U\}\} + \{W, \{U, V\}\} = 0, \tag{6b}$$

$$\{U, VW\} = \{U, V\}W + V\{U, W\}, \tag{6c}$$

$$\{U, aV + bW\} = a\{U, V\} + b\{U, W\} \tag{6d}$$

donde a y b son "números" (véase el glosario). Es fácil ver que (4) y (5) implican (6a-d), mientras que (6a-b) implican (4a-b). Se puede demostrar [9] que a su vez (6c-d) implica $\{F(U), G(V)\} = F'(U)\{U, V\}G'(V)$, de donde resulta la relación (5) con $\boldsymbol{J}^{ij} := \{z^i, z^j\}$ (es decir, $\boldsymbol{J}^{ij}$ es la representación de $\{.,.\}$ en un sistema de coordenadas determinado). En una forma más general, la ecuación de evolución (3) puede entonces escribirse como

$$\dot{\mathbf{z}} = \{\mathbf{z}, H\}. \tag{7}$$

En suma, en vez de empezar por el tensor $\boldsymbol{J}$, se puede definir la estructura hamiltoniana en forma más abstracta, independiente de una elección particular de coordenadas, usando los paréntesis de Poisson. De todos modos, ambas formulaciones, con el tensor $\boldsymbol{J}$ o con los paréntesis de Poisson, son equivalentes. Un sistema hamiltoniano está, entonces, determinado por la terna $\{\mathbf{z}(t), H(\mathbf{z}, t), \boldsymbol{J}(\mathbf{z})\}$.

3. Sistema Hamiltoniano singular; casimires

Diremos que un sistema hamiltoniano es *singular*, si

$$\exists\, C(\mathbf{z}) \text{ tal que } \{U, C\} \equiv 0\, \forall\, U(\mathbf{z}, t); \tag{8}$$

a las funciones de estado C que satisfacen esta ecuación se les llama *casimires*. Se entiende que $\partial C/\partial \mathbf{z} \not\equiv 0$; para un sistema no-singular (o simpléctico), la única solución C de $\{U, C\} \equiv 0 \, \forall U$ es un "número" (véase el glosario). Nótese que la existencia de casimires (o sea, la singularidad del sistema), es una propiedad del paréntesis de Poisson, no del hamiltoniano. Ya que $\partial_t \boldsymbol{J} = 0$, escribimos a los casimires sin dependencia explícita en t, aunque claramente cualquier función de los casimires y "números" tiene un paréntesis de Poisson nulo con toda función de estado. Es decir, si $C(\mathbf{z})$ es un casimir, entonces $\{U, \tilde{F}\} = 0 \, \forall U(\mathbf{z}, t)$, con $\tilde{F}(\mathbf{z}, t) = F(C, t)$; llamaremos a $\tilde{F}$ una función *distinguida*; en el caso no-singular, las funciones distinguidas se reducen a "números".

Problema 4: Demostrar que si el paréntesis de Poisson es singular, entonces $\det(\boldsymbol{J}) = 0$. ¿Cómo se pueden encontrar los casimires?

Un problema mucho más difícil que el anterior es el inverso: si $\det(\boldsymbol{J}) = 0$ ¿existen casimires?, y si existen ¿cuántos son? Imaginemos, por ejemplo, un espacio de fases con dimensión mayor que dos y un tensor de Poisson $\boldsymbol{J}(\mathbf{z})$ con corrango unitario, es decir, en cada punto existe un autovector $\mathbf{X}(\mathbf{z})$ tal que $\boldsymbol{J}\mathbf{X} = 0$. Que exista un casimir $C(\mathbf{z})$ implica que hay un cierto $k(\mathbf{z})$ tal que $\mathbf{X} = k\nabla C$. Esta es una relación no trivial, que sólo puede ser cierta para campos vectoriales muy especiales, ya que $\mathbf{X}$ tiene más componentes que el número de escalares (k y C) en el lado derecho de la igualdad. Se puede demostrar [6] que $\det(\boldsymbol{J}) = 0$ no sólo es necesario, sino también suficiente para la existencia de casimires; es más, el número de casimires independientes es igual a su máximo posible: el corrango de $\boldsymbol{J}$ (es decir, a la cantidad de autovectores independientes con autovalor nulo). En base a esto, en adelante tomaremos como propiedades equivalentes a la singularidad del sistema, en el sentido de la existencia de casimires (8), y la singularidad del tensor $\boldsymbol{J}$, en el sentido de $\det(\boldsymbol{J}) = 0$.

Hay que aclarar que en la clasificación de la Fig. 1, la diferencia entre sistemas simplécticos y singulares es fundamental; no así para los canónicos y no-canónicos simplécticos, los que difieren sólo en la forma de $\boldsymbol{J}^{ij}$, o sea, en una peculiaridad del sistema de coordenadas elegido.* Mediante varios ejemplos, voy a mostrar cómo los sistemas singulares pueden estar inmersos en problemas simplécticos de dimensión mayor, y la relación de esta propiedad con las simetrías e integrales de movimiento de cada uno.

Unos primeros ejemplos

Veamos un ejemplo sencillo de sistema hamiltoniano con pocos grados de libertad: una partícula en el plano, sujeta a la acción de un potencial central; en coordenadas polares (r, ϑ) es

$$H(r, \vartheta, u, v) := \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{2}v^2 + \varphi(r), \qquad \boldsymbol{J} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r \\ -1 & 0 & 0 & v/r \\ 0 & -1/r & -v/r & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

*De hecho, el teorema de Darboux [3,9] garantiza la posibilidad de pasar de coordenadas no-canónicas a canónicas, en el caso simpléctico $\det(\boldsymbol{J}) \neq 0$.

donde u y v son la componente radial y azimutal de la velocidad.

Problema 5: Demostrar que en este sistema es no-canónico, pero no-singular (simpléctico), y encontrar las ecuaciones de movimiento.

En el problema anterior ϑ no aparece ni en H ni en $\boldsymbol{J}$ y, por lo tanto, tampoco lo hace en la ecuación de evolución de las otras tres variables. En consecuencia, podemos eliminarla del sistema, obteniendo

$$H(r,u,v) := \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{2}v^2 + \varphi(r), \boldsymbol{J} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & v/r \\ 0 & -v/r & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Voy ahora a demostrar que este nuevo sistema, obtenido del (9) por reducción de variables, es también hamiltoniano. El tensor de Poisson cumple con la condición de antisimetría (4a); es necesario demostrar que también satisface la identidad de Jacobi (4b). Con base en los resultados del problema 3, basta demostrarlo para $(ijk) = (321)$: ya que $\boldsymbol{J}^{31}$ y $\boldsymbol{J}^{12}$ son constantes, (4b) se reduce a demostrar $\boldsymbol{J}^{1s}\partial_s \boldsymbol{J}^{23} = 0$. Finalmente $\boldsymbol{J}^{1s}$ es diferente de cero sólo para $s = 2$, o sea la componente u, y como $\boldsymbol{J}^{23}$ no depende de u, la identidad de Jacobi es también satisfecha; el sistema es hamiltoniano. □

Es fácil ver que $\det(\boldsymbol{J}) = 0$, en acuerdo con los resultados del problema 4, y el corrango de $\boldsymbol{J}$ es uno: tiene que haber un casimir, solución de $\boldsymbol{J}\nabla C = (0\ 0\ 0)^\top$, es decir, $\partial C/\partial u = 0$ (dos veces) y $r\partial C/\partial r = v\partial C/\partial v \Rightarrow C = rv$ (momento angular). N.B. la solución general de $\boldsymbol{J}\nabla F = 0$ es la "función distinguida", $F = F(rv,t)$; ver glosario. Las ecuaciones de evolución son $\dot{\mathbf{z}} = \boldsymbol{J}\nabla H = \boldsymbol{J}(\varphi'(r), u, v)^\top$, es decir, $\dot{r} = u$, $\dot{u} = v^2/r - \varphi'(r)$, $\dot{v} = uv/r$; es fácil verificar que $\dot{C} \equiv 0$.

Es bien conocido que el problema (9) puede ser transformado a variables canónicas (por ejemplo, utilizando coordenadas cartesianas o, mejor aún, usando el momento angular rv, que es el conjugado de ϑ, en vez de v). Pero no me interesa destacar eso aquí, sino al contrario, mostrar un ejemplo muy sencillo donde se puede reducir el número de variables, pasando de un sistema simpléctico (9) a uno singular (10). En los problemas de hidrodinámica, el equivalente al momento angular en (9) no siempre puede ser "factorizado" del problema, para reducir aún más la dimensión del espacio de fases.

Consideremos, finalmente, el ejemplo de un sistema hamiltoniano genérico de tres componentes. Como la matriz $\boldsymbol{J}$ es antisimétrica, su forma más general es $\boldsymbol{J}^{ij} = \varepsilon^{ijk}D_k$, para algún campo vectorial covariante $\mathbf{D}(\mathbf{z})$, donde ε^{ijk} es el símbolo totalmente antisimétrico de Levi-Civita; ¿cumple este tensor con la identidad de Jacobi?: reemplazando $\boldsymbol{J}^{ij}$ por $\varepsilon^{ijk}D_k$ en (4b), se obtiene $\mathbf{D}\cdot\nabla\times\mathbf{D} = 0$ como condición para que ello ocurra. Por otra parte, ya que la dimensión del espacio de fases es non, $\boldsymbol{J}$ es singular (véase problema 3): el teorema en Ref. [6] garantiza la existencia de un casimir $C(\mathbf{z})$; por definición es $\boldsymbol{J}^{ij}\partial_j C = \varepsilon^{ijk}\partial_j C D_k \equiv 0$, es decir, los vectores covariantes ∇C y D son paralelos, *i.e.* $D = \kappa\nabla C$, para algún $\kappa(\mathbf{z})$; es más, como $\nabla\times\mathbf{D} = \nabla\kappa\times\nabla C$, se tiene $\mathbf{D}\cdot\nabla\times\mathbf{D} = 0$, es decir, sí se cumple la identidad de Jacobi.

En consecuencia, para los problemas con dimensión tres, sólo hay un casimir y la forma más general del tensor de Poisson es

$$\mathbf{J}^{ij} = \kappa(\mathbf{z})\varepsilon^{ijk}\partial_k C \qquad (d=3), \tag{11}$$

esto es, las ecuaciones de movimiento tienen la forma

$$\dot{z}^i = \kappa(\mathbf{z})\varepsilon^{ijk}\partial_j H \partial_k C \quad \text{o} \quad \dot{\mathbf{z}} = \kappa(\mathbf{z})\nabla H \times \nabla C. \tag{12}$$

Problema 6: Encontrar κ tal que los paréntesis del ejemplo (10) sean expresados de la forma (11).

De la expresión (12), vemos que todos los sistemas hamiltonianos de tres componentes están determinados por las tres funciones de estado κ, H y C. Nótese que si $\partial_t H = 0$ no se puede decir que H y C sean *el* hamiltoniano y *el* casimir del problema; por ejemplo, las ecuaciones (12) son invariantes ante el cambio $(\kappa, H, C) \mapsto (-\kappa, C, H)$. Es más, hay un número infinito de hamiltonianos y casimires posibles, para el mismo problema físico, dados por dos funciones $f(H,C)$ y $g(H,C)$ que no tengan gradientes paralelos.

Integrales de movimiento

La derivada temporal "siguiendo a la solución" de una función de estado arbitraria, $F(\mathbf{z},t)$, está dada por $\dot{F} = \partial_t F + \dot{\mathbf{z}} \cdot \nabla F = \partial_t F + \{\mathbf{z}, H\} \cdot \nabla F$, es decir,

$$\dot{F} = \partial_t F + \{F, H\}. \tag{13}$$

Se dice que una función de estado $I(z,t)$ es una integral —o constante— de movimiento, si y sólo si su derivada temporal siguiendo a la trayectoria $\mathbf{z}(t)$ es nula: $\dot{I} \equiv 0$ (es decir, el valor de I no cambia a lo largo de una solución). La existencia de un conjunto de integrales de movimiento, $I_\alpha(\mathbf{z})$, implica una restricción *a priori* a la evolución del sistema, en el sentido de que la órbita debe estar contenida en la intersección de las hipersuperficies $(\mathbf{z} \mid I_\alpha(\mathbf{z},t) = I_\alpha(\mathbf{z}(t_0), t_0) = \text{constante})$.

De acuerdo con (13), $I(\mathbf{z},t)$ es una integral de movimiento si y sólo si $\partial_t I + \{I, H\} = 0$. En consecuencia, si el hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo [como en los ejemplos (9) y (10)], entonces es una constante de movimiento, mientras que todo casimir es una integral de movimiento para cualquier hamiltoniano [como en el ejemplo (10)].

Problema 7: Mostrar que el casimir del sistema (10), el momento angular rv, es una integral de movimiento del sistema (9); ¿Cuál es su paréntesis de Poisson con cada una de las variables de estado en (9)?

Otro ejemplo: la triada real

En el estudio de la interacción alineal entre las ondas de una triada resonante, es común hacer una hipótesis muy especial (como explicaré más adelante) que lleva a ecuaciones del tipo

$$\dot{A}_1 = \sigma_1 A_2 A_3, \quad \dot{A}_2 = \sigma_2 A_3 A_1, \quad \dot{A}_3 = \sigma_3 A_1 A_2, \tag{14}$$

donde las $A_j(t)$ tres funciones reales del tiempo y los σ_j son tres constantes tales que $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \neq 0$. Estas ecuaciones también incluyen a las del "cuerpo rígido" libre, que es un ejemplo muy socorrido de sistema hamiltoniano singular, para el cual no todas las σ_j son del mismo signo. Esta última propiedad —que no necesitamos imponer aquí— es fundamental para el estudio de estabilidad de ciertas soluciones (tema de una futura publicación).

A continuación voy a encontrar las integrales de movimiento y mostrar explícitamente que el problema es hamiltoniano y singular. Para que $I(\mathbf{A})$ se conserve, $\dot{I} = 0$, es necesario que $\sum A_j^{-1}\sigma_j\partial I/A_j = 0$, por ejemplo,

$$I_1 := A_2^2/\sigma_2 - A_3^2/\sigma_3 \quad \text{y} \quad I_2 := A_3^2/\sigma_3 - A_1^2/\sigma_1, \tag{15}$$

son dos integrales (independientes) de movimiento. Voy enseguida a mostrar que las ecuaciones de movimiento pueden ser puestas en la forma (12), que es la más general para un sistema hamiltoniano (singular) de tres componentes; para esto, I_1 puede ser tomada como el hamiltoniano e I_2 como el casimir, o viceversa. Las soluciones son

$$H(\mathbf{A}) = I_1 \quad \text{y} \quad C = I_2 \Rightarrow \mathbf{J}_1(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1\sigma_2 A_3 & 0 \\ -\sigma_1\sigma_2 A_3 & 0 & -\sigma_2\sigma_3 A_1 \\ 0 & \sigma_2\sigma_3 A_1 & 0 \end{pmatrix}$$

que corresponde a $\kappa = \frac{1}{4}\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ en (11), y

$$H(\mathbf{A}) = I_2 \quad \text{y} \quad C = I_1 \Rightarrow \mathbf{J}_2(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1\sigma_2 A_3 & \sigma_3\sigma_1 A_2 \\ -\sigma_1\sigma_2 A_3 & 0 & 0 \\ -\sigma_3\sigma_1 A_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

idem. para $\kappa = -\frac{1}{4}\sigma_1\sigma_2\sigma_3$. Usando $\nabla I_1 = (0\ A_2/\sigma_2\ -A_3/\sigma_3)^\top$ y $\nabla I_2 = (-A_1/\sigma_1\ 0\ A_3/\sigma_3)^\top$ es fácil ver que tanto $\mathbf{J}_1\nabla I_1$ como $\mathbf{J}_2\nabla I_2$ dan las ecuaciones de movimiento (14), mientras que $\mathbf{J}_1\nabla I_2 = \mathbf{J}_2\nabla I_1 = 0$, de acuerdo con (8).

En suma, éste es un ejemplo muy sencillo de sistema bi-hamiltoniano, como de hecho todos los de tres variables lo son. Nótese que para las mismas coordenadas en el espacio de fases, una función de estado puede ser el hamiltoniano o el casimir, dependiendo de la elección del tensor $\boldsymbol{J}$.

Problema 8: Si $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 < 0$, entonces se pueden renormalizar las A_j de manera que $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$, digamos, $\sigma_1 = s_2 - s_3$ y permutaciones cíclicas [10]. Demostrar que en ese caso, la energía $E := A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$ y el pseudomomento $P := s_1A_1^2 = s_2A_2^2 + s_3A_3^2$ son dos combinaciones lineales de I_1 e I_2 (y por lo tanto son también integrales de movimiento) y construir los tensores de Poisson tales que el sistema (14) sea explícitamente hamiltoniano, aunque singular, con una de las dos integrales como H y la otra como C.

Teorema de Noether

En general, es un proceso laborioso, de "ensayo y error", el encontrar las integrales de movimiento de un sistema dinámico. No así para aquellos que son hamiltonianos, para los que uno puede empezar por el análisis de sus simetrías (las que normalmente son patentes), ya que el teorema de Noether las liga con leyes de conservación.

En el caso no-singular (canónico o no) es fácil ver que la invariancia del principio variacional (2) ante una cierta transformación (es decir, la propiedad de que la variación del integrando sea igual a la derivada temporal total de una función de $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ y t) da como resultado explícito la existencia de una integral de movimiento; ésta es la forma en que normalmente se estudia el teorema de Noether. En el caso singular, por otra parte, no está claro que la formulación cosimpléctica, (3) y (4), sea derivable de un principio variacional: la conexión entre simetrías e integrales de movimiento se establece de una manera diferente a la formulación tradicional del teorema de Noether, utilizando el concepto de generadores de transformaciones infinitesimales, como paso a explicar.

Dada una condición inicial, en $t = t_0$, el estado posterior del sistema está unívocamente determinado por la Ec. (3); digamos

$$\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0 \Rightarrow \mathbf{z}(t) = \mathbf{T}(t, \mathbf{z}_0) \qquad (t > t_0). \tag{16}$$

Para otra condición inicial, que difiera de la primera en $\delta\mathbf{z}_0$, corresponde otra trayectoria, que en cada instante dista de $\mathbf{z}(t)$ en

$$\Delta\mathbf{z}(t) := \mathbf{T}(t, \mathbf{z}_0 + \delta\mathbf{z}_0) - \mathbf{T}(t, \mathbf{z}_0).$$

Aquí $\Delta\mathbf{z}(t)$ está claramente determinada por la dinámica, y es una función de $\mathbf{z}_0$, $\delta\mathbf{z}_0$ y t; que $\mathbf{z} + \Delta\mathbf{z}$ sea una solución constituye una tautología, es verdadero por construcción. Sin embargo, supongamos que existe una forma de calcular una variación muy particular $\Delta_M\mathbf{z}$, *en función exclusivamente de* t y $\mathbf{z}(t)$, y tal que la dinámica sea invariante ante esta transformación, o sea

$$\delta\mathbf{z}_0 = \Delta_M\mathbf{z}(t_0) \Rightarrow \Delta\mathbf{z}(t) \equiv \Delta_M\mathbf{z}(t) \qquad (t > t_0). \tag{17}$$

Esta expresión afirma que da lo mismo transformar y "dejar correr el tiempo" que hacer ambas operaciones en el orden inverso; ésta es la expresión más general de una simetría del problema. ¿Cómo podemos definir esta variación especial $\Delta_M\mathbf{z}$, a partir de t y $\mathbf{z}(t)$? Con el propósito de obtener una respuesta a la pregunta anterior que sea invariante ante cambios de coordenadas,* vamos a restringirnos a variaciones infinitesimales: Suponemos que $\Delta_M\mathbf{z}$ esté parametrizado por una variable μ, y definimos $\Delta_M\mathbf{z} = \delta_M\mathbf{z} + 0(\mu^2)$ conforme $\mu \to 0$: ante un cambio de variables, $\delta_M\mathbf{z}$ debe comportarse como un vector contravariante, mientras que $\Delta_M\mathbf{z}$ (al igual que $\mathbf{z}$) no está restringido por una ley de transformación particular.

En la Fig. 2 se muestra el significado de que la transformación infinitesimal δ_M sea una simetría. El 0 indica el punto inicial, el camino $0 \to 1 \to 2$ significa "dejar correr el tiempo" en δt y luego hacer la transformación infinitesimal generada por M, mientras que

*Como es de esperar —y ejemplificamos más adelante— esta exigencia de covariancia excluye algunas simetrías, las que, sin embargo, suelen ser menos interesantes, en el sentido de que no están ligadas a leyes de conservación.

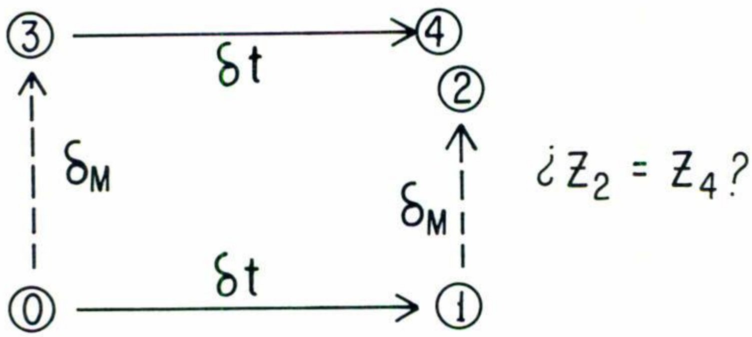

FIGURA 2.

para el camino $0 \to 3 \to 4$ se realizan ambas operaciones en el orden inverso. La pregunta es si z_2 y z_4 coinciden o no, para cualquier (z_0, t_0).

Tomemos una función de estado genérica $F(\mathbf{z}, t)$;* tanto su variación infinitesimal como su derivada temporal total, $\delta_M F(\mathbf{z}, t)$ y $\dot{F}(\mathbf{z}, t)$, son también funciones de estado. Por lo tanto, por el primer camino $(0 \to 1 \to 2)$ F cambia en la forma

$$F_0 \to F_1 = F(z_0 + \dot{z}_0\delta t, t + \delta t) \sim F_0 + \dot{F}_0 \delta t$$
$$\to F_2 = F_1 + \delta_M F_1 \sim F_0 + \dot{F}_0\delta t + \delta_M F_0 + \delta_M(\dot{F}_0)\delta t,$$

donde el subíndice 0 significa evaluación en (z_0, t_0) y se desprecian infinitesimales de orden tres. Los cambios por el segundo camino $(0 \to 3 \to 4)$ son

$$F_0 \to F_3 = F_0 + \delta_M F_0$$
$$\to F_4 = F(z_3 + \dot{z}_3\delta t, t + \delta t) \sim F_3 + \dot{F}_3\delta t \sim F_0 + \delta_M F_0 + \dot{F}_0\delta t + (\delta_M F_0)^{\cdot}\delta t.$$

Comparando estas dos expresiones resulta que, en el sentido infinitesimal,

$$\delta_M \text{ es una simetría } \Leftrightarrow \delta_M(\dot{F}) - (\delta_M F)^{\cdot} = 0, \ \forall F(\mathbf{z}, t). \tag{18}$$

Debemos ahora buscar una forma general de construir la transformación infinitesimal δ_M y que sea invariante ante cambios de coordenadas. En el espacio de fases podemos definir escalares, o funciones de estado $M(\mathbf{z}, t)$, cuyo gradiente es un vector covariante $\partial_j M$. Por lo tanto, la única forma de construir el vector contravariante, con los elementos a nuestra disposición, es $\delta_M z^i = \mu\partial_j M \mathbf{J}^{ji}$, es decir,

$$\delta_M F := \mu\{M, F\} \quad (\mu \to 0), \ \forall F(z, t); \tag{19}$$

se dice que M es el *generador* de la transformación infinitesimal δ_M. Un caso particular de (19) se obtiene al usar H como generador: lo es de la transformación $F(\mathbf{z}(t), t) \to$

*En particular, se puede elegir $F = z^j$ (en un determinado sistema de coordenadas) para algún j.

$F(\mathbf{z}(t-\mu),t)$; nótese que esta transformación no es equivalente a un cambio de origen del tiempo. Geométricamente es fácil ver que $\delta_M \mathbf{z}$ está contenido en la hipersuperficie $M =$ constante (para t fijo). Dos conclusiones triviales de la definición (19) son que un generador no se transforma a sí mismo $\delta_M M \equiv 0$, y que todo casimir C no es generador de ninguna transformación $\delta_C F = 0$, $\forall\, F$.

La Ec. (19) define la transformación dado el generador. Un problema más difícil de resolver es el inverso: dado δ_M encontrar M. Por ejemplo, para encontrar el generador T de la traslación de la primera coordenada ($\delta z^1 = \mu, \delta z^j = 0$ para $j \neq 1$) se necesita resolver $\{T,F\} = \delta_T F/\delta z_1 = -\partial_1 F\,\forall\, F$; este problema es trivial en un sistema canónico, pero puede ser muy difícil —o imposible de resolver— en sistemas más complicados. Es claro que tanto la ecuación de evolución (7) como la definición (19) no cambian si se le agrega una función distinguida a H o M, respectivamente: si el sistema es singular, el hamiltoniano y los generadores son obtenidos, a partir de la ecuación de movimiento y las transformaciones infinitesimales, módulo funciones distinguidas [9].

Ahora bien, el paréntesis de dos funciones de estado F y G es otra función de estado, a la que podemos también aplicar la transformación (19). De la identidad de Jacobi resulta $\delta_M\{F,G\} = \mu\{M,\{F,G\}\} = \mu\{\{M,F\},G\} + \mu\{F,\{M,G\}\}$, o sea,

$$\delta_M\{F,G\} \equiv \{\delta_M F, G\} + \{F, \delta_M G\}.$$

Sea otra transformación infinitesimal, generada por una función escalar $N(z,t)$ y correspondiente a un parámetro v. Aplicándosela a (19) y utilizando la expresión anterior resulta $\delta_N\delta_M F = \mu\{\delta_N M, F\} + \mu\{M, \delta_N F\} = v\mu\{\{N,M\},F\} + \delta_M\delta_N F$; por lo tanto

$$\delta_N\delta_M F - \delta_M\delta_N F = v\mu\{\{N,M\},F\}\ \forall\, F.$$

Por lo tanto, si $\{N,M\} \equiv 0 \Rightarrow \delta_N\delta_M F = \delta_M\delta_N F$; la relación inversa no es necesariamente correcta: para que el lado izquierdo de esta ecuación sea nulo, $\forall F$, es suficiente con que $\{N,M\}$ sea una función distinguida. En particular, ya que $(\dot{})\delta t = \delta t\partial_t(\ ) - \delta_H(\ )$, usando esta ecuación para $N = H$ resulta $\delta_M(\dot{F}) - (\delta_M F)^{\cdot} + \mu\{\partial_t M, F\} = \mu\{\{H,M\},F\}$, o sea

$$(\delta_M F)^{\cdot} - \delta_M(\dot{F}) = \mu\{\partial_t M + \{H,M\},F\} = \mu\{\dot{M},F\}\ \forall\, F(z,t). \tag{20}$$

Ésta es la expresión necesaria para determinar bajo qué condiciones se cumple la simetría (18): Si $\dot{M} = 0$ —es decir, M es una integral de movimiento— entonces los puntos z_2 y z_4 en la Fig. 2 coinciden, *i.e.*, la transformación generada por M es preservada por la dinámica, es una simetría. *Nótese que para llegar a este resultado no se necesita que $\partial_t H$ y/o $\partial_t M$ se anule.*

El recíproco de este teorema no es estrictamente cierto: Si $\delta_M(\dot{F}) = (\delta_M F)^{\cdot}\forall\, F(\mathbf{z},t)$ de (20) sólo se infiere que $\dot{M}$ es igual a una función distinguida $F(C_\alpha,t)$, donde C_α son los casimires del sistema (si éste fuera singular); sin embargo, la relación (19), donde se introdujo el generador M, no se altera si se reemplaza M por $\tilde{M} = M - \int F\,dt$, y $\tilde{M}$ sí se conserva.

Nótese que en esta formulación del teorema de Noether se incluye la posibilidad de invariancia ante cambios del origen del tiempo: Si y sólo si $\dot{H}\ (\equiv \partial_t H) = 0$ (módulo una función distinguida) entonces tomando como condición inicial, en $t = t_0$, a $\mathbf{T}(t_0 + \delta t, \mathbf{z}_0)$ de (16), es decir, $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0 + \delta t\{\mathbf{z}, H\}_0 = \mathbf{z}_0 - \delta_H \mathbf{z}_0$, resulta $\mathbf{z}(t) = \mathbf{T}(t + \delta t, \mathbf{z}_0)$ $(t > t_0)$.

En el caso singular, los casimires se conservan, pero no corresponde a ninguna transformación finita: de (8) resulta $\delta_C F \equiv 0$ en (19). Por ejemplo, al comparar los sistemas (9) y (10) se ve que el momento angular, que en el primer caso es el generador de las rotaciones infinitesimales $\delta\vartheta$, en el segundo es un casimir y no está ligado a ninguna simetría explícita (ya que ϑ desaparece del problema). En este sentido, se suele decir que los casimires están ligados a simetrías "internas" o "escondidas".

En suma, en la notación cosimpléctica, el teorema de Noether en su forma, digamos, directa va de una ley de conservación a una simetría, en la forma

$$\dot{M} = 0 \to \delta_M = (\nabla M)^\top \boldsymbol{J} \nabla \to \delta_M\text{: Simetría;} \tag{21}$$

esto es lo opuesto al resultado que se encuentra cuando se parte de una simetría del principio de Hamilton [1], que no usamos aquí pues nos interesan los sistemas singulares. El camino inverso —que es el que nos interesa, para encontrar las integrales de movimiento a partir de las simetrías— no es tan fácil en el caso singular: En primer lugar, dada la simetría δ_M, no siempre es posible encontrar un generador M tal que la transformación infinitesimal pueda ser escrita como $(\nabla M)^\top \boldsymbol{J}\nabla$; en segundo lugar, dada una simetría de esta forma, la integral de movimiento será igual al generador encontrado módulo una función distinguida (esto no es mayor problema, ya que normalmente se conocen los casimires).

Voy a ilustrar estos resultados con un ejemplo muy sencillo, la partícula libre en la recta, sujeta a una fuerza de fricción: Sea

$$H_1(x, u) = u + \lambda x \quad \text{y} \quad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & u \\ -u & 0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Es fácil ver que este sistema es hamiltoniano (ya que $\boldsymbol{J}$ es antisimétrica y satisface trivialmente la identidad de Jacobi (ver problema 3), simpléctico ($\det(\boldsymbol{J}) \neq 0$), pero no canónico. ¿Cuáles son sus integrales de movimiento? La primera es $I_1 = H_1$, ya que $\partial_t H_1 = 0$; si hay otra, debe satisfacer

$$\dot{I} = 0 = \partial_t I + \{I, H_1\} = \partial_t I + u\partial_x I - \lambda u \partial_u I \Rightarrow I_2 = ue^{\lambda t}.$$

¿A qué transformaciones infinitesimales corresponden estas dos integrales de movimiento? Calculando la acción de I sobre una F arbitraria resulta

$$I_1\colon F(x, u, t) \to F(x - \varepsilon u, u + \varepsilon\lambda u, t),$$

$$I_2\colon F(x, u, t) \to F(x - \varepsilon u e^{\lambda t}, u, t).$$

(*a posteriori* se puede ver que éstas son simetrías aún para ε finito, en el sentido de la Ec. (17)).

Problema 9: Encontrar y resolver las ecuaciones de evolución, para una condición inicial arbitraria en $t = 0$. ¿Cuál es la relación de I_1 e I_2 con el punto inicial?

Con base en los resultados de este problema se puede ver que estas dos transformaciones provienen de las simetrías ante cambios del origen de t y x, respectivamente. (Nótese que ni I_1 es la energía $u^2/2$, ni I_2 es el impulso u, que por cierto no son conservados para este sistema con fricción.)

Que I_2 esté (*a posteriori*) relacionado con homogeneidad en x es algo sorprendente, ya que no se ve explícitamente que su acción sea sumar a x una constante; al resolver esta duda podemos ejemplificar una de las dificultades que se pueden encontrar al recorrer en sentido inverso el camino de (21): Se puede ver fácilmente que existe simetría ante traslaciones en x (porque a H se le suma una constante y $\boldsymbol{J}$ no depende de x). Buscando el generador correspondiente, es decir un M tal que $\{M, F\} = -\partial_x F, \forall F$, obtenemos $M = \ln(u)$; sin embargo M no se conserva: $\dot{M} = -\lambda$. Claro que es inmediato ver que sumándole el "número" λt, obtenemos otro generador de la misma transformación, que sí se conserva, es decir

$$\ln(I_2): F(x,u,t) \to F(x-\varepsilon, u, t).$$

Si el tensor de Poisson fuera singular, al primer generador habría que sumarle una función distinguida para obtener otro generador equivalente, que sea integral de movimiento. Como se ve, no es ésta la dificultad mayor para revertir las flechas en (21).

La otra dificultad que mencionábamos es más importante, y también puede ser ilustrada con este ejemplo: Las ecuaciones de movimiento son lineales, y por lo tanto un cambio de escala, $F(x,u,t) \to F(x+\varepsilon x, u+\varepsilon u, t)$, transforma soluciones en soluciones; sin embargo, no existe ningún escalar M, tal que el correspondiente generador infinitesimal $x\partial_x + u\partial_u$ sea igual a $(\nabla M)^\top \boldsymbol{J}\nabla$, es decir, con el presente formalismo no podemos relacionar esta simetría con una ley de conservación.

Problema 10: Demostrar que el problema (22) es equivalente al sistema *canónico*

$$H_2(q,p,t) = \tfrac{1}{2}p^2 e^{-\lambda t} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

¿Cuáles son las integrales de movimiento? ¿Cuál es la relación entre (q,p) y (x,u)?

Este sistema y el (22) constituyen un ejemplo de un problema con dos hamiltonianos diferentes (de hecho, uno de ellos se conserva y el otro no), debido a que el cambio de variables de estado involucra explícitamente al tiempo, es decir, no es una de las transformaciones ante las que exigíamos invariancia de las Ecs. (3) y (4), al introducir la notación cosimpléctica.

Otro ejemplo: la triada compleja

Voy ahora a ilustrar el proceso inverso del utilizado en ir del sistema (9) —canónico— al (10) —singular, haciendo que los tres $A_j(t)$ del sistema (14) sean complejos, lo que nos lleva a un sistema canónico en un espacio de seis dimensiones. Un problema donde aparecen las nuevas ecuaciones es el caso de una triada de ondas resonantes [10]: Muy brevemente, para algún campo físico (cuya ecuación de evolución tiene alinealidad cuadrática) se obtiene una dependencia espacio temporal dada por la suma de tres términos del tipo $\mathrm{Re}[Z_j \exp(ik_j x - \imath\omega_j t)]$, donde las Z_j son amplitudes complejas. La condición de interacción entre las tres ondas es $k_1 + k_2 + k_3 = 0$; si además las tres componentes están "en resonancia", $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$, aparecen términos seculares en el siguiente orden perturbativo, salvo que las Z_j sean funciones (lentas) del tiempo, que satisfacen

$$\dot{Z}_1 = \sigma_1 Z_2^* Z_3^*, \qquad \dot{Z}_2 = \sigma_2 Z_3^* Z_1^*, \qquad \dot{Z}_3 = \sigma_3 Z_1^* Z_2^*, \tag{23}$$

donde $*$ significa complejo conjugado y, nuevamente, los σ_j son tres constantes reales, tales que $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \neq 0$; no voy a hacer ninguna hipótesis sobre su signo relativo. Para demostrar que (23) es hamiltoniano, voy a utilizar como variables independientes a las Z_j y sus complejos conjugados Z_j^*: Estas ecuaciones son derivables del sistema

$$H(Z_1, Z_1^*, \ldots) := Z_1 Z_2 Z_3 - Z_1^* Z_2^* Z_3^*, \qquad \boldsymbol{J} := \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}; \tag{24}$$

es fácil ver que $\boldsymbol{J}$ es antisimétrico y satisface la identidad de Jacobi (ya que todos sus elementos son constantes). Nótese que $\det(\boldsymbol{J}) = \sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_2^2 \neq 0$, es decir este sistema no es singular. El espacio de fases es el producto cartesiano de los espacios para cada una de las componentes (complejas) Z_j; estos subespacios no están acoplados en $\boldsymbol{J}$ sino por H.

Voy ahora a discutir el cambio a variables rectangulares y polares, para ilustrar la invariancia de las ecuaciones cosimplécticas ante transformaciones de coordenadas independientes del tiempo. En primer lugar, es fácil ver que haciendo $Z_j = \mathrm{sgn}\,(\sigma_j)|\sigma_j/2|^{1/2}(q_j + ip_j)$ el nuevo sistema es canónico, con el mismo hamiltoniano $H = 2\,\mathrm{Im}(Z_1 Z_2 Z_3)$. En segundo lugar, haciendo $Z_j = A_j \exp(i\alpha_j)$, las nuevas ecuaciones,

$$\left.\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \sigma_1 A_2 A_3 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ \dot{\alpha}_1 &= -\sigma_1 A_1^{-1} A_2 A_3 \,\mathrm{sen}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \end{aligned}\right\} \text{y p.c.} \tag{25}$$

(donde "p.c." significa permutaciones cíclicas de 123), resultan del sistema

$$H(A_1, \alpha_1, \ldots) := A_1 A_2 A_3 \,\mathrm{sen}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3),$$

$$\boldsymbol{J} := \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1/A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_1/A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_2/A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2/A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_3/A_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_3/A_3 & 0 \end{pmatrix}; \tag{26}$$

aunque $\boldsymbol{J}$ no es constante, es fácil ver que satisface la identidad de Jacobi, ya que por la estructura de bloques de $\boldsymbol{J}$, basta demostrarlo para cada par de variables (A_j, α_j), y un tensor de Poisson de 2×2 satisface trivialmente la identidad de Jacobi (ver problema 3); en consecuencia este sistema también es hamiltoniano, como era de esperarse por la invariancia de las ecuaciones cosimplécticas.

Un resultado muy importante de (25) es que si $\alpha_1(0) + \alpha_2(0) + \alpha_3(0) = 0 \pmod{\pi}$, entonces $\alpha_j(t) \equiv \alpha_j(0)$ y las tres $A_j(t)$ evolucionan de acuerdo al sistema reducido (14), que es hamiltoniano y singular; ésta es la "hipótesis muy especial" a que me refería al presentar el ejemplo de la triada real. Tanto en el ejemplo de (9) y (10) como en el presente encontramos un sistema singular inmerso en un sistema no-singular de dimensión mayor; sin embargo, hay una diferencia fundamental entre ambos casos. Para pasar de (9) a (10), eliminamos una variable "ignorable", el ángulo ϑ, mientras que las ecuaciones de sistema reducido (14) corresponden a las (25) para un conjunto muy especial de condiciones iniciales: *i.e.* fases tales que $H = 0$. Para las trayectorias en esta hipersuperficie, las fases α_j de los Z_j no cambian y pueden ser factorizados del problema.*

Vamos ahora a utilizar el teorema de Noether, con la simetría de cambio de fases, aparente en (24) y (26), es decir, para la transformación $Z_j \to \exp(i\varepsilon_j)Z_j$, donde las ε_j son tres constantes arbitrarias que satisfacen $\varepsilon_j + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ (hay claramente dos casos independientes de esta condición). La transformación infinitesimal corresponde a $\delta Z_j = i\varepsilon_j Z_j$, y es generada por la integral de movimiento $M \propto \varepsilon_1 Z_1 Z_1^*/\sigma_1 + \varepsilon_2 Z_2 Z_2^*/\sigma_2 + \varepsilon_3 Z_3 Z_3^*/\sigma_3$. Por ejemplo, si $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \propto (0, 1, -1)$ o $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \propto (-1, 0, 1)$, M corresponde a las integrales I_1, o I_2 de (15). En la Ref. [10] se demuestra que para el caso de una triada resonante es $\sigma_j \propto \omega_j$; por lo tanto utilizando $\varepsilon_j \propto \omega_j$ y $\varepsilon_j \propto k_j$ se obtiene conservación de la energía $E := Z_1 Z_1^* + Z_2 Z_2^* + Z_3 Z_3^*$ (que no es igual al hamiltoniano) y del pseudomomento $P := k_1 Z_1 Z_1^*/\omega_1 + k_2 Z_2 Z_2^*/\omega_2 + k_3 Z_3 Z_3^*/\omega_3$, respectivamente (véase problema 8).

Existe simetría ante $Z_j(t) \to \mu Z_j(\mu t)$, donde μ es cualquier real, pero no existe un escalar que la genere, y por lo tanto no podemos ligarla a una ley de conservación.

Para finalizar analizando este problema, veamos si podemos reducir el espacio de fases, trabajando con la "fase relativa", $\alpha := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, en vez de con las fases individuales. Las ecuaciones de evolución,

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \sigma_1 A_2 A_3 \cos(\alpha) \quad \text{y p.c.}, \\ \dot{\alpha} &= -(\sigma_1 A_1^{-1} A_2 A_3 + \text{p.c.}) \operatorname{sen}(\alpha), \end{aligned} \tag{27}$$

resultan del sistema

$$\begin{aligned} &H(A_1, A_2, A_3, \alpha) := 2A_1 A_2 A_3 \operatorname{sen}(\alpha), \\ &\boldsymbol{J} := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sigma_1/A_1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_2/A_2 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_3/A_3 \\ -\sigma_1/A_1 & -\sigma_2/A_2 & -\sigma_3/A_3 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{28}$$

*Sin embargo, las fases no son en general ignorables y juegan un papel funamental. Por ejemplo, para el caso $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 < 0$, si inicialmente es $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi/2 \pmod{\pi}$ y $\sum \sigma_j/A_j^2 = 0$, entonces son las A_j las que permanecen constantes, mientras que las α_j varían linealmente con el tiempo (véase la solución general de (23) en la Ref.[10]).

Para asegurar que sea hamiltoniano hay que demostrar la identidad de Jacobi (4b). Esto no es difícil: en primer lugar, $\boldsymbol{J}$ es función sólo de $\mathbf{A}$, no de α, por lo que en $\boldsymbol{J}^{is}\partial_s\boldsymbol{J}^{jk}$, s sólo puede tomar los valores (1,2,3) e i tiene que ser igual a 4. Pero entonces (j,k) tienen que ser iguales a (3,2), (3,1) o (2,1) y todos éstos $\boldsymbol{J}^{jk}$ son idénticamente nulos.

Este nuevo sistema, ¿es simpléctico o singular? El determinante de $\boldsymbol{J}$ y de cualquier submatriz de ella de 3×3 es nulo: el problema es entonces *singular* y debe haber *dos* casimires. Para encontrar a éstos resolvemos $\boldsymbol{J}\nabla C = 0$, que se reduce a $\partial C/\partial\alpha = 0$ y $\sum(\sigma_j/A_j)(\partial C/\partial A_j) = 0$, que tiene como dos soluciones independientes a I_1 e I_2 de (15); si $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3 = 0$ otras dos soluciones independientes son E y P (véase problema 8).

En suma, (24) y (26) son dos versiones del mismo problema simpléctico (no-singular) de seis variables, ligadas a uno canónico; el problema tiene tres integrales de movimiento, digamos, H, I_1 e I_2. En (28) el sistema es reducido a uno singular, de cuatro variables, para el que I_1 e I_2 son casimires, es decir, son integrales de movimiento que no corresponden a ninguna simetría explícita del nuevo problema. Finalmente este último sistema se reduce al (14) para un conjunto de condiciones iniciales muy especiales: $\alpha = 0$ (mod π); este último sistema (como todos los de tres variables) es singular y bi-hamiltoniano, donde, por ejemplo, I_1 y I_2 operan como hamiltoniano y casimir, o viceversa, eligiendo convenientemente el tensor de Poisson, tal y como se expresa en (11) y (12).

Un último ejemplo

Para finalizar, consideremos el caso de una partícula puntual moviéndose, bajo la acción de un potencial φ, sobre la superficie de la Tierra. Para simplificar, vamos a considerar el movimiento en un plano perpendicular a la vertical de un cierto punto, con coordenadas cartesianas x y y, hacia el Este y Norte, respectivamente. La vertical local no está dirigida exactamente hacia el centro de la Tierra, sino que tiene una ligera inclinación hacia el polo más cercano, para compensar la fuerza centrífuga; el único efecto perceptible de la rotación terrestre es entonces la *fuerza de Coriolis*. A pesar de hacer la aproximación de movimiento en un plano, incluiremos un efecto de la curvatura terrestre: la variación del parámetro de coriolis f con la latitud, para el que usaremos la forma*

$$f = f_0 + \beta y$$

(el así llamado efecto-β es incluido no por ser más importante que los efectos geométricos de la curvatura, sino por ser más interesante que éstos).

Las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, & \dot{u} &= fv - \partial_x\varphi, \\ \dot{y} &= v, & \dot{v} &= -fu - \partial_y\varphi \end{aligned}, \tag{29}$$

---

*$f_0 := 2\Omega \operatorname{sen}\theta_0$ y $\beta := 2\Omega R_\odot^{-1}\cos\theta_0$, donde Ω y $R_\odot$ son la velocidad angular y el radio terrestres, y θ_0 es la latitud correspondiente a $y = 0$.

son fácilmente derivables de

$$H(x,y,u,v) := \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{2}v^2 + \varphi(x,y), \boldsymbol{J}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & f \\ 0 & -1 & -f & 0 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Es fácil demostrar que $\det(\boldsymbol{J}_1) = 1$ y que $\boldsymbol{J}_1$ satisface la identidad de Jacobi: el único elemento del tensor de Poisson con derivada no nula es $\partial_y \boldsymbol{J}^{uv} = \beta$; por lo tanto, (4*b*) involucra permutaciones, en (u,v,k), de $\partial_y \boldsymbol{J}^{uv}\boldsymbol{J}^{yk}$, pero el único $\boldsymbol{J}^{yk}$ no nulo es el $\boldsymbol{J}^{yv}$: de acuerdo al problema 2, para dos índices repetidos (u,v,v) la identidad se satisface trivialmente. □

El generador de la traslación en $x, F(x,y,u,v,t) \to F(x,-\varepsilon,y,u,v,t)$, es el momento

$$M_x := u - f_0 y - \tfrac{1}{2}\beta y^2 \Rightarrow \{M_x, F\} = -\partial_x F;$$

luego $\dot{M}_x = -\partial_x H = -\partial_x \varphi$, es decir M_x se conserva cuando H es invariante ante esta transformación (nótese que $\boldsymbol{J}_1$ no depende de x). El generador de la transformación de Galileo $F(x,y,u,v,t) \to F(x+\varepsilon t, y, u+\varepsilon, v, t)$ es

$$G = M_x t - x \Rightarrow \{G, F\} = \partial_u F - t\partial_x F;$$

es fácil ver que $\dot{G} = f_0 y + \frac{1}{2}\beta y^2 - t\partial_x \varphi$, es decir, G se conserva (y la transformación representa una simetría) sólo cuando M_x es una integral de movimiento y no hay efectos de Coriolis ($f_0 = 0 = \beta$). De hecho, en el sistema original (29) se puede ver que para que hubiera invariancia ante esta transformación se necesitaría hacer también $\varphi \to \varphi - \varepsilon(f_0 y + \frac{1}{2}\beta y^2)$; esto se puede interpretar como un cambio de la vertical local, necesario para compensar la diferencia de fuerzas centrífugas.

Como mencionaba más arriba, no siempre es posible encontrar un generador para una determinada transformación. Por ejemplo, para $\boldsymbol{J}_1$ no existe el generador de desplazamientos infinitesimales en y, es decir, una función M_y tal que $\{M_y, F\} \equiv -\partial_y F \,\forall\, F$. Esta deficiencia es remediable [11] haciendo un cambio de variable de estado, de u a

$$\hat{u} := u - \tfrac{1}{2}\beta y^2.$$

Los nuevos elementos de la estructura hamiltoniana son

$$H(x,y,\hat{u},v) := \tfrac{1}{2}\left(\hat{u} + \tfrac{1}{2}\beta y^2\right)^2 + \tfrac{1}{2}v^2 + \varphi(x,y), \quad \boldsymbol{J}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & f_0 \\ 0 & -1 & -f_0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Este $\boldsymbol{J}$ satisface trivialmente la identidad de Jacobi, ya que es constante. En esta formulación del problema podemos definir ambas componentes del momento lineal y (la componente vertical) del momento angular, en la forma

$$M_x := \hat{u} - f_0 y,$$
$$M_y := v + f_0 x,$$
$$M_a := xv - y\hat{u} + \tfrac{1}{2} f_0 (x^2 + y^2),$$

que son los generadores de traslaciones infinitesimales (en ambas direcciones horizontales) y de rotaciones infinitesimales (alrededor de la vertical), es decir

$$\left.\begin{aligned} \{M_x, F\} &= -\partial_x F \\ \{M_y, F\} &= -\partial_y F \\ \{M_a, F\} &= y\partial_x F - x\partial_y F + v\partial_{\hat{u}} F - \hat{u}\partial_v F \end{aligned}\right\} \forall\, F(x, y, \hat{u}, v, t).$$

Nótese que si $\beta \neq 0$, $(\hat{u}, v)$ se comporta como un vector ante rotaciones, pero (u, v) no. N.B. ∂_y significa derivar dejando constantes a $(x, \hat{u}, v)$; para las variables de estado en (30), se obtiene $\{M_y, F\} = -\partial_y F - \beta \partial_u F$.

Problema 11: Calcular el paréntesis de Poisson de cada uno de los tres momentos con el hamiltoniano; ¿bajo qué condiciones se conservan? Explicar estos resultados en función de las simetrías del problema.

Finalmente, también podemos cambiar de variables, de $(\hat{u}, v)$ a (M_x, M_y); las ecuaciones de movimiento correspondientes son obtenibles de

$$H(x, y, M_x, M_y) := \tfrac{1}{2}\big(M_x + f_0 y + \tfrac{1}{2}\beta y^2\big)^2 + \tfrac{1}{2}\big(M_y - f_0 x\big)^2 + \varphi(x, y),$$
$$\boldsymbol{J}_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -f_0 \\ 0 & -1 & f_0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Nótese el cambio de signo en dos elementos de $\boldsymbol{J}_3$ respecto de $\boldsymbol{J}_2$.

Problema 12: Demostrar que el sistema (29) es derivable del principio variacional $\delta\mathcal{A} = 0$, donde

$$\mathcal{A}[\mathbf{z}] := \int_{t_0}^{t_1} A(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, t)\, dt = 0, \quad A \equiv \dot{x} M_x + \dot{y} v - \tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{2}v^2 - \varphi(x, y).$$

¿Qué simetrías son patentes en este enunciado?

Para finalizar, consideremos el caso particular $\partial_x\varphi \equiv 0$ (y por lo tanto M_x se conserva). Si se quiere, se puede eliminar a x del espacio de fases, reduciendo el sistema (30) a uno nuevo, singular, determinado por

$$H(y,u,v) := \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{2}v^2 + \varphi(y), \qquad \boldsymbol{J}_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & f \\ -1 & -f & 0 \end{pmatrix};$$

o un sistema similar, proveniente de la reducción de (31) o (32). Este sistema es obviamente singular, ya que tiene dimensión tres; ¿cuál es su casimir? De $\boldsymbol{J}_4\nabla C = 0$ se encuentra fácilmente $C = M_x$. Es más, es fácil ver que $\dot{\mathbf{z}} = \nabla M_x \times \nabla H$, de acuerdo con (11) y (12), por lo que también se puede usar a M_x como hamiltoniano y a H como el casimir.

Con este último ejemplo, he ilustrado otra vez la invariancia de la formulación co-simpléctica ante cambios de variables de estado, que la existencia de ciertos generadores depende de las variables utilizadas (*v. gr.*, u *vs.* $\hat{u}$), y otra reducción a un sistema singular bi-hamiltoniano.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue financiado por el presupuesto normal del CICESE y por el proyecto D111-903620 del CONACYT. Es un placer agradecerles a Julio Sheinbaum y José Ochoa sus correcciones y sugerencias.

GLOSARIO

Espacio de fases: Conjunto de puntos $\mathbf{z}$, cada uno de los cuales representa un posible estado del sistema. Ante cambios de coordenadas z^j, $d\mathbf{z}$ y $\nabla F(\mathbf{z})$ se comportan como vectores contra y covariantes, respectivamente.

Sistema hamiltoniano: Uno tal que la evolución $\mathbf{z}(t)$ en el espacio de fases está controlada por $\dot{\mathbf{z}} = \{\mathbf{z}, H\} \equiv \boldsymbol{J}\nabla H$, donde $H(\mathbf{z},t)$ es el (un) hamiltoniano y $\{.,.\}$ y $\boldsymbol{J}$ son el paréntesis y tensor de Poisson, respectivamente.

Función de estado: Escalar en el espacio de fases; por ejemplo, H.

"Número": Función, a lo sumo, de parámetros externos al espacio de fases, como por ejemplo el tiempo.

Casimir: Función de estado $C(\mathbf{z})$ cuyo paréntesis de Poisson con cualquier otra función de estado es nulo, $\boldsymbol{J}\nabla C \equiv 0$, definida en el caso singular, $\det(\boldsymbol{J}) = 0$.

Función distinguida: Función general de los casimires y el tiempo. Corresponde a la generalización de los "números" para el caso singular.

Generador: Función de estado, digamos M, con la que se construye la transformación infinitesimal $\delta_M(\ ) := (\nabla M)^\top \boldsymbol{J}\nabla(\ )$. Si M se conserva, entonces δ_M es una simetría (transforma soluciones en soluciones); éste es el teorema de Noether. No toda simetría tiene asociado un generador, y si éste existe puede ser conservado módulo una función distinguida.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS

1: De (2) resulta $\boldsymbol{J}_{ij}^{-1} = \partial_i \mathbf{p} \cdot \partial_j \mathbf{q} - \partial_j \mathbf{q} \cdot \partial \mathbf{p}_i$. Para que exista $\boldsymbol{J}$ es necesario que la tranformación sea invertible, $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \leftrightarrow (\mathbf{z})$, es decir que existan también las funciones $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Una fórmula directa es entonces $\boldsymbol{J}^{ij} = (\partial z^i/\partial q) \cdot (\partial z^j/\partial \mathbf{p}) - (\partial z^i/\partial \mathbf{p}) \cdot (\partial z^j/\partial \mathbf{q})$.

2: $d(d-1)/2$; $d(d-1)(d-2)/6$

3: $\det(\boldsymbol{J}) = \det(\boldsymbol{J}^\top) \overset{(4a)}{=} \det(-\boldsymbol{J}) = (-1)^d \det(\boldsymbol{J}) \overset{\text{d: non}}{=} -\det(\boldsymbol{J})$, por lo tanto, $\det(\boldsymbol{J}) = 0$. Cualquier submatriz de $\boldsymbol{J}$ de dimensión impar es también singular.

4: $\{z^i, C\} = \boldsymbol{J}^{ij} \partial_j C = 0$; de donde se deduce $\partial_j C \equiv 0$ (C es un "número"), salvo que sea $\det(\boldsymbol{J}) = 0$. Cada ∇C es una combinación lineal de los autovectores de $\boldsymbol{J}$ correspondientes al autovalor cero.

5: Los elementos de $\boldsymbol{J}$ son a lo sumo función de r ($s = 1$) o v ($s = 4$). En (4b), para $(ijk) = (432)$ los únicos términos no nulos son $\boldsymbol{J}^{31} \partial_r \boldsymbol{J}^{24}$ y $\boldsymbol{J}^{24} \partial_v \boldsymbol{J}^{43}$ cuya suma da, correctamente, cero, para $(ijk) = (431)$ y (321) todos los términos son nulos: se satisface la identidad de Jacobi (ver problema 2) y el sistema es por lo tanto hamiltoniano. En segundo lugar es $\det(\boldsymbol{J}) = r^{-2}$ y por lo tanto es no-singular. Finalmente $\nabla H = (\varphi'(r), 0, u, v)^\top$, por lo tanto, $\dot{r} = u$, $\dot{\varphi} = v/r$, $\dot{u} = v^2/r - \varphi'(r)$, $\dot{v} = -uv/r$.

6: $\kappa = 1/r$.

7: $M = rv$; $\partial M/\partial t = 0$ y $\{M, H\} = v\{r, H\} + r\{v, H\} = 0$.

8: $I_1 \sigma_2 \sigma_3 = s_1 E - P$, $I_2 \sigma_3 \sigma_1 = s_2 E - P$, etc. $\dot{\mathbf{z}} = \frac{1}{2} \nabla P \times \nabla E$.

9: $\dot{x} = u$ y $\dot{u} = -\lambda u \Rightarrow x(t) = x(0) + u(0)\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda t})$ y $u(t) = u(0)e^{-\lambda t}$. $I_1 = u(0) + \lambda x(0)$, $I_2 = u(0)$.

10: $\partial_t I + \{I, H\} = \partial_t I + pe^{-\lambda t} \partial_q I = 0$, por lo tanto, $I_1 = p$ e $I_2 = q + p\lambda^{-1} e^{-\lambda t}$. Correspondientes a las transformaciones I_1: $A(q, p, t) \to A(\dot{q} - \varepsilon, p, t)$, e I_2: $A(q, p, t) \to A(q - \varepsilon \lambda^{-1} e^{-\lambda t}, p + \varepsilon, t)$. $x = q y u = pe^{-\lambda t}$.

11: $\{M_x, H\} = -\partial_x \varphi$, $\{M_y, H\} = -\partial_y \varphi - \beta y u$, $\{M_a, H\} = y \partial_x \varphi - x \partial_y \varphi + \frac{1}{2} \beta y^2 v - \beta y x u$.

12: Escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange, $\frac{\delta A}{\delta \mathbf{z}} = \frac{\partial A}{\partial \mathbf{z}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial A}{\partial \dot{\mathbf{z}}}\right) = 0$, con cada uno de los tres conjuntos diferentes de variables de estado utilizadas:

1) $\mathcal{A} = \mathcal{A}[x, y, u, v]$, $M_x = u - f_0 y - \frac{1}{2}\beta y^2$;
2) $\mathcal{A} = \mathcal{A}[x, y, \hat{u}, v]$, $M_x = \hat{u} - f_0 y$, $u = \hat{u} + \frac{1}{2}\beta y^2$;
3) $\mathcal{A} = \mathcal{A}[x, y, M_x, M_y]$, $u = M_x + f_0 y + \frac{1}{2}\beta y^2$, $v = M_y - f_0 x$.

REFERENCIAS

1. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Second Edition (1980).
2. G. Krötzsch y K.B. Wolf, "Las tres caras de Hamilton en la óptica geométrica y en la mecánica", *Rev. Mex. Fís.* **37** (1991) 136.
3. J.M. Green, "Noncanonical Hamiltonian mechanics", *AIP Proceedings* **88** (1982) 91.
4. G.F. Torres del Castillo, "Estructuras simplécticas en la física matemática", *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 301.
5. S. Hojman y L.C. Shepley, "Lagrangianos equivalentes", *Rev. Mex. Fís.* **28** (1982) 149.
6. R.G. Littlejohn, "Singular Poisson tensors", *AIP Proceedings* **88** (1982) 47.
7. R. Salmon, "Hamiltonian fluid mechanics", *Ann. Rev. Fluid Mech.* **20** (1988) 225.
8. T.G. Shepherd, "Symmetries, conservation laws, and hamiltonian structure in geophysical fluid dynamics", *Adv. Geophys.* **32** (1990) 287.
9. P.J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer Verlag, Berlin (1986).
10. P. Ripa, "On the theory of wave-wave interactions among geophysical waves", *J. Fluid Mech.* **103** (1981) 87.
11. P. Ripa, "A tale of three theorems", *Rev. Mex. Fís.* **38** (1992) 229.