

Estudio teórico y numérico de la difracción en óptica electromagnética. I. Dominio de validez de la teoría de Rayleigh-Sommerfeld: fórmula de primera especie en campo lejano

O. MATA-MÉNDEZ Y F. CHÁVEZ-RIVAS

Departamento de Física

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Instituto Politécnico Nacional, Zacatenco 07738 México, D.F., México

Recibido el 6 de octubre de 1992; aceptado el 19 de marzo de 1993

RESUMEN. En este artículo estudiamos la difracción que produce un haz gaussiano electromagnético que incide sobre una rendija en una pantalla plana. Comparamos la teoría de la difracción de Rayleigh-Sommerfeld (TRS) con una teoría vectorial rigurosa. Nuestros resultados numéricos muestran que la TRS es capaz de proporcionar excelentes resultados en la región espectral $0.001 < \lambda/\ell < 0.2$, donde λ es la longitud de onda y ℓ es el ancho de la rendija. Además, mostramos que una teoría vectorial rigurosa de la difracción necesariamente debe ser empleada en la región vectorial $\lambda/\ell > 0.2$, si se desean resultados confiables. En lugar de comparar los patrones de difracción de las dos teorías (método local), hemos utilizado el coeficiente de transmisión como parámetro de comparación (método global). También mostramos la influencia de algunos parámetros optogeométricos en el coeficiente de transmisión.

ABSTRACT. In this paper we study the diffraction of electromagnetic Gaussian beams by a slit in a perfectly conducting screen. We have determined the validity limits of the Rayleigh-Sommerfeld diffraction theory, given by $0.001 < \lambda/\ell < 0.2$, where λ is the wavelength and ℓ is the width of the slit. This domain has been established with the analysis of the transmission coefficient (global method) instead of the analysis of the diffraction patterns. The transmission coefficient as function of some optogeometrical parameters is also presented.

PACS: 42.10.Hc

1. INTRODUCCIÓN

Desde el inicio del estudio de la difracción de la luz en el siglo pasado, la noción de una onda plana ha sido utilizada como un modelo adecuado de una onda incidente. Sin embargo, con el paso del tiempo se ha visto que los sistemas físicos han tendido a minimizarse, llevándonos a lo que actualmente conocemos como microestructuras, cuyas dimensiones pueden ser de algunas longitudes de onda del visible. Esta tendencia ha motivado la consideración de modelos más convenientes de la luz incidente, dando lugar a que se estudie extensamente la propagación y difracción de haces de ancho finito. En particular, se ha analizado la difracción de haces gaussianos para diferentes estructuras: la rendija [1, 2], redes de difracción [3], superficies rugosas [4], cilindros [5], aberturas circulares [6], planos semi-infinitos [7], acanaladuras metálicas [8], etc. La introducción de haces de

ancho finito en óptica ha conducido a nuevos e importantes efectos que son imposibles de obtener con la noción de una onda plana. Algunos de ellos son el efecto Imbert y el efecto Goos-Hänken [9].

Por otro lado, se han propuesto diversos métodos aproximados para determinar el patrón de difracción producido por una onda monocromática que incide sobre una abertura en una pantalla plana. Una revisión exhaustiva de estos métodos está dada en el ya clásico artículo de revisión de Bouwkamp [10]. De las teorías que se han propuesto, la que más ha sido utilizada por la comunidad de los ópticos es la teoría de Kirchhoff (TK). Esta teoría está basada en la fórmula integral de Helmholtz-Kirchhoff y en las condiciones de frontera de Kirchhoff [11]. Estas últimas condiciones permiten reducir el problema de difracción a una integral sobre la abertura S , interviniendo en este cálculo el campo y la derivada del campo incidente definidos en S . Como es bien conocido, esta teoría presenta ciertas inconsistencias internas, ya que no es posible recobrar las condiciones de Kirchhoff cuando el punto de observación está muy próximo a la abertura [10]. Lo sorprendente de la teoría de Kirchhoff es que a pesar de esta inconsistencia es capaz de predecir resultados que concuerdan muy bien con el experimento (abertura circular [12], la rendija [13, 14], el semiplano [15], barras dieléctricas [16], etc.). En años recientes, debido a la inconsistencia de esta teoría, ha habido una gran tendencia a tomar como punto de partida no a la fórmula integral de Helmholtz-Kirchhoff sino alguna de las dos fórmulas de Rayleigh [10, 11], una de las cuales está dada con condiciones de frontera de Dirichlet y la otra con condiciones de Neumann. Estas fórmulas, al unirlas a las condiciones de frontera de Kirchhoff, proporcionan una teoría matemática consistente [17] que reducen, al igual que en la teoría de Kirchhoff, el cálculo a una integral sobre la abertura y son conocidas como las fórmulas de Rayleigh-Sommerfeld (TRS) [11]. Estas dos formulaciones, aunque teóricamente diferentes, son equivalentes desde un punto de vista práctico, ya que se ha probado que si las dimensiones lineales de la abertura son grandes comparadas con la longitud de onda y si los ángulos de difracción no son grandes, las dos teorías mencionadas predicen esencialmente los mismos resultados [18].

En este artículo centraremos nuestra atención en la teoría de Rayleigh-Sommerfeld con condiciones de Dirichlet y donde el haz será una onda gaussiana que incide normalmente sobre una rendija en una pantalla plana. Nuestro objetivo principal es determinar numéricamente los límites de validez de la TRS. Por simplicidad hemos seleccionado la rendija para determinar estos límites, pero cualquier otra abertura podría ser conveniente. Es claro que estos límites no pueden ser determinados dentro del armazón de la misma TRS, sino que hay que recurrir ya sea al experimento o a alguna teoría rigurosa de la difracción. Como hay escasos resultados experimentales en donde se tome en cuenta el tamaño finito del haz incidente (hasta donde tenemos conocimiento, sólo se ha hecho para un semiplano [15]), recurriremos a una teoría rigurosa de la difracción. Entendemos por una teoría rigurosa, a una teoría que resuelva el problema de la difracción utilizando las ecuaciones de Maxwell y las condiciones de frontera adecuadas. En una teoría tal el efecto de la polarización, de borde, así como el del espesor de la pantalla, son tomados en cuenta. Todos estos últimos factores no son considerados en la TRS y es fundamental determinar bajo cuáles condiciones pueden contribuir de manera importante en la difracción. La teoría que utilizaremos como patrón de comparación será la teoría rigurosa presentada en la Ref. [1]. En esta teoría la noción de un haz incidente arbitrario es tomado en cuenta

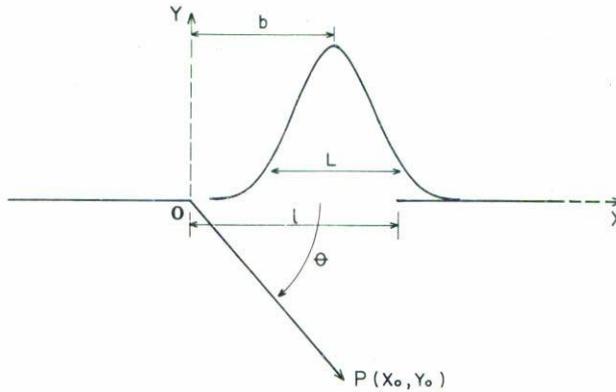


FIGURA 1. Nuestro sistema. La rendija de ancho ℓ es paralela al eje Oz , es decir, es perpendicular al plano de la figura. La distribución de la intensidad del haz incidente en la pantalla tiene forma gaussiana de ancho L y su posición está determinada por el parámetro b .

en la misma formulación. Hacemos notar que los artículos que consideran la validez de la teoría de Kirchhoff (TK) o de Rayleigh-Sommerfeld (TRS) tienen dos características. La primera es que su análisis es local, es decir, comparan patrones de difracción [13–15] o la intensidad del campo eléctrico sobre algún eje de simetría [12] (comparación punto a punto). Segundo, sólo afirman que las teorías son válidas cuando la abertura es grande con respecto a la longitud de onda, estableciendo así únicamente límites cualitativos. En este artículo nuestro análisis es global, para esto utilizamos al coeficiente de transmisión como parámetro de comparación. Como veremos, la utilización de este parámetro nos permitirá determinar cuantitativamente y de manera evidente los límites de validez de la TRS (o equivalentemente, de la de Kirchhoff).

2. LAS FÓRMULAS DE RAYLEIGH

Consideremos una pantalla infinitamente delgada colocada en el vacío, en la cual se tiene una rendija de longitud infinita y ancho ℓ , paralela al eje Oz . La rendija es iluminada por un haz electromagnético monocromático de longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$, el cual es independiente de la variable z (onda cilíndrica). Supondremos que la onda incidente es gaussiana (la distribución de su intensidad sobre la pantalla tiene un ancho L) y, además, que ilumina la pantalla normalmente. En lo que sigue admitiremos la dependencia en el tiempo $\exp(-i\omega t)$. En la Fig. 1 resumimos todas nuestras notaciones. Nótese que hemos fijado la posición de la gaussiana incidente, con respecto al eje Oy , por el parámetro b . Este parámetro nos permitirá simular un mal alineamiento del sistema óptico, como se verá más adelante.

Un campo electromagnético arbitrario puede descomponerse en dos polarizaciones fundamentales independientes. Una de ellas es la polarización TE, donde el campo eléctrico

total en cada punto del espacio es paralelo al eje Oz y cuya componente será denotada por E . La otra es la polarización TM, para la cual el campo magnético total es paralelo a Oz , con componente H . La unicidad de la solución y la invariancia del sistema bajo una traslación paralela al eje Oz implican que los campos eléctrico E y magnético H son independientes de la coordenada z . Así, nuestro problema se reduce a dos problemas escalares en dos dimensiones: determinación de los campos $E(x, y)$ y $H(x, y)$.

Partiendo de la identidad de Green en dos dimensiones pueden obtenerse las dos fórmulas de Rayleigh [2, 10, 16, 19], las cuales, en términos de los campos U_I y U_{II} , se expresan como

$$U_I(x_0, y_0) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} U_I(x, 0) \frac{\partial}{\partial y_0} H_0^{(1)}(kr) dx \quad (1)$$

y

$$U_{II}(x_0, y_0) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} U_{II}(x, 0) H_0^{(1)}(kr) dx \quad (2)$$

donde $r^2 = (x - x_0)^2 + y_0^2$ (véase la Fig. 1). Estas son dos ecuaciones integrales independientes, cada una de las cuales puede proporcionar la solución *rigurosa* al problema de difracción de una rendija en una pantalla plana. La primera se expresa en términos del campo total $U_I(x, 0)$ en la pantalla (condición de Dirichlet), mientras que la segunda en términos de la derivada normal del campo total $\frac{\partial}{\partial y} U_{II}$ en la pantalla (condición de Neumann). Hacemos notar que estas dos funciones (el campo total y su derivada) no son conocidas *a priori*. Para determinarlas es necesario resolver las ecuaciones integrales, o hacer alguna hipótesis acerca de sus valores en la pantalla (como ocurre con las condiciones de Kirchhoff). La Ec. (1) fue empleada por Sommerfeld [19, 20] para resolver rigurosamente el problema de la difracción de una onda plana (con polarización TE) que incide sobre una rendija en una pantalla infinitamente delgada de conductividad infinita, restringiendo sus cálculos al caso de incidencia normal. Para resolver el caso TM Sommerfeld hizo uso de la Ec. (2).

Como mencionamos en la introducción, estamos interesados en calcular la energía total que pasa a través de la rendija (normalizada a la energía incidente), es decir, determinar el coeficiente de transmisión. Para calcular esta energía normalizada, primero determinaremos el campo U_I y U_{II} en puntos muy alejados de la rendija, en lo que se conoce con el nombre de región de campo lejano. Esta región está determinada por la condición $kr \gg 1$. En la región de campo lejano la función Hankel y su derivada están dadas así:

$$H_0^{(1)}(kr) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i\pi/4} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_0} H_0^{(1)}(kr) \cong i \sqrt{\frac{2k}{\pi}} e^{-i\pi/4} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \frac{y_0}{r}. \quad (4)$$

Si finalmente en el denominador hacemos $r \cong r_0$, en el exponente $r \cong r_0(1 - xx_0/r_0^2)$, y sustituimos la Ec. (4) en la Ec. (1), se obtendrá

$$U_I(x_0, y_0) = f_I(\theta) \frac{e^{ikr_0}}{\sqrt{r_0}}, \tag{5}$$

donde $f_I(\theta)$ está dada por

$$f_I(\theta) = \sqrt{k} \operatorname{sen} \theta e^{-i\pi/4} \hat{U}_I(k \cos \theta, 0) \tag{6}$$

(véase la Fig. 1 para la definición del ángulo θ). Si ahora sustituimos la Ec. (3) en la Ec. (2) se obtiene

$$U_{II}(x_0, y_0) = f_{II}(\theta) \frac{e^{ikr_0}}{\sqrt{r_0}}, \tag{7}$$

donde

$$f_{II}(\theta) = \frac{ie^{-i\pi/4}}{\sqrt{k}} e^{ikl \cos \theta/2} \frac{\partial}{\partial y} \hat{U}_{II}(k \cos \theta, 0). \tag{8}$$

En las Ecs. (6) y (7) se utiliza la siguiente notación:

$$\hat{U}_j(k \cos \theta, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U_j(x, y) e^{-ikx \cos \theta} dx \quad (j = I, II). \tag{9}$$

De las Ecs. (5) y (7) se sigue que el campo en el infinito es una onda cilíndrica, con una amplitud que depende ya sea de la transformada de Fourier del campo en la pantalla [Ec. (6)] o de su derivada [Ec. (8)]. Podemos considerar a estas expresiones exactas, en el sentido de que son obtenidas sin hacer ninguna hipótesis de origen físico para simplificar, es decir, los campos \hat{U}_I y $\frac{\partial}{\partial y} \hat{U}_{II}$ son los campos exactos. Como veremos, estas expresiones nos permitirán determinar la energía transmitida mediante una integración.

3. LAS FÓRMULAS DE RAYLEIGH-SOMMERFELD

Las Ecs. (5) y (7), que nos proporcionan el campo lejano, no pueden ser utilizadas si no se ha determinado antes el campo total o su derivada en la pantalla. Las condiciones de frontera de Kirchhoff nos permiten expresar estas dos funciones en términos del campo incidente (que es conocido *a priori*), de la siguiente manera:

$$U_I(x, 0) = \begin{cases} U_i(x, 0), & \text{si } x \text{ está en la abertura,} \\ 0, & \text{si } x \text{ no está en la abertura;} \end{cases} \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} U_{II}(x, 0) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} U_i(x, 0), & \text{si } x \text{ está en la abertura,} \\ 0, & \text{si } x \text{ no está en la abertura.} \end{cases} \tag{11}$$

Estas ecuaciones proponen que el campo total y su derivada en la pantalla sean aproximados por los valores obtenidos dentro del armazón de la óptica geométrica. Como la óptica geométrica es una teoría para muy altas frecuencias, podemos concluir que éstas condiciones de frontera serán adecuadas para longitudes de onda muy pequeñas con respecto a las dimensiones de la abertura. Es claro que en estas ecuaciones el efecto de borde no está considerado, ya que muy cerca de la frontera de la abertura el campo total y el incidente son el mismo. Es este hecho lo que limita la utilización de las condiciones de Kirchhoff. Además, cuando la longitud de onda aumenta los efectos de polarización (que son un efecto de segundo orden) comienzan a notarse y éstos no son tomados en cuenta en las condiciones de Kirchhoff.

Si reemplazamos las Ecs. (10) y (11) en las Ecs. (1) y (2), obtendremos las ecuaciones de Rayleigh-Sommerfeld (TRS) en dos dimensiones:

$$U_I(x_0, y_0) = \frac{i}{2} \int_0^\ell U_i(x, 0) \frac{\partial}{\partial y_0} H_0^{(1)}(kr) dx, \tag{12}$$

$$U_{II}(x_0, y_0) = \frac{i}{2} \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial y} U_i(x, 0) H_0^{(1)}(kr) dx. \tag{13}$$

La Ec. (12) es conocida como la ecuación de primera especie y la Ec. (13) como la de segunda. Así, la aplicación de las condiciones de Kirchhoff reducen el cálculo del campo difractado a una simple integración. Estas ecuaciones no presentan la muy criticada inconsistencia que tiene la teoría de Kirchhoff [10]. Mukada [17] en 1962, mostró que las ecuaciones de la TRS recobran los valores de frontera supuestos, excepto en la frontera de la abertura, donde la Ec. (12) da el valor $1/2U_i(x, 0)$ y la Ec. (13) el valor $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} U_i(x, 0)$.

Con las condiciones de Kirchhoff el campo lejano se determina de las Ecs. (5) y (6), estando dadas las funciones $f_I(\theta)$ y $f_{II}(\theta)$ de la siguiente manera:

$$f_I(\theta) = \sqrt{k} \operatorname{sen} \theta e^{-i\pi/4} \hat{U}_i(k \cos \theta, 0), \tag{14}$$

$$f_{II}(\theta) = \frac{ie^{-i\pi/4}}{\sqrt{k}} e^{ik\ell \cos \theta/2} \frac{\partial}{\partial y} \hat{U}_i(k \cos \theta, 0). \tag{15}$$

Luego, las amplitudes son dadas en función de la transformada de Fourier del campo y de su derivada en la abertura.

Como la ecuación de Rayleigh-Sommerfeld más utilizada en óptica es la de primera especie, Ecs. (12) y (14), nos restringiremos únicamente a el estudio de la TRS de este tipo.

4. EL EXPERIMENTO Y LA TEORÍA DE RAYLEIGH-SOMMERFELD

Como se ha mencionado, la TK y la TRS son teorías aproximadas, así que es muy importante determinar las condiciones físicas bajo las cuales se obtendrán resultados confiables. Deseamos hacer notar que es imposible determinar, dentro de su mismo armazón teórico,

con qué seguridad la TK o la TRS son capaces de predecir la estructura del campo difractado. Sólo el experimento o una teoría rigurosa de la difracción pueden ser utilizadas como medio de comparación con éstas o cualquier otra teoría aproximada de la difracción. En la región óptica es difícil realizar mediciones cerca de o en la abertura; debido a esto, la tendencia después de la Segunda Guerra Mundial ha sido llevar a cabo comparaciones en la región de microondas, donde estas mediciones pueden realizarse sin dificultad [21]. Muchas comparaciones entre la TK y el experimento han sido hechas, pero, hasta donde conocemos, no se ha realizado un estudio sistemático donde se muestre la eficiencia de la TRS (campo cercano o lejano).

Como ha sido probado que la TRS es una teoría matemáticamente consistente con las condiciones de Kirchhoff, uno está tentado a aceptar que esta teoría dará buenos resultados en todo punto, pero esto no es así. En la región de microondas, el experimento ha mostrado que, dentro de la abertura (circular [12, 22, 23, 25], elíptica [23], rendija [23], cuadrada [24]) la magnitud del campo eléctrico oscila mucho si $\lambda/D < 1$, donde D es una dimensión característica de la abertura. Estas oscilaciones están presentes en toda la abertura a pesar de tener una onda incidente plana. Tanto estas oscilaciones como sus valores están en fuerte contradicción con las condiciones de Kirchhoff dadas por la Ec. (10). De estos resultados podemos afirmar que la fórmula de Rayleigh-Sommerfeld de primera especie [Ec. (12)], proporcionará malos resultados tanto dentro de la abertura como para puntos muy cercanos a ella. Hasta donde sabemos, esta ecuación no ha sido confrontada en el campo cercano con el experimento, salvo una excepción, para barras rectangulares transparentes [16]. En general, las comparaciones que se han realizado han sido con la TK [18, 26, 27], pero no debemos perder de vista que estas comparaciones no pueden ser concluyentes ya que ambas teorías son aproximadas. Es por tal motivo que, como primer paso, hemos restringido nuestro estudio a comparar en el campo lejano la TRS de primera especie con una teoría rigurosa de la difracción [1]. Lo novedoso de este artículo es que utilizamos el coeficiente de transmisión como parámetro de comparación (método global) y que consideramos ondas incidentes de tipo gaussiano. Este tipo de ondas nos permitirán tomar en cuenta efectos imposibles de considerar con ondas planas, como son el efecto del ancho del haz y el de la posición del mismo respecto de la rendija. Debemos sin embargo mencionar que es necesario llevar a cabo también un estudio sistemático del campo cercano para así determinar qué tan cerca de la pantalla podemos aplicar la TRS y obtener resultados aceptables. Con tal estudio se tendría completamente analizada la ecuación de primera especie. Sin embargo, faltaría aún investigar la de segunda especie [Ec. (13)].

Antes de dejar esta sección es importante asentar en qué tipo de pantalla aplicaremos la TRS. Es aceptado sin demostración que la pantalla adecuada a utilizarse experimentalmente para que la TK y la TRS proporcionen buenos resultados es una pantalla negra, en lugar de la pantalla metálica altamente reflejante que usualmente se emplea. Así, Marchand y Wolf [25] sugirieron en 1966 que en este tipo de pantallas la TK describiría el campo difractado muy bien, no únicamente en la zona lejana, sino también en cualquier punto del espacio. Sin embargo, no hay evidencia experimental que apoye esta conjetura; por el contrario, creemos que hay resultados que niegan la conjetura de Marchand y Wolf. Bennett y Harris [28] han demostrado que ni la conductividad, ni lo agudo de la orilla juega un papel importante en el patrón de difracción. También Derwin [29] mostró que

el campo difractado producido por rendijas en “pantallas perfectamente absorbentes” y “pantallas perfectamente conductoras” es el mismo (para ambas pantallas) a distancias mayores que un medio de la longitud de onda. En este artículo seguiremos con la costumbre y compararemos la TRS con una teoría de la difracción rigurosa para una rendija en una pantalla infinitamente conductora [1].

Finalmente mencionaremos un punto importante acerca de las pantallas infinitamente conductoras. Se ha probado que este modelo de conductividad infinita puede ser utilizado con seguridad para el caso TE y TM, en el infrarrojo y en la región de microondas, con pantallas de aluminio o de plata [30]. En la región visible, en general, este modelo es inadecuado con respecto a una polarización arbitraria. Solamente para el caso de polarización TE, el modelo de conductividad infinita da resultados que están muy cerca de los obtenidos experimentalmente en la región visible [30]. Por otro lado, para el caso TE, la condición de frontera para este modelo es que el campo eléctrico total E se anule sobre el metal, pero ésta es precisamente la condición de frontera utilizada en la Ec. (10). Estos resultados nos sugieren que la TRS de primera especie, la Ecs. (12) y la Ec. (14), nos da el campo eléctrico en polarización TE, es decir, identificaremos a U_I con E . Esta identificación y el vector de Poynting nos permiten obtener la intensidad difractada en el ángulo θ :

$$I(\theta) = \frac{k^2}{2\mu_0\omega} \sin^2(\theta) |\hat{U}_i(k \cos \theta, 0)|^2, \quad (16)$$

donde \hat{U}_i es la transformada de Fourier del campo incidente en la abertura. Es interesante hacer notar que la identificación mencionada no es la única posible. Facq [31] en 1971 identificó, por razones diferentes a las nuestras, a U_I con el campo H en polarización TM y a U_{II} con el campo E en polarización TE. Mostró que con esta identificación la TRS conduce a resultados adecuados (para el campo lejano y polarización TE) cuando D es mayor de 3λ o 4λ .

5. RESULTADOS NUMÉRICOS

En lo que sigue admitiremos que una rendija de longitud unidad ($\ell = 1$) está siendo iluminada por un haz gaussiano proveniente de la parte superior de la pantalla ($y > 0$), como se ilustra en la Fig. 1. Además, supondremos que el haz incide normalmente y que está polarizado con polarización TE o TM. El campo incidente $U_i(x, y)$ ($U_i = E_i$ en el caso TE y $U_i = H_i$ en el caso TM) puede expresarse como una superposición de ondas planas [32] con parámetro α :

$$U_i(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k}^k A(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta y)} d\alpha, \quad (17)$$

donde β es alguna raíz de $\alpha^2 + \beta^2 = k^2$. Arbitrariamente, seleccionaremos esta raíz de tal forma que $\beta > 0$ si β es real, e $\text{Im } \beta > 0$ si β es compleja. La distribución de la intensidad

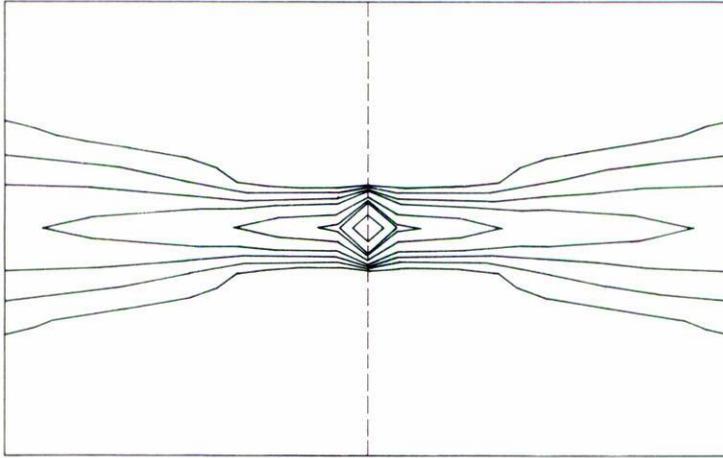


FIGURA 2. Propagación de un haz incidente gaussiano. Curvas de nivel de $|E_i(x, y)|^2$, para $\lambda/L = 0.5091$.

del haz incidente en la pantalla tiene forma gaussiana y está dada por

$$I(x) = \exp \left[-\frac{4(x - b)^2}{L^2} \right], \tag{18}$$

donde L es el ancho de la gaussiana y b es un parámetro que nos fija su posición con respecto al eje Oy (véase la Fig. 1). El campo U_i asociado a esta distribución de intensidad tiene por amplitud a

$$A(\alpha) = \frac{L}{2} e^{-i\alpha b} e^{-(\alpha^2 L^2/8)}. \tag{19}$$

Para entender mejor el comportamiento de estos haces gaussianos hemos graficado en la Fig. 2, a partir de las Ecs. (17) y (19), las curvas de nivel de $|E_i(x, y)|^2$, para $\lambda/L = 0.5091$. De la figura se sigue que el haz que proviene de la parte superior llega como un haz convergente, alcanza una región de estrechamiento y continúa como un haz divergente. A la región de estrechamiento del haz se le llama la cintura y su diámetro mínimo está dado precisamente por el valor de L . Hemos encontrado numéricamente que éste es el comportamiento general del haz, aunque la parte estrecha es menos notoria si el cociente λ/L disminuye. En la misma figura señalamos con una línea punteada la localización de la pantalla utilizada en todos nuestros cálculos numéricos.

En la Fig. 3 mostramos cómo el coeficiente de transmisión depende del cociente λ/ℓ , donde ℓ es el ancho de la rendija (véase la Fig. 1). En esta gráfica comparamos la TRS [utilizando la Ec. (16)] con los resultados obtenidos con la teoría rigurosa de la difracción para los casos TE y TM, en el rango $0.001 < \lambda/\ell < 2.5$, para $L/\ell = 3.5355$. El primer hecho interesante que salta a la vista es que, en la región $0.001 < \lambda/\ell < 0.2$, la TRS

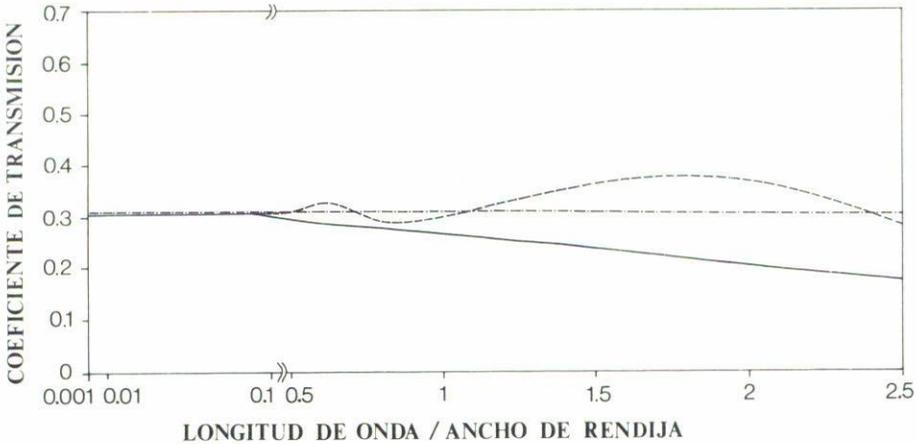


FIGURA 3. Coeficiente de transmisión como función de λ/l para la teoría de Rayleigh-Sommerfeld (—) con $L/l = 3.5355$. Se compara la TRS con el caso TE (---) y TM (- - -) de una teoría rigurosa de la difracción (Ref. [1]). La región de validez de la TRS está determinada por el segmento de recta horizontal ($0.001 < \lambda/l < 0.2$).

coincide con la teoría rigurosa para el caso TE (hasta la segunda cifra), mostrándonos claramente que ésta es la región de validez de la TRS. Además, en esta región los casos TE y TM de la teoría rigurosa prácticamente coinciden. Se sigue de aquí que en esta región, que llamaremos *la región escalar*, los efectos de polarización no son importantes. La existencia de la región escalar nos permite generalizar que toda teoría escalar de la difracción que no tome en cuenta los efectos de la polarización, tendrá una cota superior de validez y ésta es dada aproximadamente por el valor de $\lambda/l = 0.2$. También de la figura se concluye que en la región $0.2 < \lambda/l < 2.5$, que llamaremos *región vectorial*, los efectos de polarización son muy importantes y sólo una teoría rigurosa, o alguna teoría aproximada de la difracción que tome en cuenta tanto al material de que está hecha la pantalla como a la polarización, y que además sea consistente con las ecuaciones de Maxwell, será capaz de proporcionar predicciones confiables en esta región. Aunque numéricamente graficamos hasta $\lambda/l = 2.5$, en realidad esta región se extiende para valores aun mayores. Hacemos notar que en esta región vectorial la TRS no es ni siquiera un promedio de los casos TE y TM. Otro resultado interesante es que el coeficiente de transmisión para el caso TM es prácticamente insensible a la longitud de onda, no siendo así para el caso TE donde observamos fuertes fluctuaciones. Finalmente, mencionaremos que todas las conclusiones obtenidas de la Fig. 3 son consistentes con los resultados reportados en la Ref. [2].

En la Fig. 3 hemos utilizado el coeficiente de transmisión como parámetro de comparación, es decir, hemos realizado una comparación global. Con este método, en una sola gráfica es posible presentar una cantidad considerable de cálculo. Así para diseñar la Fig. 3 fue necesario calcular 600 patrones de difracción. Esta es la primera vez que un método tal es empleado en la determinación de los límites de validez de la TRS. Otra novedad es

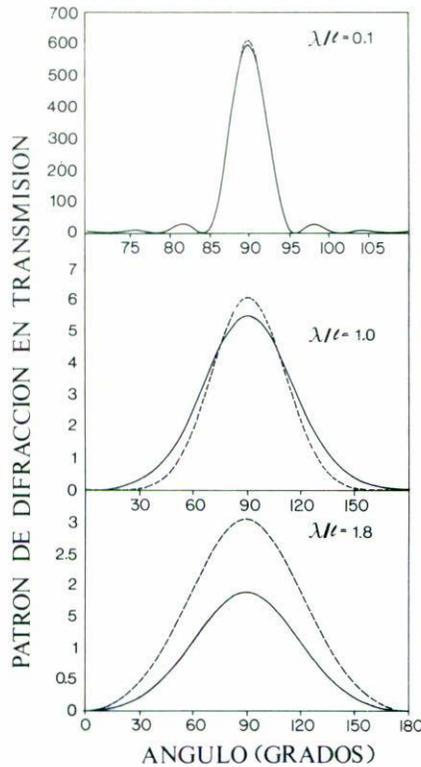


FIGURA 4. Comparación entre los patrones de difracción de la TRS (—) y el caso TE de la teoría rigurosa de la difracción (---): $\lambda/\ell = 0.1, 1.0$ y 1.8 , con $L/\ell = 3.5355$. La energía está normalizada a $1/2(\mu_0\omega)$ [véase Ec. (16)].

que en esta comparación se ha abandonado la noción de una onda plana incidente y hemos utilizado la noción más realista de un haz gaussiano (véase la Fig. 2). Para complementar estos resultados, en la Fig. 4, hemos llevado a cabo una comparación local vía el patrón de difracción. En esta figura comparamos los patrones obtenidos mediante la TRS y la teoría rigurosa (polarización TE) para tres longitudes de onda, teniendo el haz incidente un ancho normalizado de valor $L/\ell = 3.5355$. La primera, $\lambda/\ell = 0.1$, se encuentra en el extremo de la región escalar. Para este valor de λ/ℓ los dos patrones se superponen muy bien, excepto en la región central. Hemos observado que esta discrepancia en la región central disminuye para valores más pequeños de λ/ℓ . Para las otras dos longitudes de onda ($\lambda/\ell = 1$ y $\lambda/\ell = 1.8$), las cuales se localizan en la región vectorial, observamos que las predicciones de la TRS son malas y que éstas empeoran cuando λ/ℓ aumenta. Se observa también que para $\lambda/\ell = 0.1$ el patrón de difracción está comprimido en un sector angular muy pequeño (de $\theta \cong 75^\circ$ a $\theta \cong 105^\circ$). Hemos encontrado que este sector disminuye cuando λ/ℓ disminuye, pero aumentando fuertemente el número de oscilaciones, para finalmente proporcionar el resultado de la óptica geométrica. Pero si λ/ℓ aumenta, los efectos de difracción son mayores, haciendo que la energía difractada alcance grandes valores angulares y perdiéndose las oscilaciones características de un patrón de difracción típico en óptica.

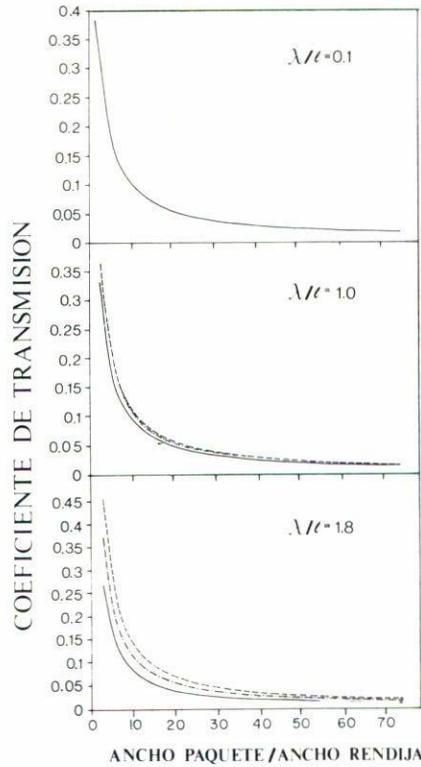


FIGURA 5. En esta figura se muestra cómo el coeficiente de transmisión depende del ancho del haz incidente (L/ℓ). Se compara la TRS (—) con el caso TE (---) y TM (-·-·-) de la teoría rigurosa para $\lambda/\ell = 0.1, 1.0$ y 1.8 .

En la Fig. 5 se muestra cómo el coeficiente de transmisión depende del ancho del haz incidente (L/ℓ). Para $\lambda/\ell = 0.1$, la TRS y la teoría de la difracción (TE y TM) prácticamente coinciden para todo valor de L/ℓ . Para $\lambda/\ell = 1.0$ y $\lambda/\ell = 1.8$, esto no es así, aunque tienden a coincidir cuando L/ℓ aumenta, como puede observarse de la figura. Lo sorprendente de la TRS es que sea capaz de predecir el comportamiento general de la teoría rigurosa a pesar de que estas dos últimas longitudes de onda se localizan en la región vectorial. Aunque no se ilustra en la figura, es de mencionar que para valores pequeños de L/ℓ el coeficiente de transmisión tiende a aumentar, alcanzando casi el valor unidad cuando $L/\ell < 0.5656$. Este último resultado hemos visto que ocurre tanto para la TRS como para la teoría rigurosa (casos TE y TM). Finalmente, mencionaremos que actualmente hay interés no únicamente en estudiar la difracción de haces de ancho finito, sino de haces extremadamente angostos, donde L/λ es del orden de la unidad [2].

En la Fig. 6 se presenta la influencia de la posición del haz en el coeficiente de transmisión para $L/\ell = 3.5355$. La posición es determinada con el parámetro b en la Ec. (18) y en la Fig. 1. Como era de esperarse, el coeficiente de transmisión es máximo cuando el centro del haz se localiza a la mitad de la rendija, disminuyendo su valor cuando el haz se aleja de este punto. Para $\lambda/\ell = 0.1$, caso que se encuentra en el extremo de la región escalar, las tres curvas coinciden salvo en la región central de manera similar a como ocurría con

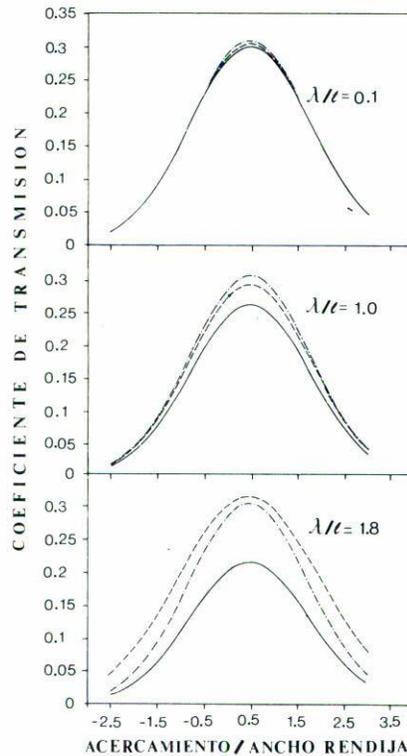


FIGURA 6. Influencia de la posición del haz b en el patrón de difracción. Se compara la TRS (—) con el caso TE (---) y TM (-·-·-) de la teoría rigurosa para $\lambda/\ell = 0.1, 1.0$ y 1.8 con $L/\ell = 3.5355$.

los patrones de difracción (véase la Fig. 4). La determinación experimental del patrón de difracción depende de manera crítica de la alineación del sistema óptico. Con un perfecto alineamiento del sistema, la máxima energía transmitida se presenta cuando la parte central del haz coincide con la parte media de la rendija. Así, la Fig. 6 nos muestra cómo este mal alineamiento del sistema óptico influye fuertemente en la energía transmitida por la rendija. Notamos que la TRS predice una menor cantidad de energía transmitida que la teoría rigurosa, ésta es la tendencia general, como puede concluirse de un análisis de las Figs. 3, 5 y 6.

En la Fig. 7 estudiamos un aspecto que no es común analizar en óptica y es la influencia del espesor de la pantalla. Graficamos en esta figura el coeficiente de transmisión como función del espesor de la pantalla normalizado al ancho de la rendija (h/ℓ), con $L/\ell = 3.5355$. En esta figura no es posible presentar los resultados de la TRS ya que ésta supone un espesor nulo ($h/\ell = 0$); sin embargo, será posible obtener algunas conclusiones relativas a la TRS como veremos a continuación. En esta figura hemos escogido la escala en el eje vertical (véase la Fig. 3) de tal modo que el efecto de polarización sea más notorio. Para $\lambda/\ell = 0.1$, observamos que el coeficiente de transmisión es independiente del espesor de la pantalla para ambas polarizaciones, a pesar de que h sea tan grande como 35λ . El valor constante para el caso TE es precisamente el obtenido con la TRS. Entonces, obtenemos

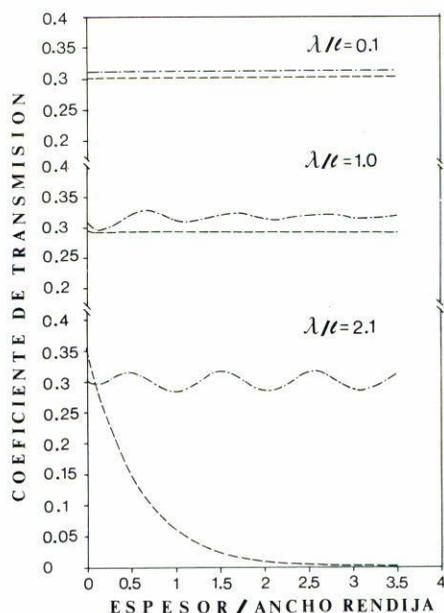


FIGURA 7. Influencia del espesor de la pantalla en el coeficiente de transmisión. Se grafican los resultados de los casos TE (---) y TM (----) de la teoría rigurosa, para $\lambda/\ell = 0.1, 1.0$ y 2.1 con $L/\ell = 3.5355$.

la importante conclusión de que la TRS es capaz de predecir el resultado correcto para pantallas gruesas. Es decir, tanto los patrones de difracción como sus correspondientes coeficientes de transmisión muestran una independencia del espesor (al menos hasta $h = 35 \lambda$). Esta es una conclusión no encontrada en la literatura y que da fuerza al empleo de la TRS en esta situación. De esta Fig. 7 observamos que, para $\lambda/\ell = 1.0$, empiezan a aparecer oscilaciones en el coeficiente de transmisión, con notorias amplitudes para el caso TM; para $\lambda/\ell = 2.1$ el comportamiento del coeficiente de transmisión difiere grandemente del encontrado en la región escalar, en este caso la energía transmitida (TE) por la rendija disminuye según aumenta el espesor de la pantalla hasta prácticamente anularse cuando la pantalla tiene un espesor de 1.5λ . Este resultado es conocido por la gente que trabaja en la región de microondas y se presenta para el caso TE, cuando $2 \lambda > \ell$. Este comportamiento contrasta fuertemente con el caso TM, donde sus valores se mantienen alrededor de 0.3.

6. CONCLUSIONES

En este artículo hemos comparado la teoría de Rayleigh-Sommerfeld (TRS) para un haz incidente gaussiano con una teoría rigurosa de la difracción. Hemos analizado el coeficiente de transmisión, calculado en el campo lejano, para la fórmula de primera especie. Fue posible determinar el dominio de validez de la TRS y se hizo comprensible la distinción entre región escalar y vectorial. Analizamos la influencia en el coeficiente de transmisión de los siguientes tres parámetros: la posición del haz, el ancho del haz y el espesor de la

pantalla. Obtuvimos el importante resultado de que en la región escalar la TRS es capaz de predecir los resultados correctos para pantallas gruesas. Es necesario puntualizar que un análisis parecido al presentado en este artículo es necesario llevarlo a cabo con otras teorías de la difracción.

AGRADECIMIENTOS

Los autores, O.M.M y F.Ch.R, agradecen el apoyo de COFAA-IPN.

REFERENCIAS

1. O. Mata-Méndez, M. Cadilhac, y R. Petit, *J. Opt. Soc. Am.* **73** (1983) 328.
2. O. Mata-Méndez, *Opt. Lett.* **16** (1991) 1629.
3. Toshitaka Kojima, *J. Opt. Soc. Am.* **17** (1990) 1740.
4. O. Mata-Méndez, *Phys. Rev.* **B37** (1988) 8182.
5. P. Langlois, A. Boivin y R.A. Lessard, *J. Opt. Soc. Am.* **A2** (1985) 858.
6. Hal G. Kraus, *J. Opt. Soc. Am.* **A7** (1990) 47.
7. Takashi Takenaka y Otozo Fukumitsu, *J. Opt. Soc. Am.* **72** (1982) 331.
8. A. Zúñiga-Segundo y O. Mata-Méndez, *Phys. Rev.* **B46** (1992) 536.
9. Jeffrey J. Regan y David R. Andersen, *Computers in Physics* (enero-febrero 1991), p. 49.
10. C.J. Bouwkamp, *Rep. Progr. Phys.* **17** (1954) 35.
11. Joseph W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York (1968), cap. III.
12. C.L. Andrews, *J. Appl. Phys.* **21** (1950) 761.
13. N.S. Kapany, J.J. Burke, Jr., y K. Frame, *Appl. Opt.* **4** (1965) 1229.
14. C.D. Hause, J.G. Woodward y C.E. McClellan, *J. Opt. Soc. Am.* **29** (1939) 147.
15. J.E. Pearson, T.C. McGill, S. Kurtin, y A. Yariv, *J. Opt. Soc. Am.* **59** (1969) 1440.
16. M. Totzeck, *J. Opt. Soc. Am.* **A8**, (1991) 27.
17. N. Mukunda, *J. Opt. Soc. Am.* **52** (1962) 336.
18. E. Wolf y E.W. Marchand, *J. Opt. Soc. Am.* **54** (1964) 587.
19. A. Sommerfeld, *Optics*, Academic Press Inc., Nueva York, (1954), Cap. VI.
20. Max Born y Emil Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, Nueva York (1975).
21. Samuel Silver, *J. Opt. Soc. Am.* **52** (1962) 131.
22. H.L. Robinson, *J. Appl. Phys.* **24** (1953) 35.
23. S.J. Buchsbaum, A.R. Milne, D.C. Hogg, G. Bekefi y G.A. Woonton, *J. Appl. Phys.* **26** (1955) 706.
24. Juang-Lu Lin, Walter L. Curtis y Mervin C. Vincent, *IEEE Trans. Antennas Propagat.* (mayo de 1974) 467.
25. E.W. Marchand y E. Wolf, *J. Opt. Soc. Am.* **56** (1966) 1712.
26. John C. Heurtley, *J. Opt. Soc. Am.* **63** (1973) 1003.
27. Michael W. Farn y Joseph W. Goodman, *J. Opt. Soc. Am.* **7** (1990) 948.
28. J. Dean Barnett y Franklin S. Harris Jr., *J. Opt. Soc. Am.* **52** (1962) 637.
29. C.C. Derwin, *J. Appl. Phys.* **29** (1958) 921.
30. D. Maystre, M. Neviere, y R. Petit, en *Electromagnetic Theory of Gratings*, editado por R. Petit, Topics in Current Physics en vol. 22, Springer-Verlag, Berlín (1980), p. 159.
31. Paul Facq, "Etude Critique des approximations de Rayleigh-Sommerfeld et de Kirchhoff pour le probleme de la diffracción par une fente", Tesis de Doctorado, Facultad de Ciencias de Orsay, Universidad de París, Francia (1971).
32. O. Mata-Méndez, *Rev. Mex. de Fís.* **38** (1992) 850.