

Optica cuántica de los estados comprimidos

JOEL OCTAVIO CORTÉS TAMAYO

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Instituto Politécnico Nacional

Edificio 9, Unidad Profesional Zacatenco, 07738 México, D.F., México

Recibido el 2 de julio de 1992; aceptado el 24 de septiembre de 1992

RESUMEN. Se presentan los antecedentes para el desarrollo conceptual de los estados comprimidos del campo de radiación. Se definen los estados comprimidos mediante transformaciones canónicas de los operadores de creación y aniquilación. Se discute la fotoestadística, la función de correlación de segundo orden en el experimento de Hanbury Brown-Twiss, la relación de incertidumbre de Heisenberg y su representación en el espacio fase.

ABSTRACT. The antecedents in order to the conceptual development for squeezed states of the radiation field are presented. Squeezed states are defined through canonical transformations of creation and annihilation operators. It is discussed the photon statistics; the second order correlation function in the Hanbury Brown-Twiss experiment; The Heisenberg uncertainty relation and its phase space representation.

PACS: 42.50.-p; 03.70.+k; 42.10.Mg

1. INTRODUCCIÓN

Existe una gran variedad de representaciones para los estados cuánticos que minimizan la relación de incertidumbre de Heisenberg, se les conoce como estados de mínima incertidumbre o estados coherentes generalizados [1], todos ellos forman las llamadas clases equivalentes de estados de mínima incertidumbre [2] y se relacionan mediante transformaciones canónicas unitarias, cada una con rasgos específicos que facilitan la solución de problemas físicos concretos. Como ejemplo tenemos en óptica cuántica los estados coherentes de Glauber [3], dentro del grupo de Heisenberg-Weyl, los cuales a la vez que minimizan la relación de incertidumbre de Heisenberg mantienen una dispersión equitativamente distribuida en sus componentes adimensionales en cuadratura $\langle(\Delta\mathbf{X}_1)^2\rangle^{1/2} = \langle(\Delta\mathbf{X}_2)^2\rangle^{1/2}$. Aún más, existe una generalización de dichos estados que se conoce como estados coherentes comprimidos [4]; su diferencia esencial con los estados coherentes de Glauber es que sus fluctuaciones cuánticas están redistribuidas en forma diferente en ambas cuadraturas, *i.e.*, $\langle(\Delta\mathbf{X}_1)^2\rangle^{1/2} < \langle(\Delta\mathbf{X}_2)^2\rangle^{1/2}$. Los estados coherentes comprimidos del campo de radiación serán el objeto de estudio de este artículo. En la Sec. 2 ofrecemos un breve antecedente sobre sus orígenes. En la Sec. 3 abordaremos la teoría de cuasiprobabilidades, lo cual nos permitirá entender el carácter definitivamente no clásico de la fotoestadística que involucran los nuevos estados. En la Sec. 4 se obtienen los estados comprimidos y se estudia su fotoestadística y su agrupamiento y desagrupamiento de fotones. En la Sec. 5 se deriva la función de onda, se demuestra que los estados comprimidos son estados de mínima incertidumbre temporalmente sólo en forma periódica y se obtiene su función

de distribución en el espacio fase. Por último, en la Sec. 6 analizamos las relaciones de incertidumbre de Heisenberg y su representación en el espacio fase.

2. ANTECEDENTES

En 1963 Glauber encontró estados cuánticos que describen cercanamente a los haces de luz láser [3]; se conocen como estados coherentes y minimizan la relación de incertidumbre de Heisenberg

$$\langle(\Delta\mathbf{Q})^2\rangle^{1/2}\langle(\Delta\mathbf{P})^2\rangle^{1/2} = \hbar/2, \quad (1)$$

además, las incertidumbres en sus correspondientes operadores adimensionales en cuadratura, $\mathbf{X}_1 = (\omega/2\hbar)^{1/2}\mathbf{Q}$ y $\mathbf{X}_2 = (2\hbar\omega)^{-1/2}\mathbf{P}$, son iguales:

$$\langle(\Delta\mathbf{X}_1)^2\rangle^{1/2} = \langle(\Delta\mathbf{X}_2)^2\rangle^{1/2} = 1/2. \quad (2)$$

Esto conduce a una función de onda gaussiana desplazada del origen en una cantidad $\langle\mathbf{Q}\rangle$, con una anchura igual a la del estado base del oscilador armónico $(\hbar/2\omega)^{1/2}$. En relación a esto, los sistemas de comunicaciones ópticos presentan un problema significativo de ruido cuando se emplean haces de luz láser a frecuencias del orden de $\omega/2\pi \geq 10^{12}$ Hz; en dichos sistemas debido a las fluctuaciones de la luz se genera un ruido en forma de temperatura de aproximadamente 3400° K, correspondiente a $\hbar\omega/2$, para la frecuencia del láser YA1G. Estudiando este tipo de sistemas H.P. Yuen en 1975 [4] predijo notables avances al analizar la posibilidad de generar estados de mínima incertidumbre [Ec. (1)] tales que

$$\langle(\Delta\mathbf{X}_1)^2\rangle^{1/2} < 1/2. \quad (3)$$

Aunque el interés resurge de un problema actual, la idea es antigua, como veremos enseguida.

Los estados comprimidos se introducen por primera vez en 1927 como “paquetes de Kennard” para electrones [5]. D.S. Saxon calcula su evolución temporal en 1964 [6]. Luego, en 1965, viene lo que se considera el primer redescubrimiento moderno, se realiza en el estudio de amplificadores paramétricos en la teoría de comunicaciones usando el formalismo de la función de onda [7]. En el período 1970-74, usando operadores se hace el primer estudio sistemático de los paquetes generales de mínima incertidumbre en óptica cuántica [8]. Posteriormente, en 1976, se investiga la generación de los estados coherentes de dos fotones a partir de hamiltonianos cuadráticos generales [4]. Finalmente (1979), es en el estudio sobre límites cuánticos en detectores de ondas gravitacionales que se inventa el término “estados comprimidos”, para radiación gravitacional [9]. Desde entonces, en varias ramas de la física se les ha empleado con diversos nombres: “estados pulsantes” para el oscilador armónico [10]; “estados coherentes correlacionados” en el estudio de la relación de incertidumbre generalizada [11]; “nuevos estados coherentes” para sistemas dependientes del tiempo [12]; “estados enroscados” en el límite cuántico para monitorear

posiciones independientes de la masa [13]. Sin embargo, no es sino hasta 1985 en que se lleva a cabo la primera realización experimental usando el método de mezcla de cuatro ondas en átomos de sodio [14], se reduce el ruido de 7 a 10%. En 1986 se logra la generación de estados comprimidos en fibras ópticas mediante mezcla de cuatro ondas [15], se reduce el ruido en un 12%; ese mismo año, mediante conversión paramétrica se obtienen estados comprimidos con una reducción de ruido del 63% [16].

También sus aplicaciones se han extendido de la teoría de comunicaciones y detección de ondas gravitacionales a investigación en geofísica, como propagación de luz en guías de onda, ondas acústicas en sólidos y líquidos y ondas de choque sísmicas en guías de onda; en conjugación de fase; detección de desagrupamiento de fotones en óptica cuántica; física nuclear y teoría cuántica de campos; procesamiento de información óptica; interferometría y giróscopos ópticos.

3. DISTRIBUCIONES DE CUASIPROBABILIDAD CUÁNTICAS

El método de las ecuaciones maestras estocásticas ha sido un medio eficaz en el estudio de disipación en sistemas cuánticos, especialmente en la teoría de reacciones químicas [17-23] y óptica cuántica [17,24-26]. En su desarrollo se combinó la P -representación de Glauber-Sudarshan [3,27,28] para obtener ecuaciones tipo Fokker-Planck que facilitaron la solución analítica de problemas estadísticos en láseres [29-32]. Como resultado, las ecuaciones Fokker-Planck que aparecen no siempre tienen coeficientes de difusión positivos definidos y en muchas ocasiones se argumentó, en contra de la dudosa existencia y significado de sus soluciones, que los términos no positivos definidos eran despreciables. Luego se abordó el problema considerando esos coeficientes de difusión no positivos definidos en un dominio de integración extendido en el plano complejo, sin justificación rigurosa pero con resultados correctos. La idea de cuasiprobabilidad viene de que la función P no es medible experimentalmente, no es una densidad de probabilidad excepto en el límite clásico, por ello se le denominó como densidad de cuasiprobabilidad. Los métodos de cuasiprobabilidad (P -representaciones generalizadas, Q -representación y función de Wigner) se desarrollaron, dejando atrás a las ecuaciones maestras estocásticas, evitando algunos problemas de la P -representación de Glauber-Sudarshan ante la existencia de campos de estadística de fotones no clásica observados, por ejemplo, en fluorescencia atómica, y proporcionando un método poderoso para el cálculo de las observables físicas, las cuales se obtienen de los momentos multinomiales y correlaciones de (a, a^+) . En esta sección presentaremos las distribuciones de cuasiprobabilidad más usuales en el contexto de la óptica cuántica [3,20,27,28,33-35].

El momento l -ésimo de un operador \mathbf{O} que representa una variable física se calcula mediante

$$\langle \mathbf{O}^l \rangle = \text{tr}[\rho \mathbf{O}^l]. \quad (4)$$

No obstante, es algunas veces más sencillo evaluar el promedio

$$C_0(\xi, t) = \langle \exp[i\xi \mathbf{O}] \rangle = \text{tr}[\rho \exp[i\xi \mathbf{O}]], \quad (5)$$

en donde ξ es un parámetro real usado para determinar los momentos en forma directa, y luego derivar respecto a $i\xi$ de manera que

$$\langle \mathbf{O}^l \rangle = \left(\frac{d}{d(i\xi)} \right)^l C_0(\xi, t) \Big|_{\xi=0}; \quad (6)$$

esto le ha valido a $C_0(\xi, t)$ el título de función generadora de momentos o función característica. Para osciladores armónicos se han desarrollado funciones características que se emplean en el cálculo de diversos tipos de momentos que aparecen en ciertas situaciones físicas, ellas son las funciones características normal, antinormal y de Wigner

$$C^{(n)}(\xi, t) = \langle \exp[i\eta\xi^* a^+] \exp[i\eta\xi a] \rangle = \text{tr}[\rho \exp[i\eta\xi^* a^+] \exp[i\eta\xi a]], \quad (7)$$

$$C^{(a)}(\xi, t) = \langle \exp[i\eta\xi a] \exp[i\eta\xi^* a^+] \rangle = \text{tr}[\rho \exp[i\eta\xi a] \exp[i\eta\xi^* a^+]], \quad (8)$$

$$C^{(W)}(\xi, t) = \langle \exp[i\eta(\xi a + \xi^* a^+)] \rangle = \text{tr}[\rho \exp[i\eta(\xi a + \xi^* a^+)]]. \quad (9)$$

Obsérvese que $C^{(n)}(0, t) = C^{(a)}(0, t) = C^{(W)}(0, t) = 1$. $C^{(n)}(\xi, t)$ se utiliza para evaluar los momentos de (a, a^+) en orden normal, es decir, todos los operadores de creación a la izquierda y los de aniquilación a la derecha. $C^{(a)}(\xi, t)$ se utiliza para evaluar los momentos en orden antinormal; todos los operadores de aniquilación a la izquierda y los de creación a la derecha. $C^{(W)}(\xi, t)$ es mejor para los momentos simétricos:

$$\langle a^{+l} a^m \rangle = \left(\frac{\partial^{l+m}}{\partial(i\eta\xi^*)^l \partial(i\eta\xi)^m} \right) C^{(n)}(\xi, t) \Big|_{\eta=0} = \text{tr}[\rho a^{+l} a^m], \quad (10)$$

$$\langle a^l a^{+m} \rangle = \left(\frac{\partial^{l+m}}{\partial(i\eta\xi)^l \partial(i\eta\xi^*)^m} \right) C^{(a)}(\xi, t) \Big|_{\eta=0} = \text{tr}[\rho a^l a^{+m}], \quad (11)$$

$$\langle \xi a + \xi^* a^+ \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial(i\eta)} \right)^l C^{(W)}(\xi, t) \Big|_{\eta=0} = \text{tr}[\rho(\xi a + \xi^* a^+)^l]. \quad (12)$$

Usando el teorema de Baker-Hausdorff

$$\exp[\mathbf{A} + \mathbf{B}] = \exp[[\mathbf{A}, \mathbf{B}]/2] \exp[\mathbf{B}] \exp[\mathbf{A}], \quad (13)$$

con $[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = [\mathbf{B}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = 0$, se encuentra la relación que existe entre las funciones características

$$C^{(W)}(\xi, t) = \exp[-\eta^2 |\xi|^2] C^{(n)}(\xi, t) = \exp[\eta^2 |\xi|^2 / 2] C^{(a)}(\xi, t), \quad (14)$$

de manera que, conociendo una de las tres funciones características podemos conocer las demás. A partir de la función generadora también podemos encontrar el operador de densidad para un solo modo del campo. De acuerdo con el teorema

$$\text{tr}[\rho \mathbf{f}] = \text{tr}[\rho^{(a)} \mathbf{f}^{(n)}] = \int \rho_0^{(a)}(\alpha, \alpha^*) f^{(n)}(\alpha, \alpha^*) d^2 \alpha / \pi, \quad (15)$$

$$= \text{tr}[\rho^{(n)} \mathbf{f}^{(a)}] = \int \rho_0^{(n)}(\alpha, \alpha^*) f^{(a)}(\alpha, \alpha^*) d^2 \alpha / \pi, \quad (16)$$

en donde las f y ρ_0 representan funciones ordinarias de una variable compleja α , por lo tanto

$$C^{(n)}(\xi, t) = \int \rho_0^{(a)}(\alpha, t) \exp[i\eta(\xi^* \alpha^* + \xi \alpha)] d^2 \alpha / \pi, \quad (17)$$

$$C^{(a)}(\xi, t) = \int \rho_0^{(n)}(\alpha, t) \exp[i\eta(\xi^* \alpha^* + \xi \alpha)] d^2 \alpha / \pi, \quad (18)$$

$$C^{(W)}(\xi, t) = \int \rho_0(\alpha, t) \exp[i\eta(\xi^* \alpha^* + \xi \alpha)] d^2 \alpha / \pi, \quad (19)$$

son transformadas inversas de Fourier, así que las distribuciones de cuasiprobabilidad P , Q y W son

$$P(\alpha) = \rho_0^{(a)}(\alpha, t) = \eta^2 \int \exp[-i\eta(\xi^* \alpha^* + \xi \alpha)] C^{(n)}(\xi, t) d^2 \xi / \pi, \quad (20)$$

$$Q(\alpha) = \rho_0^{(n)}(\alpha, t) = \eta^2 \int \exp[-i\eta(\xi^* \alpha^* + \xi \alpha)] C^{(a)}(\xi, t) d^2 \xi / \pi, \quad (21)$$

$$W(\alpha) = \rho_0(\alpha, t) = \eta^2 \int \exp[-i\eta(\xi^* \alpha^* + \xi \alpha)] C^{(W)}(\xi, t) d^2 \xi / \pi. \quad (22)$$

De acuerdo con la Ec. (14), estas distribuciones se relacionan mediante

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int \exp[-2|\alpha - \beta|^2] P(\beta) d^2 \beta, \quad (23)$$

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int \exp[-|\alpha - \beta|^2] P(\beta) d^2 \beta, \quad (24)$$

$$Q(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int \exp[-2|\alpha - \beta|^2] W(\beta) d^2 \beta. \quad (25)$$

Cuando los sistemas tienen análogo clásico la función P existe, por ejemplo: $P(\alpha)$ es una distribución gaussiana para campos de luz termales y es una distribución δ para campos

láser coherentes. Sin embargo, para campos con fotoestadística no clásica $P(\alpha)$ no existe como una función positiva bien comportada, como en problemas de óptica cuántica no lineal, para los cuales se encontraron P -representaciones generalizadas. La forma general de estas representaciones es

$$\rho = \int_D \Lambda(\alpha, \beta) P(\alpha, \beta) d\mu(\alpha, \beta), \tag{26}$$

donde D es el dominio de integración y Λ el operador de proyección

$$\Lambda(\alpha, \beta) = \langle \beta^* | \alpha \rangle^{-1} | \alpha \rangle \langle \beta^* |, \tag{27}$$

el cual es analítico en (α, β) . La forma del elemento diferencial $d\mu(\alpha, \beta)$ es lo que define las diferentes representaciones generalizadas:

- i. La representación diagonal o P -representación de Glauber-Sudarshan ocurre para

$$d\mu(\alpha, \beta) = \delta^2(\alpha - \beta^*) d^2\alpha d^2\beta. \tag{28}$$

- ii. La P -representación compleja se utiliza cuando la de Glauber-Sudarshan es singular y $P(\alpha, \beta)$ toma valores complejos, esto sucede cuando se tiene una estadística de fotones no clásica (que exhibe desagrupamiento de fotones), en este caso

$$d\mu(\alpha, \beta) = d\alpha d\beta, \tag{29}$$

las (α, β) se tratan como variables complejas a integrarse sobre contornos individuales C, C' y existe para un operador expandido en una base finita de estados de número.

- iii. La P -representación positiva se desarrolla cuando

$$d\mu(\alpha, \beta) = d^2\alpha d^2\beta, \tag{30}$$

(α, β) varía independientemente sobre toda la fase compleja. En esta representación $P(\alpha, \beta)$ siempre existe y es positivo para un operador de densidad físico, lo que le confiere todas las propiedades de una probabilidad real.

4. ESTADOS COMPRIMIDOS

Para un solo modo de radiación láser con operadores de creación a^+ y aniquilación a , es posible un procesamiento óptico no lineal de dos fotones representado por las transformaciones canónicas lineales

$$\mathbf{b} = \mu a + \nu a^+, \quad \mathbf{b}^+ = \mu^* a^+ + \nu^* a, \tag{31}$$

con

$$|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1, \tag{32}$$

las cuales producen un nuevo modo de radiación y dejan invariante al conmutador

$$[a, a^+] = [\mathbf{b}, \mathbf{b}^+] = 1; \quad (33)$$

\mathbf{b}^+ es el traspuesto conjugado de \mathbf{b} . Dichas transformaciones también pueden representarse como transformaciones unitarias

$$\mathbf{b} = \mathbf{U}(\zeta)a\mathbf{U}^+(\zeta), \quad \mathbf{b}^+ = \mathbf{U}(\zeta)a^+\mathbf{U}^+(\zeta) \quad (34)$$

con

$$\mathbf{U}^+(\zeta)\mathbf{U}(\zeta) = 1; \quad (35)$$

lo cual conserva las propiedades matemáticas de (a, a^+) sobre las transformaciones $(\mathbf{b}, \mathbf{b}^+)$; a $\mathbf{U}(\zeta)$ se le conoce como operador de compresión y está dado por

$$\mathbf{U}(\zeta) = \exp[(\zeta^*a^2 - \zeta a^{+2})/2], \quad (36)$$

ζ es el parámetro complejo de compresión

$$\zeta = r \exp[i\phi], \quad (37)$$

r y ϕ son el parámetro de compresión y el tiempo inicial en que comienza el proceso, respectivamente. Se definen las transformaciones

$$r = \ln[s] \quad (0 \leq r \leq \infty), \quad (38)$$

$$\phi = 2\omega t_0 \quad (0 \leq \phi \leq 2\pi), \quad (39)$$

las cuales son la conexión entre el formalismo de operadores (r, ϕ) y el de Schrödinger (s, t_0) [36].

Desarrollando las Ecs. (34) con la Ec. (36) y su traspuesta conjugada de acuerdo al teorema

$$\begin{aligned} \exp[k\mathbf{A}]\mathbf{B} \exp[-k\mathbf{A}] &= \mathbf{B} + k[\mathbf{A}, \mathbf{B}] + [\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]](k^2/2) \\ &+ [\mathbf{A}, [\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]]](k^3/3!) + \dots \end{aligned} \quad (40)$$

para dos operadores que no conmutan $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \neq 0$, y considerando también que

$$[a, a^{+n}] = na^{+(n-1)} \quad \text{y} \quad [a^n, a^+] = na^{(n-1)}, \quad (41)$$

obtenemos una serie para \mathbf{b} :

$$\begin{aligned} \mathbf{b} = \mathbf{U}(\zeta)a\mathbf{U}^+(\zeta) &= a \left(1 + \frac{|\zeta|^2}{2} + \frac{|\zeta|^4}{4!} + \dots \right) \\ &+ a^+\zeta \left(1 + \frac{|\zeta|^2}{3!} + \frac{|\zeta|^4}{5!} + \dots \right), \end{aligned} \quad (42)$$

y otra similar para \mathbf{b}^+ sólo que traspuesta conjugada a la anterior. De acuerdo a la Ec. (37) esto corresponde a

$$\mathbf{b} = \mathbf{U}(\zeta)a\mathbf{U}^+(\zeta) = a \cosh(r) + a^+ \exp[i\phi] \sinh(r), \quad (43)$$

$$\mathbf{b}^+ = \mathbf{U}(\zeta)a^+\mathbf{U}^+(\zeta) = a^+ \cosh(r) + a \exp[-i\phi] \sinh(r). \quad (44)$$

Comparando términos con las Ecs. (31) se obtiene

$$\mu = \cosh(r), \quad \nu = \exp[i\phi] \sinh(r), \quad (45)$$

lo cual satisface la condición de la Ec. (32).

Una versión de las ecuaciones de transformación (31) con la Ec. (32) se introdujo inicialmente para estudiar sólidos magnéticos en 1940 [37], allí se les conoció como "transformación de Holstein-Primakoff". Posteriormente, en 1947, dichas ecuaciones se usaron para discutir superfluidez y superconductividad [38], en ese contexto se les llamó "transformación de Bogoliubov". En cualquier caso, esas ecuaciones de transformación cumplen la condición de compresión, Ec. (3).

Debido a que estos nuevos operadores (\mathbf{b}, \mathbf{b}^+) satisfacen las mismas propiedades matemáticas que (a, a^+) , el análogo de la definición de estados coherentes en el oscilador armónico define a los estados coherentes comprimidos en dos formas diferentes, pero equivalentes, éstas son

$$\mathbf{b}|\alpha, \zeta\rangle = \beta|\alpha, \zeta\rangle, \quad \langle\alpha, \zeta|\mathbf{b}^+ = \langle\alpha, \zeta|\beta^*, \quad (46)$$

con

$$|\alpha, \zeta\rangle = \mathbf{D}(\alpha)\mathbf{U}(\zeta)|0\rangle. \quad (47)$$

Y también

$$\mathbf{b}|\zeta, \beta\rangle = \alpha|\zeta, \beta\rangle, \quad \langle\zeta, \beta|\mathbf{b}^+ = \langle\zeta, \beta|\alpha^* \quad (48)$$

con

$$|\zeta, \beta\rangle = \mathbf{U}(\zeta)\mathbf{D}(\beta)|0\rangle, \quad (49)$$

en donde $\mathbf{D}(\alpha)$ es el operador unitario de desplazamiento:

$$\mathbf{D}(\alpha) = \exp[\alpha a^+ - \alpha^* a]. \quad (50)$$

Ambas notaciones, Ecs. (46) y (47) y Ecs. (48) y (49) se relacionan mediante la transformación de Bogoliubov [Ecs. (31) y (32)]. Utilizando la primera definición [Ecs. (46) y (47)], la transformación de Bogoliubov y las ecuaciones

$$\mathbf{D}^{-1}(\alpha)a\mathbf{D}(\alpha) = a + \alpha, \quad \mathbf{D}^{-1}(\alpha)a^+\mathbf{D}(\alpha) = a^+ + \alpha^*, \quad (51)$$

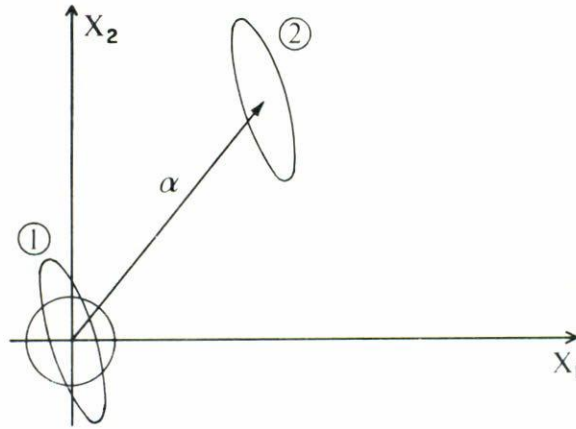


FIGURA 1. Representación geométrica en el espacio fase de la definición de estado comprimido de acuerdo al “punto de vista gravitacional”: $DS|0\rangle = |\alpha, \zeta\rangle$. El área error se comprime en la dirección de la excitación.

obtenemos que el eigenvalor de b perteneciente al estado comprimido $|\alpha, \zeta\rangle$ es, después de considerar las Ecs. (45),

$$\beta = \alpha \cosh(r) + \alpha^* \exp[i\phi] \sinh(r), \tag{52}$$

lo mismo para su complejo conjugado β^* .

La definición dada en las Ecs. (46) y (47) se conoce como “el punto de vista gravitacional”; aunque se aplica en muchos experimentos de la óptica cuántica, es la característica típica de los experimentos que se han ideado en la detección de ondas gravitacionales, que fue en donde se inventó el término de estados comprimidos: se toma una barra Weber y se realiza un experimento cuántico de medición no destructiva, comenzándose con una compresión del estado base $U|0\rangle$. El objetivo es medir la barra, cuya cantidad depende de la posición y del momentum. Llega una onda gravitatoria suficientemente clásica a lo largo de la barra y la desplaza, $DU|0\rangle$. Sin la compresión, el ruido haría imposible la medición (Fig. 1).

Por otra parte, la definición de las Ecs. (48) y (49), “el punto de vista óptico cuántico”, nos permite visualizar mejor los procesos propios en la óptica cuántica: se excita una cavidad óptica $D|0\rangle$ y mediante un proceso no lineal de dos fotones (mezcla de cuatro ondas, amplificación paramétrica, etc...) $UD|0\rangle$; la luz coherente resultante se procesa para cambiar su fotoestadística poissoniana a sub-poissoniana, con desagrupamiento de fotones y disminuyendo su nivel de ruido cuántico (conceptos que se presentan al final de esta sección) (Fig. 2).

En lo que resta del artículo utilizaremos el “punto de vista gravitacional” sólo por conveniencia algebraica, a menos que se diga lo contrario. Con lo anterior y la representación diferencial de los operadores en estados coherentes,

$$\langle \alpha | M(a^+, a) | \alpha, \zeta \rangle = M(\alpha^*, \alpha/2 + \partial/\partial \alpha^*) \langle \alpha | \alpha, \zeta \rangle, \tag{53}$$

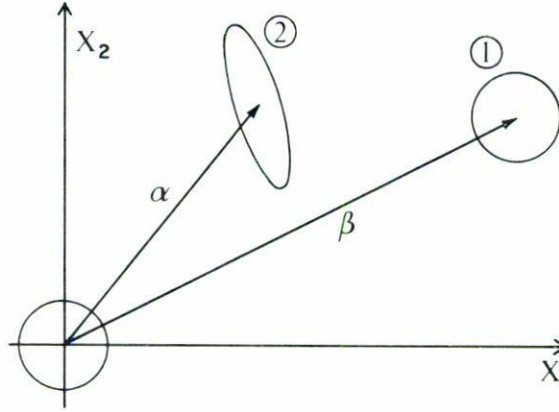


FIGURA 2. Representación geométrica en el espacio fase de la definición de estado comprimido de acuerdo al "punto de vista óptico cuántico": $\mathbf{SD}|0\rangle = |\zeta, \beta\rangle$.

podemos calcular el producto interno de un estado coherente con uno comprimido, para ello hagamos lo siguiente:

$$\langle \alpha | \mathbf{b} | \alpha, \zeta \rangle = \beta \langle \alpha | \alpha, \zeta \rangle = [\mu(\alpha/2 + \partial/\partial\alpha^*) + \nu\alpha^*] \langle \alpha | \alpha, \zeta \rangle, \quad (54)$$

con lo cual hallamos la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial\alpha^*} \langle \alpha | \alpha, \zeta \rangle = \left(\frac{\beta}{\mu} - \nu \frac{\alpha^*}{\mu} - \frac{\alpha}{2} \right) \langle \alpha | \alpha, \zeta \rangle, \quad (55)$$

cuya solución es directa:

$$\langle \alpha | \alpha, \zeta \rangle = \exp \left[\frac{\beta\alpha^*}{\mu} - \frac{\nu\alpha^{*2}}{2\mu} - \frac{|\alpha|^2}{2} + f(\beta^*, \beta) \right]. \quad (56)$$

Inversamente,

$$\langle \alpha, \zeta | \mathbf{M}(\mathbf{b}^+, \mathbf{b}) | \alpha \rangle = \mathbf{M}(\beta^*, \beta/2 + \partial/\partial\beta^*) \langle \alpha, \zeta | \alpha \rangle, \quad (57)$$

$$\langle \alpha, \zeta | \mathbf{b} | \alpha \rangle = (\beta/2 + \partial/\partial\beta^*) \langle \alpha, \zeta | \alpha \rangle; \quad (58)$$

también

$$\langle \alpha, \zeta | \mathbf{b} | \alpha \rangle = \langle \alpha, \zeta | (\mu a + \nu a^+) | \alpha \rangle = (\mu\alpha + \nu\alpha^*/2 + \nu\partial/\partial\alpha) \langle \alpha, \zeta | \alpha \rangle, \quad (59)$$

sustituyendo el complejo conjugado de la Ec. (55) en la relación anterior llegamos a la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial\beta^*} \langle \alpha, \zeta | \alpha \rangle = \left(\alpha\mu - \frac{\beta}{2} + \frac{\nu\beta^*}{\mu} - \frac{|\nu|^2\alpha}{\mu} \right) \langle \alpha, \zeta | \alpha \rangle, \quad (60)$$

de integración inmediata

$$\langle \alpha, \zeta | \alpha \rangle = \exp \left[-\frac{|\beta|^2}{2} + \alpha \mu \beta^* + \frac{\nu \beta^{*2}}{2\mu} - \frac{|\nu|^2 \alpha \beta^*}{\mu} + f(\alpha^*, \alpha) \right]. \quad (61)$$

Comparando el argumento del complejo conjugado de la ecuación anterior con el de la Ec. (56) obtenemos

$$f(\alpha^*, \alpha) = -\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{\nu \alpha^{*2}}{2\mu}, \quad (62)$$

$$f(\beta^*, \beta) = -\frac{|\beta|^2}{2} + \frac{\nu^* \beta^2}{2\mu}, \quad (63)$$

de manera que

$$\langle \alpha | \alpha, \zeta \rangle = \exp \left[-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2} - \frac{\nu \alpha^{*2}}{2\mu} + \frac{\nu^* \beta^2}{2\mu} + \frac{\beta \alpha^*}{\mu} \right], \quad (64)$$

cuya normalización,

$$\int |\langle \alpha | \alpha, \zeta \rangle|^2 d^2 \alpha / \pi = 1, \quad (65)$$

nos conduce a

$$\langle \alpha | \alpha, \zeta \rangle = \mu^{-1/2} \exp \left[-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2} - \frac{\nu \alpha^{*2}}{2\mu} + \frac{\nu^* \beta^2}{2\mu} + \frac{\alpha^* \beta}{\mu} + i\phi_0 \right]. \quad (66)$$

Cuando $\mu = 1, \nu = 0$ y tiempo inicial nulo $\phi_0 = 0$, esto se reduce al producto interno $\langle \alpha | \alpha \rangle$. El producto de la Ec. (66) con su complejo conjugado nos conduce a la función de densidad de los campos en estado comprimido en términos de estados coherentes (Fig. 3):

$$\begin{aligned} \rho = |\langle \alpha | \alpha, \zeta \rangle|^2 = \mu^{-1} \exp \left[-(|\alpha|^2 + |\beta|^2) - \frac{\nu \alpha^{*2}}{2\mu} + \frac{\nu^* \beta^2}{2\mu} \right. \\ \left. - \frac{\nu^* \alpha^2}{2\mu} + \frac{\nu \beta^{*2}}{2\mu} + \frac{\alpha^* \beta}{\mu} + \frac{\alpha \beta^*}{\mu} \right]. \end{aligned} \quad (67)$$

Para encontrar la distribución de número de fotones de un haz en estado comprimido hacemos la expansión en estados de número

$$\langle \alpha | \alpha, \zeta \rangle = \sum_k \langle \alpha | \kappa \rangle \langle \kappa | \alpha, \zeta \rangle, \quad (68)$$

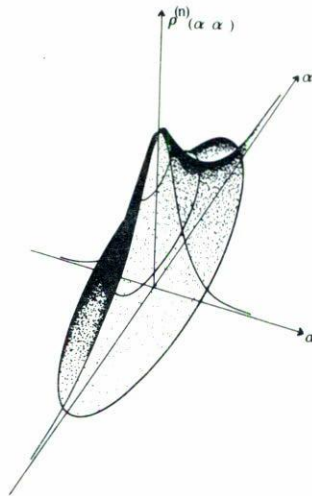


FIGURA 3. Representación de un estado comprimido por $\langle \alpha | \rho | \alpha \rangle$ con $\langle (\Delta \mathbf{X}_1)^2 \rangle^{1/2} < \langle (\Delta \mathbf{X}_2)^2 \rangle^{1/2}$; se obtiene un estado coherente si $\langle (\Delta \mathbf{X}_1)^2 \rangle^{1/2} = \langle (\Delta \mathbf{X}_2)^2 \rangle^{1/2}$. (véase la Ref. [4]).

en donde sustituimos la Ec. (66) y la distribución de número de fotones de los estados coherentes de Glauber [3]

$$\langle \alpha | \kappa \rangle = \frac{1}{\sqrt{\kappa!}} \exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right] \alpha^{*\kappa}, \tag{69}$$

la forma de la ecuación que resulta es similar a la de una función generadora, en particular, teniendo en cuenta que los campos electromagnéticos pueden visualizarse como un conjunto de osciladores armónicos independientes, suponemos que se trata de la función generadora de los polinomios de Hermite

$$\exp[-t^2 + 2tx] = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) t^n / n!, \tag{70}$$

por lo que $\langle \kappa | \alpha, \zeta \rangle$ tiene una solución del tipo

$$\langle \kappa | \alpha, \zeta \rangle = f(\alpha, \beta) (\kappa!)^{-1/2} H_\kappa(z) t^\kappa. \tag{71}$$

Sustituyendo las Ecs. (69) y (71) en la Ec. (68) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \alpha, \zeta \rangle &= f(\alpha, \beta) \exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right] \sum_k (\kappa!)^{-1} H_k(z) (t\alpha^*)^k \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right] f(\alpha, \beta) \exp[2z t \alpha^* - t^2 \alpha^{*2}], \end{aligned} \tag{72}$$

ésta al compararla con la Ec. (66) lleva a las transformaciones

$$t = \sqrt{\frac{\nu}{2\mu}}, \quad z = \beta \sqrt{\frac{1}{2\mu\nu}}, \quad (73)$$

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \exp \left[-\frac{|\beta|^2}{2} + \frac{\nu^* \beta^2}{2\mu} \right]; \quad (74)$$

por lo tanto

$$\langle \kappa | \alpha, \zeta \rangle = (\nu/2\mu)^{k/2} (\mu\kappa!)^{-1/2} H_k(\beta(2\mu\nu)^{-1/2}) \exp \left[-\frac{|\beta|^2}{2} + \frac{\nu^* \beta^2}{2\mu} \right], \quad (75)$$

con lo cual calculamos la distribución de número de fotones de un haz de luz en estado comprimido

$$P(\kappa) = |\langle \kappa | \alpha, \zeta \rangle|^2 = \left(\frac{|\nu|}{2\mu} \right)^k \frac{1}{\mu\kappa!} |H_k(\beta(2\mu\nu)^{-1/2})|^2 \exp \left[-|\beta|^2 + \frac{\nu^* \beta^2}{2\mu} + \frac{\nu \beta^{*2}}{2\mu} \right]; \quad (76)$$

en ésta, se reproduce la distribución poissoniana

$$|\langle \kappa | \alpha \rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2\kappa}}{\kappa!} \exp[-|\alpha|^2], \quad (77)$$

cuando $\mu = 1$ y $\nu = 0$. Para otros valores de r , (θ, ϕ) y $|\alpha|$ la expresión (76) exhibe una fotoestadística que se aleja de la poissoniana, es decir, su dispersión típicamente tiende a ensancharse o hacerse más angosta alrededor de la media respecto a la distribución poissoniana en lo que se denomina como distribución super- o sub-poissoniana respectivamente, como se ve en la Fig. 4. Esa tendencia se observa en la secuencia de las Figs. 5a-d; para el caso de pocos fotones coherentes ($|\alpha|^2 \ll 1$) en la Fig. 5a notamos un comportamiento termal oscilatorio de periodo dos. Al aumentar el número de dichos fotones, en las Figs. 5b, c vemos distribuciones oscilatorias (con periodos diferentes al del caso anterior) que tienden a super- o sub-poissonianas como en la Fig. 5d. En cada uno de estos casos las oscilaciones aparecen debido a compresión fuerte r , y su explicación física está en el efecto de interferencia en el espacio fase. El adelgazamiento de $P(\kappa)$ hacia una sub-poissoniana se debe a la compresión del ruido en $\langle (\Delta \mathbf{Q})^2 \rangle^{1/2}$, pero con aumentos del parámetro de compresión la distribución se ensancha y empieza a oscilar, esto ocurre en la vecindad de $\langle (\Delta \mathbf{Q})^2 \rangle^{1/2} \ll 1$. En caso de disminuir el ruido en $\langle (\Delta \mathbf{P})^2 \rangle^{1/2}$ la distribución $P(\kappa)$ se ensancha hacia una super-poissoniana y en el límite de compresión fuerte (r grande) también aparecen oscilaciones [40].

Para formarse una idea más sólida acerca de estos resultados analicemos la forma analítica que toma la razón de coincidencias de dos fotones sin retraso en el experimento de

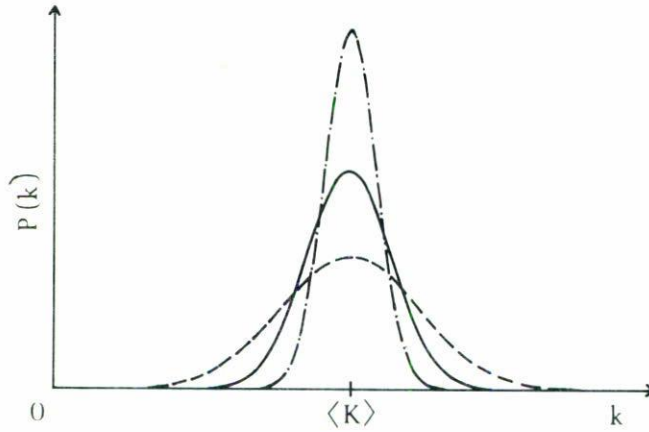


FIGURA 4. Las distribuciones de probabilidad de número de fotones tipo sub-poissoniano y super-poissoniano (curvas punteadas) respectivamente reducen o ensanchan su dispersión respecto a la poissoniana (curva continua).

Hanbury-Brown y Twiss [39]. Dicha razón la podemos determinar mediante su expresión general

$$g^{(2)}(0) - 1 = \frac{\langle (\Delta N)^2 \rangle - \langle N \rangle}{\langle N \rangle^2}, \quad (78)$$

en donde $N = a^+a$ es el operador de número de fotones y $\Delta N = N - \langle N \rangle$, su dispersión. Recordemos que para luz en estados coherentes $|\alpha\rangle$, se anula el lado derecho de la ecuación anterior, efecto Hanbury-Brown y Twiss, de allí que su dispersión sea igual a la raíz cuadrada del número medio de fotones (Fig. 4):

$$\langle (\Delta N)^2 \rangle^{1/2} = \langle N \rangle^{1/2}. \quad (\text{poissoniana}) \quad (79)$$

Sin embargo, como ya comentamos, la distribución del número de fotones en un haz de luz en estado comprimido $|\alpha, \zeta\rangle$ da lugar a otras posibilidades, por ejemplo

$$\langle (\Delta N)^2 \rangle^{1/2} > \langle N \rangle^{1/2}, \quad \langle (\Delta N)^2 \rangle^{1/2} < \langle N \rangle^{1/2}, \quad (80)$$

lo que corresponde a obtener estadísticas super- y sub-poissonianas respectivamente (véase la Fig. 4). De acuerdo con esto, la Ec. (78) implica que

$$g^{(2)}(0) - 1 > 0, \quad g^{(2)}(0) - 1 < 0. \quad (81)$$

Como vemos, un cambio de fotoestadística va acompañado por un cambio en el carácter en que ocurre la detección de dos fotones en el experimento de Hanbury-Brown y Twiss. Por una parte, cuando tenemos una estadística super-poissoniana aparece lo que se llama agrupamiento de fotones y corresponde a la primera desigualdad (81), efecto característico

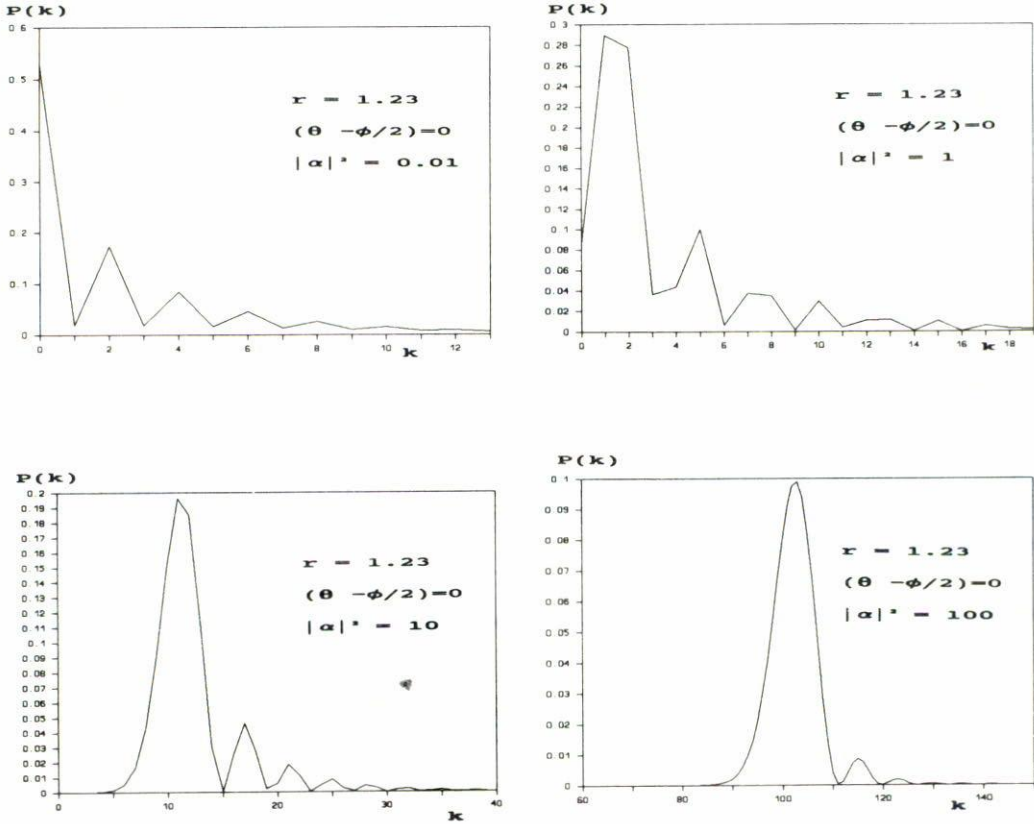


FIGURA 5. a) Distribución de probabilidad de número de fotones con $r = 1.23$, $(\theta - \phi/2) = 0$ y $|\alpha|^2 = 0.01$; se observa un comportamiento termal oscilatorio de periodo dos. b) Distribución de probabilidad de número de fotones con $r = 1.23$, $(\theta - \phi/2) = 0$ y $|\alpha|^2 = 1$; se pierde la periodicidad de las oscilaciones. c) Distribución de probabilidad de número de fotones con $r = 1.23$, $(\theta - \phi/2) = 0$ y $|\alpha|^2 = 10$; observamos una distribución super-poissoniana en donde las oscilaciones secundarias aparecen debido al efecto de interferencia en el espacio fase. d) Distribución de probabilidad de número de fotones con $r = 1.23$, $(\theta - \phi/2) = 0$ y $|\alpha|^2 = 100$; las oscilaciones secundarias tienden a extinguirse.

de los haces de luz caóticos como los termales. Por otro lado, cuando las condiciones nos dan una estadística sub-poissoniana obtenemos un efecto denominado desagrupamiento de fotones, segunda desigualdad (81), el cual ha sido observado solamente en haces de luz cuya representación cuántica no tiene análogo clásico, como es el caso de los campos de luz en estados de Fock.

Un poco de álgebra nos permitirá encontrar las relaciones entre los parámetros bajo las cuales la fotoestadística de los campos de radiación comprimidos cambia a las formas anteriormente citadas; empecemos calculando su número medio de fotones y su dispersión:

$$\langle N \rangle = |\alpha|^2 + \sinh^2(r), \tag{82}$$

$$\langle (\Delta N)^2 \rangle = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$$

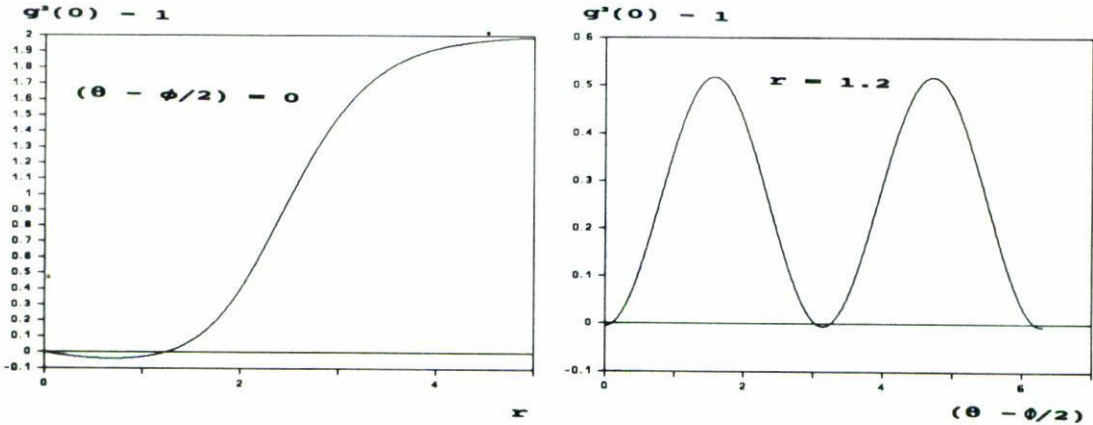


FIGURA 6. a) Gráfica típica de $g^{(2)}(0) - 1$ vs. r a fase constante $(\theta - \phi/2) = 0$. b) Gráfica típica de $g^{(2)}(0) - 1$ vs. $(\theta - \phi/2)$ a compresión constante $r = 1.2$.

$$\begin{aligned}
 &= |\alpha|^2 (\exp[-2r] \cos^2(\theta - \phi/2) \\
 &\quad + \exp[2r] \sin^2(\theta - \phi/2)) + 2 \sinh^2(r) \cosh^2(r). \quad (83)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la Ec. (78) obtenemos

$$\begin{aligned}
 g^{(2)}(0) - 1 &= \frac{1}{(|\alpha|^2 + \sinh^2(r))^2} \{ |\alpha|^2 (\exp[-2r] \cos^2(\theta - \phi/2) \\
 &\quad + \exp[2r] \sin^2(\theta - \phi/2) - 1) + \sinh^2(r) \cosh(2r) \}. \quad (84)
 \end{aligned}$$

Esta expresión es nula sólo cuando $r = 0$, esto es, cuando el campo de radiación es coherente. En la Fig. 6a vemos el comportamiento típico de $g^{(2)}(0) - 1$ respecto al parámetro de compresión a fase constante $(\theta - \phi/2) = 0$, y en la Fig. 6b vemos su comportamiento típico respecto a $(\theta - \phi/2)$ a compresión constante $r = 1.2$.

5. FUNCIÓN DE ONDA

En esta sección calculamos la función de onda en estados comprimidos y su evolución temporal; también se muestra que a partir de ella se obtiene la función de distribución en el espacio fase, la cual permite una mejor visualización del área error en dicho espacio y ofrece ciertas ventajas en óptica cuántica. De las Ecs. (46) y (31) se tiene

$$\mathbf{b}|\alpha, \zeta\rangle = (\mu a + \nu a^\dagger)|\alpha, \zeta\rangle = \beta|\alpha, \zeta\rangle. \quad (85)$$

En términos de \mathbf{Q} y \mathbf{P} para el oscilador armónico

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\mathbf{Q} + i\mathbf{P}), \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\mathbf{Q} - i\mathbf{P}), \quad (86)$$

obtenemos

$$\left\{ \mu \left[\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}\mathbf{Q} + i\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\mathbf{P} \right] + \nu \left[\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}\mathbf{Q} - i\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\mathbf{P} \right] \right\} |\alpha, \zeta\rangle = \beta|\alpha, \zeta\rangle. \quad (87)$$

Multiplicando la ecuación anterior a la izquierda por $\langle q|$, ordenando y teniendo en cuenta que $\langle q|\alpha, \zeta\rangle = \psi(q, \alpha, \zeta)$ y

$$\mathbf{P} = -i\hbar \frac{d}{dq}, \quad (88)$$

llegamos a la ecuación diferencial

$$\left\{ (\mu + \nu)\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}q + (\mu - \nu)\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\frac{d}{dq} \right\} \psi(q, \alpha, \zeta) = \beta\psi(q, \alpha, \zeta), \quad (89)$$

con solución

$$\psi(q, \alpha, \zeta) = K \exp \left[\frac{\sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}}\beta q}{(\mu - \nu)} - \frac{\omega(\mu + \nu)q^2}{2\hbar(\mu - \nu)} \right]; \quad (90)$$

normalizando

$$\psi(q, \alpha, \zeta) = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{|\mu - \nu|}} \exp \left[-\frac{4(\text{Re}(\alpha))^2}{|\mu - \nu|^2} + \sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}} \frac{\beta q}{(\mu - \nu)} - \frac{\omega(\mu + \nu)q^2}{2\hbar(\mu - \nu)} \right]. \quad (91)$$

Para encontrar su dependencia temporal hacemos la siguiente descomposición en estados de Fock:

$$\begin{aligned} \psi(q, \alpha, \zeta, t) &= \langle q| \exp[-i\mathbf{H}t/\hbar]|\alpha, \zeta\rangle \\ &= \sum \langle q| \exp[-i\mathbf{H}t/\hbar]|\kappa\rangle \langle \kappa|\alpha, \zeta\rangle \\ &= \sum \langle \kappa|\alpha, \zeta\rangle \langle q|\kappa\rangle \exp[-i(\kappa + 1/2)\omega t]. \end{aligned} \quad (92)$$

Esta ecuación nos indica una función de onda temporalmente oscilante como se aprecia en las Figs. 7 y 8. La Fig. 7 muestra una eigenfunción de onda comprimida a diferentes tiempos, con $r = 0.9624$, $|\alpha|^2 = 1.7132$ y $(\theta - \phi/2) = -\pi/2$, como se ve tiene una dispersión mínima en $q = 0$. Cambiando la fase relativa, por ejemplo para $r = 0.9624$, $|\alpha|^2 = 1.3131$

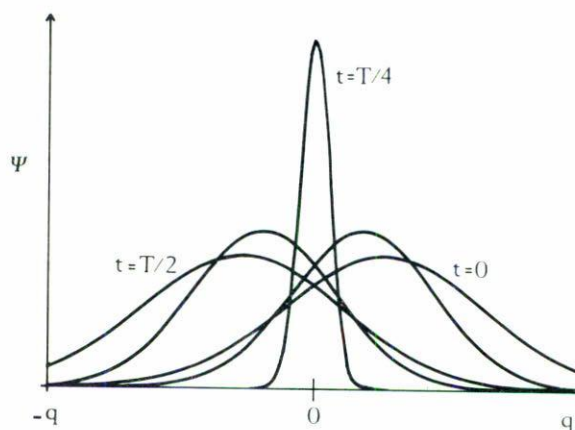


FIGURA 7. Evolución temporal de la función de onda comprimida con $r = 0.9624$, $|\alpha|^2 = 1.7132$ y $(\theta - \phi/2) = -\pi/2$. La dispersión es mínima en $q = 0$.

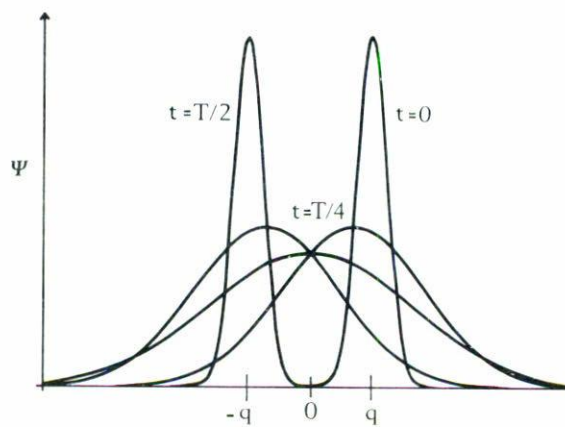


FIGURA 8. Evolución temporal de la función de onda comprimida con $r = 0.9624$, $|\alpha|^2 = 1.3131$ y $(\theta - \phi/2) = 0$. La dispersión es mínima en q y $-q$.

y $(\theta - \phi/2) = 0$, la eigenfunción de onda comprimida en la Fig. 8 exhibe una dispersión mínima oscilante en q y $-q$. Recordemos este comportamiento oscilatorio cuando en la siguiente sección calculemos la evolución temporal de la relación de incertidumbre de Heisenberg.

Además, a partir de la función de onda también podemos obtener una nueva representación cuántica, ésta es la representación de la función de distribución en el espacio fase de Wigner [41] definida por

$$W(q, p) = \frac{1}{\pi} \int \psi^*(q + y)\psi(q - y) \exp[2ipy] dy. \quad (93)$$

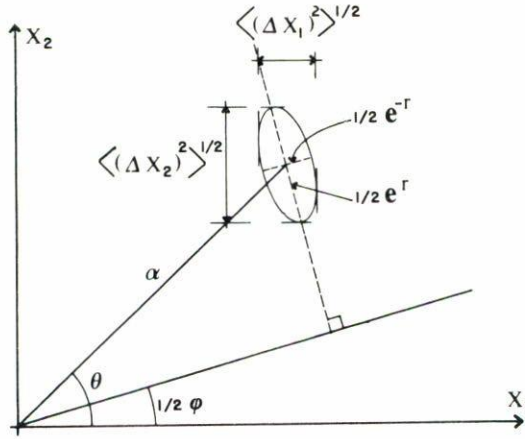


FIGURA 9. Elipse error en el espacio fase de un campo de radiación en estado comprimido con $\langle (\Delta X_1)^2 \rangle^{1/2} < \langle (\Delta X_2)^2 \rangle^{1/2}$.

Para obtener una imagen en dicho espacio deben calcularse los valores esperados de los operadores de posición y momentum, ya que el concepto de espacio fase es incompatible con el uso de operadores. Por lo tanto, en esta nueva representación las variables de posición y momentum son números reales, y la función de distribución de Wigner para estados coherentes o comprimidos es una gaussiana que depende de ellos; su forma en el espacio fase puede describirse por círculos y elipses, esto es porque debido al principio de incertidumbre de Heisenberg no es posible definir un punto en el espacio fase pero sí un elemento de área. Por otro lado, esta función de distribución no necesariamente es positiva en todo el espacio fase y permite el uso de las transformaciones canónicas, las cuales preservan la relación de incertidumbre de Heisenberg, o en otras palabras, el área error en el espacio fase. Sustituyendo la Ec. (93) en la Ec. (95) se obtiene la función de distribución en el espacio fase de Wigner para estados comprimidos:

$$\begin{aligned}
 W(\zeta, \alpha; q, p) = & \frac{1}{\pi} \exp[-((q - a) \cos(\phi/2) + (p - b) \sen(\phi/2))^2 \\
 & \times \exp[-r] - ((q - a) \sen(\phi/2) - (p - b) \cos(\phi/2))^2 \exp[r]]. \quad (94)
 \end{aligned}$$

El argumento de esta función exponencial representa la elipse error en el espacio fase centrada en (a, b) como se muestra en la Fig. 9.

6. RELACIONES DE INCERTIDUMBRE

Enseguida encontraremos las relaciones de incertidumbre de los operadores lineales asociados a las variables dinámicas canónicas conjugadas que satisfacen los estados comprimidos del campo de radiación; podremos ver que esas relaciones temporalmente alcanzan su valor mínimo sólo en forma periódica, lo que enfatiza el resultado de la sección anterior

[Ec. (92)]. Utilizando la fórmula analítica para el cálculo de la dispersión de un operador lineal \mathbf{O} asociado a una variable dinámica

$$\langle(\Delta\mathbf{O})^2\rangle^{1/2} = (\langle\mathbf{O}^2\rangle - \langle\mathbf{O}\rangle^2)^{1/2}, \quad (95)$$

las transformaciones dadas por las Ecs. (51), las transformaciones

$$\mathbf{U}^+ a \mathbf{U} = \mu a - \nu a^+ \quad \text{y} \quad \mathbf{U}^+ a^+ \mathbf{U} = \mu a^+ - \nu^* a, \quad (96)$$

obtenidas de las Ecs. (43) y (44), y los operadores \mathbf{Q} y \mathbf{P} en términos de a y a^+ , calculamos de acuerdo al punto de vista gravitacional ($|\alpha, \zeta\rangle = \mathbf{D}(\alpha)\mathbf{U}(\zeta)|0\rangle$):

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{Q}\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \langle 0 | \mathbf{U}^{-1} \mathbf{D}^{-1} (a + a^+) \mathbf{D} \mathbf{U} | 0 \rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (\alpha + \alpha^*), \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{P}\rangle &= -i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \langle 0 | \mathbf{U}^{-1} \mathbf{D}^{-1} (a - a^+) \mathbf{D} \mathbf{U} | 0 \rangle \\ &= -i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} (\alpha - \alpha^*), \end{aligned} \quad (98)$$

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{Q}^2\rangle &= \frac{\hbar}{2\omega} \langle 0 | \mathbf{U}^{-1} \mathbf{D}^{-1} (a + a^+)^2 \mathbf{D} \mathbf{U} | 0 \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2\omega} [(\alpha + \alpha^*)^2 + |\mu - \nu|^2], \end{aligned} \quad (99)$$

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{P}^2\rangle &= -\frac{\hbar\omega}{2} \langle 0 | \mathbf{U}^{-1} \mathbf{D}^{-1} (a - a^+)^2 \mathbf{D} \mathbf{U} | 0 \rangle \\ &= -\frac{\hbar\omega}{2} [(\alpha - \alpha^*) - |\mu + \nu|^2]; \end{aligned} \quad (100)$$

ecuaciones mediante las cuales encontramos la relación de incertidumbre

$$\langle(\Delta\mathbf{Q})^2\rangle = \frac{\hbar}{2\omega} |\mu - \nu|^2, \quad \langle(\Delta\mathbf{P})^2\rangle = \frac{\hbar\omega}{2} |\mu + \nu|^2, \quad (101)$$

$$\langle(\Delta\mathbf{Q})^2\rangle^{1/2} \langle(\Delta\mathbf{P})^2\rangle^{1/2} = \frac{\hbar}{2} |\mu - \nu| |\mu + \nu|. \quad (102)$$

En términos de los operadores adimensionales en cuadratura $\mathbf{X}_1 = (\omega/2\hbar)^{1/2} \mathbf{Q}$, $\mathbf{X}_2 = (2\hbar\omega)^{-1/2} \mathbf{P}$ y de las Ecs. (45), las Ecs. (101) y (102) pueden reescribirse como

$$\langle(\Delta\mathbf{X}_1)^2\rangle = \frac{1}{4} |\mu - \nu|^2$$

$$= \frac{1}{4}(\exp[2r] \operatorname{sen}^2(\phi/2) + \exp[-2r] \operatorname{cos}^2(\phi/2)), \quad (103)$$

$$\begin{aligned} \langle(\Delta \mathbf{X}_2)^2\rangle &= \frac{1}{4}|\mu + \nu|^2 \\ &= \frac{1}{4}(\exp[2r] \operatorname{cos}^2(\phi/2) + \exp[-2r] \operatorname{sen}^2(\phi/2)), \end{aligned} \quad (104)$$

$$\begin{aligned} \langle(\Delta \mathbf{X}_1)^2\rangle^{1/2} \langle(\Delta \mathbf{X}_2)^2\rangle^{1/2} &= \frac{1}{4}|\mu - \nu||\mu + \nu| \\ &= \frac{1}{4}(1 + \operatorname{sen}^2(\phi) \operatorname{senh}^2(2r))^{1/2}; \end{aligned} \quad (105)$$

vemos que los estados comprimidos son estados de mínima incertidumbre cuando $\phi = m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$); además si m es par las Ecs. (103) y (104) implican que

$$\langle(\Delta \mathbf{X}_1)^2\rangle^{1/2} = \frac{1}{2}|\mu - \nu| = \frac{1}{2} \exp[-r], \quad (106)$$

$$\langle(\Delta \mathbf{X}_2)^2\rangle^{1/2} = \frac{1}{2}|\mu + \nu| = \frac{1}{2} \exp[r]; \quad (107)$$

la incertidumbre se comprime a lo largo del eje \mathbf{X}_1 , es decir $\langle(\Delta \mathbf{X}_1)^2\rangle^{1/2} < \langle(\Delta \mathbf{X}_2)^2\rangle^{1/2}$ y corresponden a los ejes menor y mayor en la elipse error de la Fig. 9. Por otra parte, si m es impar

$$\langle(\Delta \mathbf{X}_1)^2\rangle^{1/2} = \frac{1}{2}|\mu - \nu| = \frac{1}{2} \exp[r], \quad (108)$$

$$\langle(\Delta \mathbf{X}_2)^2\rangle^{1/2} = \frac{1}{2}|\mu + \nu| = \frac{1}{2} \exp[-r]; \quad (109)$$

la incertidumbre se comprime a lo largo del eje \mathbf{X}_2 , $\langle(\Delta \mathbf{X}_1)^2\rangle^{1/2} > \langle(\Delta \mathbf{X}_2)^2\rangle^{1/2}$. En ambos casos una de las incertidumbres se ensancha mientras la otra se comprime, a diferencia de los estados coherentes para los cuales las incertidumbres en ambas cuadraturas son iguales. Para encontrar la dependencia temporal de la relación de incertidumbre sustituimos $\alpha(t) = \alpha(0) \exp[-i\omega t]$, y su complejo conjugado en los cálculos anteriores, esto nos conduce a

$$\langle[\Delta \mathbf{X}_1(t)]^2\rangle = \frac{1}{4}|\mu - \nu \exp[-i2\omega t]|^2, \quad (110)$$

$$\langle[\Delta \mathbf{X}_2(t)]^2\rangle = \frac{1}{4}|\mu + \nu \exp[-i2\omega t]|^2, \quad (111)$$

$$\begin{aligned} \langle[\Delta \mathbf{X}_1(t)]^2\rangle^{1/2} \langle[\Delta \mathbf{X}_2(t)]^2\rangle^{1/2} &= \frac{1}{4}|\mu - \nu \exp[-i2\omega t]| |\mu + \nu \exp[-i2\omega t]| \\ &= \frac{1}{4}(1 + \operatorname{sen}^2(\phi - 2\omega t) \operatorname{senh}^2(2r))^{1/2}. \end{aligned} \quad (112)$$

Considerando que la incertidumbre se comprime en $\langle(\Delta \mathbf{X}_1)^2\rangle^{1/2}$ observamos que temporalmente los estados comprimidos son de mínima incertidumbre sólo en forma periódica cuando $2\omega t = 2\pi j$ ($j = 0, 1, 2, \dots$); cada medio periodo $t = jT/2$ (Fig. 8). Pero si la incertidumbre se comprime en $\langle(\Delta \mathbf{X}_2)^2\rangle^{1/2}$ la condición de mínima incertidumbre ocurre cuando $t = (2j + 1)T/4$ (Fig. 7).

También podemos calcular las incertidumbres eléctrica y magnética mediante las relaciones [39]

$$\mathbf{E} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}\{a \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t] - a^+ \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t]\}\hat{\mathbf{n}}, \quad (113)$$

$$\mathbf{H} = i\sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega V \mu_0}}\{a \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t] - a^+ \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t]\}\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{n}}, \quad (114)$$

\mathbf{k} es el vector de onda y $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unitario en el plano de polarización de \mathbf{E} ; si \mathbf{k} está en la dirección del eje x y $\hat{\mathbf{n}}$ en el eje z , entonces $\mathbf{E} = \mathbf{E}_z$ y $\mathbf{H} = -\mathbf{H}_y$, por lo tanto

$$\epsilon_0^{1/2}\langle \mathbf{E}_z \rangle = -\mu_0^{1/2}\langle \mathbf{H}_y \rangle = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2V}}\{\alpha \exp[i(kx - \omega t)] - \alpha^* \exp[-i(kx - \omega t)]\}, \quad (115)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_0\langle \mathbf{E}_z^2 \rangle &= \mu_0\langle \mathbf{H}_y^2 \rangle = -\frac{\hbar\omega}{2V}\{(\alpha^2 - \mu\nu) \exp[2i(kx - \omega t)] \\ &+ (\alpha^{*2} - \mu\nu^*) \exp[-2i(kx - \omega t)] - \mu^2 - |\nu|^2 - 2|\alpha|^2\}; \end{aligned} \quad (116)$$

entonces

$$\begin{aligned} \epsilon_0\langle (\Delta \mathbf{E}_z)^2 \rangle &= \mu_0\langle (\Delta \mathbf{H}_y)^2 \rangle = \frac{\hbar\omega}{2V}\{\mu\nu \exp[2i(kx - \omega t)] \\ &+ \mu\nu^* \exp[-2i(kx - \omega t)] + \mu^2 + |\nu|^2\} \\ &= \frac{\hbar\omega}{2V}\{\sinh(2r) \cos(\phi + 2(kx - \omega t)) + \cosh(2r)\}. \end{aligned} \quad (117)$$

Observamos, por el valor de las constantes $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ farad/m y $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ m · kg/C², que la incertidumbre $\langle (\Delta \mathbf{E}_z)^2 \rangle^{1/2}$ es mucho mayor que $\langle (\Delta \mathbf{H}_y)^2 \rangle^{1/2}$. También si en las Ecs. (115) y (117) tomamos para el campo eléctrico solamente su evolución temporal $\theta = 0$ y los valores de $\phi = m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) tales que minimizan la relación de incertidumbre [Ec. (105)], obtenemos

$$\langle \mathbf{E}_z \rangle = \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{\epsilon_0 V}}|\alpha| \sin(\omega t), \quad (118)$$

$$\langle (\Delta \mathbf{E}_z)^2 \rangle = \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}\{\cosh(2r) \pm \sinh(2r) \cos(2\omega t)\}; \quad (119)$$

el signo (+) corresponde a los valores pares de m , $\langle (\Delta \mathbf{X}_1)^2 \rangle^{1/2} < \langle (\Delta \mathbf{X}_2)^2 \rangle^{1/2}$. En este caso la Ec. (119) implica que en los puntos máximos o mínimos de $\langle \mathbf{E}_z \rangle$ ($\omega t = (2k+1)\pi/2$; $k = 0, 1, 2, \dots$) su incertidumbre es

$$\langle (\Delta \mathbf{E}_z)^2 \rangle = \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \exp[-2r], \quad (120)$$

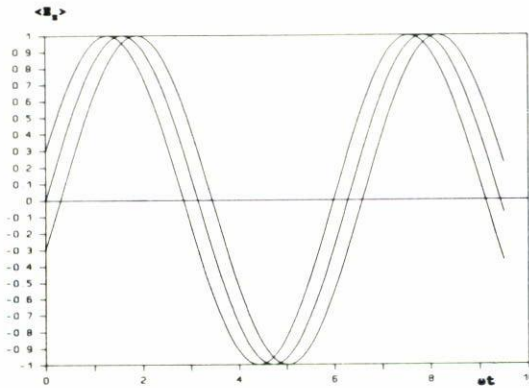


FIGURA 10A. La incertidumbre del campo eléctrico alrededor del valor medio $\langle E_z \rangle$ se comprime en los puntos extremos y se expande en los nodos cuando $\langle (\Delta X_1)^2 \rangle^{1/2} < \langle (\Delta X_2)^2 \rangle^{1/2}$.

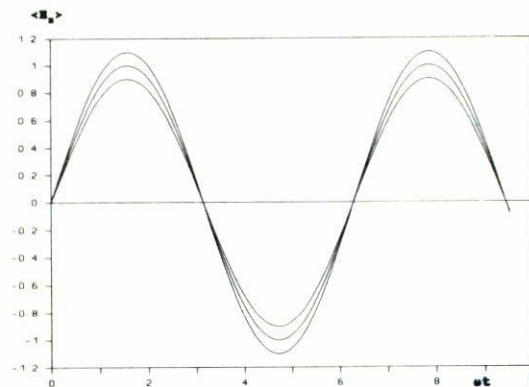


FIGURA 10B. La incertidumbre del campo eléctrico alrededor del valor medio $\langle E_z \rangle$ se comprime en los nodos y se expande en los puntos extremos cuando $\langle (\Delta X_1)^2 \rangle^{1/2} > \langle (\Delta X_2)^2 \rangle^{1/2}$.

mientras que en los nodos ($\omega t = k\pi; k = 0, 1, 2, \dots$) será mayor:

$$\langle (\Delta E_z)^2 \rangle = \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \exp[2r], \tag{121}$$

como se ilustra en la Fig. 10A. Finalmente, el signo $(-)$ de la Ec. (119) está relacionado con los valores impares de m , $\langle (\Delta X_1)^2 \rangle^{1/2} > \langle (\Delta X_2)^2 \rangle^{1/2}$, y en este caso las incertidumbres del campo en los puntos anteriormente mencionados se invierten:

$$\langle (\Delta E_z)^2 \rangle = \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \exp[2r], \tag{122}$$

(máximos/mínimos)

$$\langle(\Delta E_z)^2\rangle = \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \exp[-2r], \quad (\text{nodos}) \quad (123)$$

éste es el caso de la Fig. 10B.

REFERENCIAS

1. A.M. Perelmov, *Generalized Coherent States and Their Applications*, Springer, Heidelberg (1986).
2. D. Stoler, *Phys. Rev.* **D1** (1970) 3217; **D4** (1971) 1925.
3. R.J. Glauber, *Phys. Rev.* **131** (1963) 2766.
4. H.P. Yuen, *Phys. Lett.* **A51** (1975) 1; *Phys. Rev.* **A13** (1976) 2226.
5. E.H. Kennard, *Zeit. Phys.* **44** (1927) 326.
6. D.S. Saxon, *Elementary Quantum Mechanics*, Preliminary Edition, Holden-Day, San Francisco (1964).
7. H. Takahasi, *Ad. Comm. Syst.* **1** (1965) 227.
8. D. Stoler, *Phys. Rev.* **D1** (1970) 3217; **D4** (1974) 1925.
9. J.N. Hollenhorst, *Phys. Rev.* **D19** (1979) 1669.
10. I. Fugiwara and K. Miyoshi, *Prog. Theor. Phys.* **64** (1980) 715.
11. V.V. Dodonov, E.V. Kurmyshev and V.I. Man'ko, *Phys. Lett.* **79A** (1980) 150.
12. P.A.K. Rajogopal and J.T. Marshall, *Phys. Rev.* **A26** (1982) 2977.
13. H.P. Yuen, *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 719.
14. R.E. Slusher, L.W. Hollberg, B. Yurke, J.C. Mertz and J.F. Valley, *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 2409.
15. R.M. Shelby, M.D. Levenson, S.H. Perlmutter, R.G. Devoe and D.F. Walls, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 691.
16. L.A. Wu, H.J. Kimble, J.L. Hall and H. Wu, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 2520.
17. P.D. Drummond, C.W. Gardiner and D.F. Walls, *Phys. Rev.* **A24** (1981) 914.
18. D.A. McQuarrie, *J. Appl. Prob.* **4** (1967) 570.
19. G. Nicolis and I. Prigogine, *Proc. Natl. Acad. Sci. (U.S.A.)* **68** (1971) 2102.
20. K.J. McNeil and D.F. Walls, *J. Stat. Phys.* **10** (1974) 439.
21. I.S. Matheson, D.F. Walls and C.W. Gardiner, *J. Stat. Phys.* **12** (1975) 21.
22. M. Malek-Mansour and G. Nicolis, *J. Stat. Phys.* **13** (1975) 197.
23. C.W. Gardiner, K.J. McNeil, D.F. Walls and I.S. Matheson, *J. Stat. Phys.* **14** (1976) 307.
24. W.H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, Wiley, New York (1973).
25. M. Lax, in *Brandeis University Summer Institute Lectures*, Vol. II, edited by M. Chretien, E.P. Gross and S. Deser, Gordon and Breach, New York (1966).
26. H. Haken, *Handb. Phys.* **15**(1970) 2c.
27. R.J. Glauber, *Phys. Rev. Lett.* **10** (1963) 84.
28. E.C.G. Sudarshan, *Phys. Rev. Lett.* **10** (1963) 277.
29. W. Weidlich, H. Risken and H. Haken, *Z. Phys.* **201** (1967) 369.
30. W. Weidlich, H. Risken and H. Haken, *Z. Phys.* **204** (1967) 223.
31. M. Lax and W.H. Louisell, *IEEE J. Quantum Electron.* **3** (1967) 47.
32. W.H. Louisell and J.H. Marburger, *IEEE J. Quantum Electron.* **3** (1967) 348.
33. H.J. Carmichael and D.F. Walls, *J. Phys.* **B9** (1976) 1199.
34. E.P. Wigner, *Phys. Rev.* **40** (1932) 249.
35. P.D. Drummond and C.W. Gardiner, *J. Phys.* **A13** (1980) 2353.
36. M.M. Nieto, in *Frontiers of Nonequilibrium Statistical Physics* Vol. 135, NATO ASI Series, edited by G.T. Moore and M.O. Scully, Plenum Press, New York and London, (1986).
37. T. Holstein and H. Primakoff, *Phys. Rev.* **58** (1940) 1098.

38. N. Bogoliubov, *J. Phys. USSR* **11** (1947) 292.
39. R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*, Oxford, London (1973).
40. W. Schleich and J.A. Wheeler, *J. Opt. Soc. Am.* **B4** (1987) 1715.
41. D. Han, Y.S. Kim and M.E. Noz, *Phys. Rev.* **A40** (1989) 902; Y.S. Kim and E.P. Wigner, *Am. J. Phys.* **58** (1990) 439.