

Generación del gráfico de Smith usando elementos de la geometría moderna*

R. PANTOJA-RANGEL

*Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán
Carretera al Fresnito Km. 3 1/2
49000 Cd. Guzmán, Jal., México*

A. DUEÑAS-JIMÉNEZ

*Centro de Investigación en Ciencias Básicas, Universidad de Colima
Apartado postal 2-1694, 28000 Colima, Col., México*

S. CERVANTES-PETERSON

*Instituto Tecnológico de Monterrey, Campus Guadalajara
Av. Hidalgo 1995, 44100 Guadalajara, Jal., México*

Y

R.A. CANTORAL-URIZA

*Sección de Matemática Educativa, Departamento de Investigaciones Educativas
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Apartado postal 14-740, 07000 México, D.F., México*

Recibido el 30 de agosto de 1991; aceptado el 17 de noviembre de 1992

RESUMEN. Este artículo describe el uso de algunos elementos de la geometría moderna en el plano complejo, tales como la geometría de círculos, la geometría de inversión y la razón cruzada para obtener la transformación de Möbius que define el coeficiente de reflexión en función de la impedancia normalizada y de esta manera, a partir de estos elementos generar el gráfico de Smith.

ABSTRACT. This paper describes the use of some modern geometry elements in the complex plane, including the geometry of circles, geometry of inversion and the cross ratio, to obtain the Möbius transformation which defines the reflection coefficient as a function of the normalized impedance, and in this way, using these elements, construct the Smith chart.

PACS: 84.30.Ey

1. INTRODUCCIÓN

El diagrama o carta de Smith que fue concebido por P.H. Smith y reportado en 1939 [1] como una ayuda gráfica para solucionar problemas de impedancia relacionados con líneas de transmisión y guías de onda, ha permanecido actual como un ábaco de evaluación gráfica eficiente y directo. Su principal virtud radica en la posibilidad de obtener cualquier

*Trabajo parcialmente apoyado por DGIT-DGICSA-SESI-SEP y CONACYT.

valor de impedancia-admitancia, coeficiente de reflexión o relación de onda estacionaria, en el plano complejo $|\Gamma| \leq 1$ (elementos pasivos), dada la relación de transformación bilineal-conformal que existe entre estos tres parámetros.

En general, la construcción de esta carta se inicia con la separación de las partes real e imaginaria en la relación de transformación para obtener los círculos ortogonales que la conforman. En este trabajo se expone una visión diferente que discute su generación a partir de la ecuación general del círculo en el plano complejo, involucrando conceptos de la geometría moderna que dan una perspectiva global de las bondades de la transformación. A continuación se tratan la geometría de círculos, la geometría de inversión y la razón cruzada para fundamentar la transformación de Möbius en que se basa la construcción del ábaco de Smith.

2. GEOMETRÍA DE CÍRCULOS

La ecuación

$$az\bar{z} + bz + c\bar{z} + d = 0 \quad (1)$$

representa en el plano complejo un círculo (de radio finito, infinito y cero) si a y d son reales y b y c complejos conjugados. En función del centro α y el radio r , este círculo se expresa como

$$|z - \alpha|^2 = r^2. \quad (2)$$

Expresando (2) en función de z y \bar{z} e igualando los coeficientes de la expresión resultante con (1), se tiene que

$$b = -a\bar{\alpha}, \quad (3)$$

$$c = -a\alpha, \quad (4)$$

$$d = a(\alpha\bar{\alpha} - r^2), \quad (5)$$

donde $\bar{}$ denota el complejo conjugado.

Introduciendo el cambio de variable lineal homogéneo $z = z_1/z_2$ y haciendo uso de notación matricial, la Ec. (1) se puede escribir como

$$P^T C \bar{P} = 0, \quad (6)$$

donde T denota la transpuesta y

$$P = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

El determinante asociado a C es

$$|C| = ad - bc = -a^2 r^2. \quad (7)$$

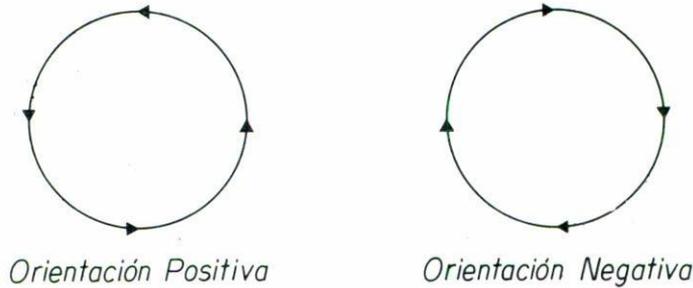


FIGURA 1. Orientación del círculo.

Dependiendo de los valores de a , r y $|C|$, el círculo puede ser real, imaginario, recta, punto o la Ec. (1) no tiene solución. En otras palabras, la Ec. (1) es:

- Un círculo real si $a \neq 0$, $r^2 > 0$ y $|C| < 0$.
- Un círculo imaginario si $a \neq 0$, $r^2 < 0$ y $|C| > 0$.
- Un punto si $a \neq 0$, $r = 0 \Rightarrow |C| = 0$.
- Una recta si $a = 0$ y $|C| < 0$.

Definiendo la orientación del círculo como positiva si $a > 0$ y negativa si $a < 0$ según se muestra en la Fig. 1, sean C_1 y C_2 dos matrices linealmente independientes, representativas de dos círculos orientados positivamente y cuyos determinantes asociados son $|C_1|$ y $|C_2|$.

C_1 y C_2 generan una familia de círculos representada por

$$C_f = n_1 C_1 + n_2 C_2, \tag{8}$$

donde n_1 y n_2 son reales y cuyo determinante asociado es

$$|C_f| = n_1^2 |C_1| + n_2^2 |C_2| + 2n_1 n_2 |C_{12}|, \tag{9}$$

para el cual

$$2|C_{12}| = a_1 d_2 + a_2 d_1 - b_1 c_2 - b_2 c_1, \tag{10}$$

donde a_1, b_1, c_1, d_1 y a_2, b_2, c_2, d_2 son los elementos de las matrices C_1 y C_2 , respectivamente.

Asimismo, sean α_1, r_1 y α_2, r_2 el centro y el radio de los círculos C_1 y C_2 , respectivamente, ϕ el ángulo que forman las tangentes en los puntos de intersección de los círculos y δ la distancia entre los centros de los círculos como se indica en la Fig. 2.

Entonces, con

$$\delta^2 = |\alpha_1 - \alpha_2|^2, \tag{11}$$

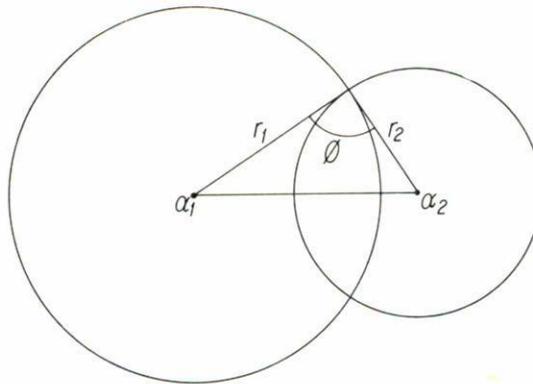


FIGURA 2. Círculos correspondientes a C_1 y C_2 .

de las Ecs. (3), (4) y (5) y de la ley de los cosenos con el coseno negativo por la orientación positiva de los círculos, la Ec. (10) en función de a_1 , a_2 y r_1 , r_2 , resulta

$$\cos \phi = -\frac{|C_{12}|}{(|C_1||C_2|)^{1/2}}. \tag{12}$$

Suponiendo que C_1 y C_2 son círculos reales, entonces $|C_1| < 0$ y $|C_2| < 0$ y el término del lado derecho de la Ec. (12) toma diferentes valores que hacen que el ángulo ϕ pueda o no existir dentro del intervalo permitido para la función coseno. Los casos posibles de como se ubican los círculos C_1 y C_2 se dan en [2].

Cuando se cumple que $-1 \leq \cos \phi \leq 1$, los círculos tienen puntos comunes de contacto y dos familias de círculos en este intervalo son las siguientes:

—Para $|\cos \phi| = 1$, los círculos son tangentes interna y externamente, dependiendo del valor de ϕ y de la distancia entre los centros α_1 y α_2 ; y puesto que se suponen reales, entonces C_{fp} es la familia de círculos reales llamada parabólica que se muestra en la Fig. 3a.

—Para $|\cos \phi| < 1$, los círculos tienen dos puntos de contacto y la forma cuadrática de la Ec. (9) es negativa dando como resultado la familia C_{fe} llamada elíptica que se muestra en la Fig. 3b.

Un caso particular de esta familia se da para $|\cos \phi| = 0$. En esta situación los círculos son ortogonales ya que $\phi = \pi/2$ y por lo tanto $|C_{12}| = 0$. Otra forma de determinar que los círculos son ortogonales es demostrar que la traza de $C_1 C_2^{-1} = 0$ donde C_2^{-1} es la inversa de C_2 [2].

Para $|\cos \phi| > 1$, se da otra familia de círculos que no se intersectan como se muestra en la Fig. 3c. Esta familia se denota por C_{fh} y es llamada hiperbólica. En este caso la forma cuadrática de la Ec. (9) es indefinida y la familia puede contener círculos reales, círculos imaginarios y dos diferentes círculos puntuales.

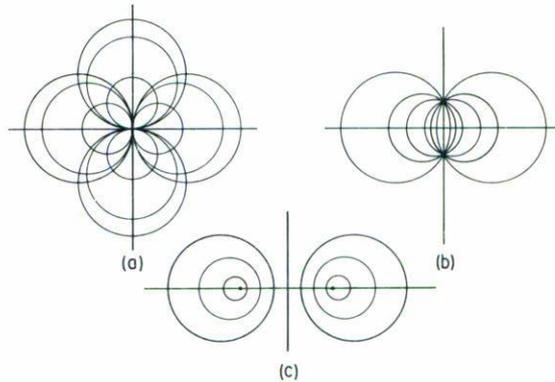


FIGURA 3. Familias de círculos. (a) Parabólica; (b) elíptica; (c) hiperbólica.

3. GEOMETRÍA DE INVERSIÓN, RAZÓN CRUZADA Y TRANSFORMACIÓN DE MÖBIUS

3.1. Geometría de inversión

La geometría de inversión [2,3], se basa en el teorema siguiente [2]:

Sea

$$C_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}$$

un círculo y z un punto que no está sobre el círculo ni coincide con su centro, entonces existe uno y sólo un punto $z^* \neq z$ tal que es común a todos los círculos que pasan por z y que son ortogonales a C_0 .

Del planteamiento de la inversión en el plano complejo, y de su demostración dada en la Ref. [2], se obtiene z^* en función de \bar{z} y de a_0, b_0, c_0 y d_0 , o en función de \bar{z} , el centro α_0 y el radio r_0 , es decir,

$$z^* = -\frac{c_0 \bar{z} + d_0}{a_0 \bar{z} + b_0}, \tag{13}$$

$$z^* = \alpha_0 + \frac{r_0^2}{\bar{z} - \bar{\alpha}_0}. \tag{14}$$

Al igual que en la geometría moderna, la inversión en el plano complejo es una transformación circular e isogonal, salvo que $\phi^* = -\phi$ (* denota el inverso).

3.2. Razón cruzada

La razón doble [2,3] en el plano real está definida por cuatro puntos alineados A, B, C y D como

$$(ABCD) = \frac{AC/AD}{BC/BD}. \tag{15}$$

En el plano complejo y de manera similar, se define la razón cruzada para cuatro puntos z_1, z_2, z_3 y z_4 (tres de los cuales son diferentes) y se representa por

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_3)/(z_1 - z_4)}{(z_2 - z_3)/(z_2 - z_4)}. \quad (16)$$

Algunas propiedades de la Ec. (15) se conservan para la Ec. (16). Entre ellas:

—La razón cruzada se mantiene constante si los puntos se rotan cíclicamente.

—Si $(z_1, z_2; z_3, z_4) = \tau$ (con τ real), entonces z_1, z_2, z_3 y z_4 son concíclicos. En particular si $\tau = -1$, la razón cruzada es una división armónica sobre un círculo ya que los puntos se hallan separados armónicamente.

Otra característica importante es que si z_k^* son los inversos de z_k ($k = 1, 2, 3, 4$), entonces

$$(z_1^*, z_2^*; z_3^*, z_4^*) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2; \bar{z}_3, \bar{z}_4). \quad (17)$$

3.3. Transformación de Möbius

La transformación de Möbius está dada por

$$w = G(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (18)$$

donde z , incluyendo el punto al infinito, pertenece al plano complejo.

La matriz asociada a esta transformación es la siguiente:

$$G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (19)$$

cuyo determinante distinto de cero es

$$\Delta = |G| = ad - bc. \quad (20)$$

La transformación de Möbius es un mapeo del plano z sobre el plano w , donde al polo $z_\infty = -d/c$ le corresponde $w = \infty$.

El conjunto de operadores de transformación o elementos de transformación, con el producto definido por

$$w = G_2[G_1(z)], \quad (21)$$

forma un grupo, donde G_2 y G_1 son dos operadores matriciales asociados a dos transformaciones.

Algunos tipos sencillos de transformaciones de Möbius son los siguientes:

—Traslación

$$w = z + b, \quad T_b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

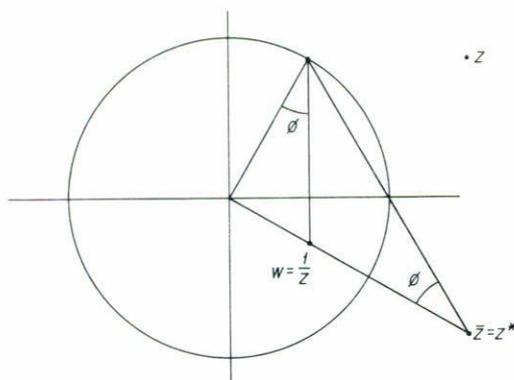


FIGURA 4. Recíproco de z .

—Rotación

$$w = \exp(j\theta)z, \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \exp(j\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

donde j es el operador imaginario.

—Dilatación (expansión o compresión)

$$w = kz, \quad k > 0, \quad D_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

—Reciprocidad

$$w = 1/z, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Estos tipos sencillos se obtienen como el producto de dos inversiones y un ejemplo de esto se muestra a continuación con la llamada recíproco de z .

Sean la recta $jz - j\bar{z} = 0$ y el círculo $z\bar{z} - 1 = 0$ los círculos de inversión C_0 y C_1 , respectivamente, según se muestra en la Fig. 4.

Respecto a C_0 el inverso es $z^* = \bar{z}$ y respecto a C_1 , $w = 1/\bar{z}^*$ por lo que $w = 1/\bar{z}^* = 1/z$. De igual manera, la transformación general de Möbius se puede expresar como

$$\begin{aligned} w &= \frac{a}{c} - \frac{\Delta}{c} \frac{1}{cz + d} \\ &= \frac{a}{c} + \left| \frac{\Delta}{c} \right| \exp(j\sigma) \frac{1}{|c| \exp(j\epsilon)z + d}. \end{aligned} \quad (26)$$

El escribir de esta manera la Ec. (18), permite determinar que toda transformación de Möbius se puede obtener como el producto de no más de siete transformaciones de los tipos sencillos, es decir,

$$G = T_{a/c} D_{|\Delta/c|} R_\sigma R T_d D_{|c|} R_\epsilon. \quad (27)$$

En particular, la transformación

$$w = \frac{z - 1}{z + 1}, \tag{28}$$

se obtiene como

$$G = T_1 D_2 R_\pi R T_1; \tag{29}$$

o bien,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-j\pi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Asimismo, cabe destacar que la transformación de Möbius es conformal (los valores verdaderos de los ángulos se preservan en la transformación) y además circular, es decir, transforma círculos reales en círculos reales y círculos imaginarios en círculos imaginarios, siendo un caso particular el de círculos de radio infinito vistos como rectas.

Por otra parte, esta transformación mantiene constante a la razón cruzada, esto es, si z_1, z_2, z_3 y z_4 pertenecen al plano z siendo tres de éstos diferentes y

$$w_1 = G(z_1), \quad w_2 = G(z_2), \quad w_3 = G(z_3), \quad w_4 = G(z_4);$$

entonces, se cumple que

$$(w_1, w_2; w_3, w_4) = (z_1, z_2; z_3, z_4). \tag{31}$$

Así pues, si se hace $z = z_1$, la razón cruzada es una representación de la transformación de Möbius que se determina solucionando para w en términos de z , esto es

$$(w, w_2; w_3, w_4) = (z, z_2; z_3, z_4), \tag{32}$$

donde los puntos fijos de la transformación se determinan por medio de la ecuación

$$z = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{33}$$

o bien,

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0. \tag{34}$$

4. ABACO DE SMITH

La carta de Smith encuentra su mayor aplicación en la electrónica de altas frecuencias (microondas), donde los parámetros de estudio más relevantes son la transmisión y la

reflexión en guías de onda y líneas de transmisión simples o como componentes estas últimas de circuitos y sistemas.

Una reflexión en una línea de transmisión puede ser descrita por una serie de parámetros relacionados entre sí y que están compuestos por las siguientes variables conocidas o medibles:

—Las partes real e imaginaria de la impedancia o admitancia normalizadas a la impedancia característica.

—El módulo y la fase del coeficiente de reflexión de voltaje.

—La relación de onda estacionaria y la posición de uno de sus mínimos.

Las ecuaciones de relación son las siguientes:

$$Z_{cgn} = \frac{Z_{cg}}{Z_c} = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}, \tag{35}$$

$$\Gamma = \frac{Z_{cgn} - 1}{Z_{cgn} + 1}, \tag{36}$$

$$ROEV = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}, \tag{37}$$

donde Z_{cgn} es la impedancia de carga Z_{cg} normalizada a la impedancia característica Z_c , Γ es el coeficiente de reflexión de voltaje en la carga y $ROEV$ es la relación de onda estacionaria de voltaje.

Cabe destacar que Γ puede ser definido en cualquier posición si se toma a la sección de línea de transmisión o guía de onda desde la carga como parte de ésta o se considera el desplazamiento o distancia desde la misma dado por $e^{-2j\beta l}$ (donde β es la constante de fase).

Asimismo, es posible la medición de la impedancia por medio de una carta de Smith transformada que relaciona a la Ec. (36) con varias lecturas de potencia [4].

La relación entre Γ y Z_{cgn} dada por la Ec. (36) es una transformación de Möbius [Ec. (28)]. Para elementos pasivos es de interés el mapeo del semiplano $jZ - j\bar{Z} \geq 0$ en el círculo unitario $|\Gamma| \leq 1$ (Fig. 5). La transformación lleva los puntos $Z_{cgn1} = 0$, $Z_{cgn2} = 1$ y $Z_{cgn3} = \infty$ a $\Gamma_1 = -1$, $\Gamma_2 = 0$ y $\Gamma_3 = 1$ respectivamente y tiene como puntos fijos a $Z_{cgn} = \pm j$.

Igualando las partes reales e imaginarias de la Ec. (36) y eliminando una a la vez las correspondientes a la impedancia (resistencia R y reactancia X también normalizadas a Z_c), se obtienen en la notación compleja de la Ec. (1), las siguientes ecuaciones:

$$\Gamma\bar{\Gamma} - \frac{R}{R+1}\Gamma - \frac{R}{R+1}\bar{\Gamma} + \frac{R-1}{R+1} = 0, \tag{38}$$

$$\Gamma\bar{\Gamma} + \frac{-X+j}{X}\Gamma + \frac{-X-j}{X}\bar{\Gamma} + 1 = 0. \tag{39}$$

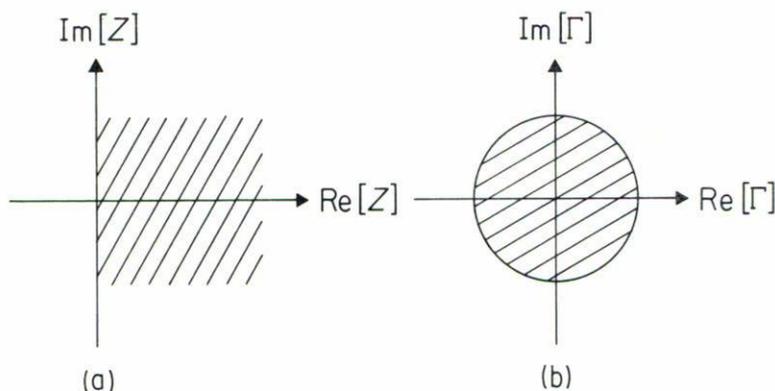


FIGURA 5. Mapeo de (a) $jZ - j\bar{Z} \geq 0$ en (b) $|\Gamma| \leq 1$.

La Ec. (38) representa un círculo cuya matriz hermitiana es

$$C_R = \begin{pmatrix} 1 & -R/(R+1) \\ -R/(R+1) & (R-1)/(R+1) \end{pmatrix}, \tag{40}$$

cuyo determinante es

$$|C_R| = \frac{R-1}{R+1} - \frac{R^2}{(R+1)^2} = \frac{-1}{(R+1)^2} < 0, \tag{41}$$

y cuyo valor indica que se trata de un círculo real.

Para determinar a qué familia de círculos pertenece, se eligen $R_1 = 0$ y $R_2 = 1$ como valores para los elementos de las matrices C_{R1} y C_{R2} , respectivamente, resultando que

$$C_{R1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $|C_{R1}| = -1$, y

$$C_{R2} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $|C_{R2}| = -1/4$.

Así, de las Ecs. (10) y (12), $\cos \phi = \pm 1$ por lo que $\phi = 0$ o $\phi = \pi$.

Ahora bien, para eliminar la ambigüedad del signo, de la Ec. (11) se obtiene la distancia entre los centros de los círculos y de su valor se determina que es el positivo el que le corresponde.

Con los datos anteriores se concluye que la familia de círculos es la parabólica y que tiene como punto común a $\Gamma = 1$. La familia se genera con C_{R1} y C_{R2} y es la transformación

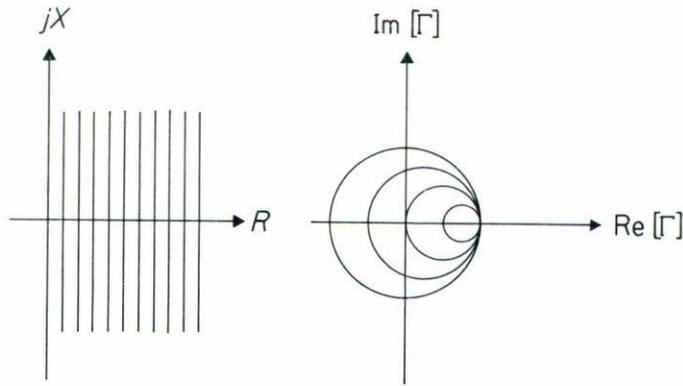


FIGURA 6. Transformación del hemiplano derecho.

del hemiplano derecho compuesto por rectas paralelas al eje imaginario, es decir $R =$ constante según se muestra en la Fig. 6.

De igual manera, la Ec. (39) representa un círculo con la siguiente matriz hermitiana:

$$C_X = \begin{pmatrix} 1 & -1 + \frac{j}{X} \\ -1 - \frac{j}{X} & 1 \end{pmatrix} \tag{42}$$

Asimismo, su determinante,

$$|C_X| = -1/X^2, \tag{43}$$

indica que se trata de un círculo real.

Escogiendo $X_1 = 1$ y $X_2 = 1/2$ para determinar la familia a la que pertenece, se tiene que

$$C_{X_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 + j \\ -1 - j & 1 \end{pmatrix}, \tag{44}$$

cuyo determinante es $|C_{X_1}| = -1$, y

$$C_{X_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 + 2j \\ -1 - 2j & 1 \end{pmatrix}, \tag{45}$$

cuyo determinante es $|C_{X_2}| = -4$.

Nuevamente, de las Ecs. (10) y (12), $\cos \phi = \pm 1$ y al igual que en el caso anterior, es el signo positivo el que le corresponde, o sea, $\phi = 0$. Por todo esto, la familia es de nuevo parabólica con el punto común $\Gamma = 1$.

Como se mencionó antes, el mapeo es sólo para elementos pasivos donde $R \geq 0$, pero X puede tener cualquier valor, por lo que:

—Si $X > 0$, la transformación se da en el hemiplano superior, compuesto por semirrectas paralelas al eje real.

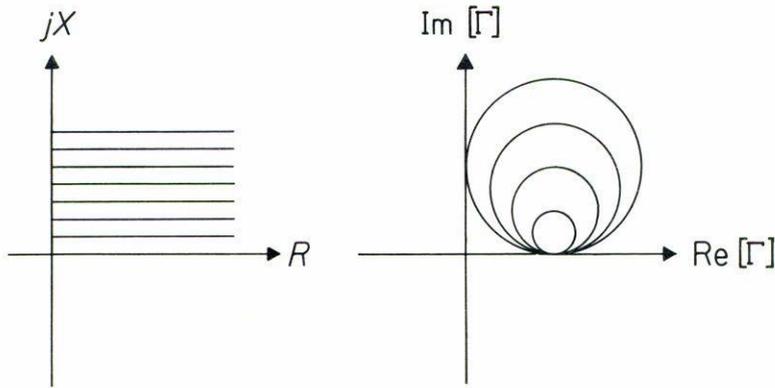


FIGURA 7. Transformación del hemiplano superior.

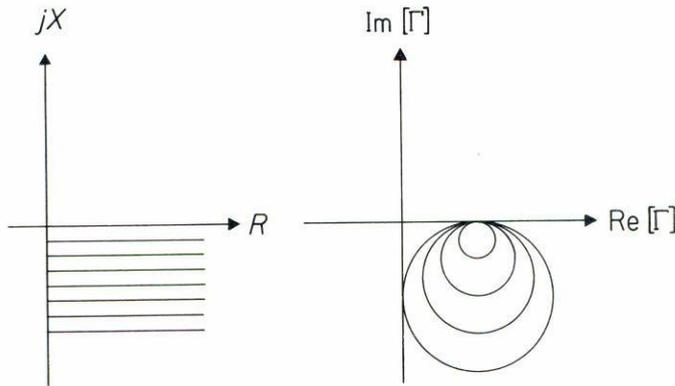


FIGURA 8. Transformación del hemiplano inferior.

—Si $X < 0$, la transformación se da en el hemiplano inferior, compuesto igualmente por semirrectas paralelas al eje real.

Para ambos casos, la familia de círculos se genera con C_{X1} y C_{X2} . Las Figs. 7 y 8 muestran la transformación en estos hemiplanos. Con la sobreposición de los tres hemiplanos (derecho, superior e inferior) se obtiene la carta de Smith según se muestra en la Fig. 9.

Finalmente, los diferentes conceptos que han sido utilizados para el desarrollo de este trabajo, se pueden englobar de manera general en temas fundamentales como la geometría moderna y la transformación conformal, los cuales sustentan la construcción del ábaco de Smith. Una serie de libros y publicaciones que tratan uno o varios de estos temas y que representan una fuente de consulta indispensable, son los de las Refs. [5] a [16].

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se han descrito los principios básicos de geometría de variable compleja necesarios para entender la generación del gráfico de Smith. Los conceptos tratados dan una perspectiva que permite ampliar la aplicación de la transformación de Möbius en el tratamiento de problemas que involucran parámetros en hiperfrecuencias, tales como la

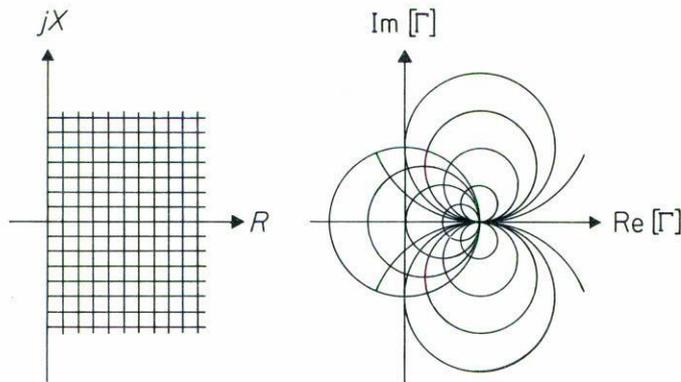


FIGURA 9. Sobreposición de los hemiplanos derecho, superior e inferior.

impedancia y la potencia. Asimismo, este trabajo, proporciona un punto de referencia para el análisis de la currícula actual en las carreras profesionales del área eléctrica y electrónica.

REFERENCIAS

1. P.H. Smith, *Electronics* **12** (1939) 29 y **17-1** (1944) 130.
2. H. Schwerdtfeger, *Geometry of Complex Numbers*, Dover Publications Inc., New York (1979).
3. R. Pantoja-Rangel, "Usos de la Variable Compleja y su Geometría en la Electrónica (Propuesta de Modificación a los Planes de Estudio en la Licenciatura en Ingeniería Electrónica)". Tesis de Maestría, Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV, IPN, México (1989).
4. L. Kaliouby, and R.G. Bosisio, *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **36** (1987) 493.
5. R. Bonola, *Non-Euclidean Geometry*, Dover Publications Inc., New York (1955).
6. H. Eves, *Estudio de las Geometrías*, Ed. UTHEA, México (1969).
7. G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, New York (1970).
8. H. S. M. Coxeter, *Fundamentos de Geometría*, Limusa Wiley, México (1971).
9. D. Pedoe, *Circles*, Dover Publications Inc., New York (1971).
10. L.V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill ISE, Japan (1979).
11. J.L. Altman, *Microwave Circuits*, D. Van Nostrand, New York (1964), Chapter 1, p. 17.
12. R.E. Collin, *Foundations for Microwave Engineering*, McGraw-Hill, New York (1966), Chapter 5, p. 203.
13. M. Soutif, *Vibrations, propagation, diffusion*, Dunod Université, Paris (1970), Chap. V, p. 130.
14. K.C. Gupta, *Microwaves*, Wiley Eastern Limited, New Delhi (1979), Chapter 2, p. 14.
15. P.F. Combes, *Transmission en espace libre et sur les lignes*, Dunod Université, Paris (1983), Chap. X, p. 151.
16. C.G. Montgomery, R.H. Dicke, and E.M. Purcel, *Principles of Microwave Circuits*, Peter Peregrinus, London (1987), Chapter 3, p. 71.