De las leyes de Gauss y Ampère al teorema de los residuos de Cauchy

E. LEY-KOO
Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México
Apartado postal 20–364, 01000 México, D.F., México

Recibido el 2 de octubre de 1992; aceptado el 26 de abril de 1993

RESUMEN. Se muestra que las leyes de Gauss de la electrostática y de Ampère de la magnetostática en dos dimensiones se pueden expresar bajo la forma del teorema de los residuos de Cauchy, jugando las posiciones y las magnitudes de las fuentes los papeles de los polos y los residuos, respectivamente. Estas conexiones se utilizan para ilustrar el aprovechamiento de los conocimientos de física en el estudio de las matemáticas y viceversa, reconociendo la conveniencia de usar las bases de una disciplina para avanzar en la otra. Se incluye también una nota histórica sobre las contribuciones de Gauss y Cauchy al estudio de las funciones analíticas.

ABSTRACT. It is shown that Gauss' law of electrostatics and Ampere's law of magnetostatics in two dimensions can be expressed in the form of Cauchy's residue theorem, the positions and magnitudes of the sources playing the roles of poles and residues, respectively. These connections are used to illustrate how to take advantagae of the knowledge of physics in the study of mathematics, and viceversa, recognizing the convenience of using the basis of one discipline to advance in the other one. A historical note on the contributions of Gauss and Cauchy to the study of analytical functions is also included.

PACS: 41.10.Dq; 02.30.+g; 01.40.Gm; 01.65.+g

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se consideran dos problemas de interés en el aprendizaje y enseñanza de la física y las matemáticas, uno de tipo general y el otro de tipo específico. El problema general, al que se enfrentan los estudiantes y maestros de física en el nivel superior, es el de la secuencia en la adquisición de los conocimientos de física y de matemáticas [1]. El problema específico es el de aprovechar los conocimientos de electrostática y magnetostática para ilustrar el significado del teorema de los residuos. El estudio de este problema específico puede servir como una ilustración de posibles estrategias de solución del problema general.

En la Sec. 2 se estudia el problema específico discutiendo sucesivamente: A) La ley de Gauss de la electrostática, B) la ley de Ampère de la magnetostática, C) el teorema de los residuos de Cauchy, D) la expresión de la circulación magnética bajo la forma del teorema de los residuos, y E) la expresión del flujo eléctrico bajo la forma de este mismo teorema. En este estudio destacan las matemáticas que entran en la formulación de las leyes físicas y las características geométricas de los campos de fuerza eléctricos y magnéticos que permiten que esas leyes se puedan expresar bajo la forma de teorema de los residuos. La presentación se hace de manera concisa pero autocontenida para satisfacer las necesidades de los lectores con diversos intereses. En la Sec. 3 se incluye una nota de interés histórico sobre las contribuciones de Gauss y Cauchy al estudio de las funciones analíticas. En la Sec. 4 se hace una discusión de algunos puntos del problema específico, cuya validez se puede extender al problema general de avanzar coordinadamente en el estudio de la física y las matemáticas.

2. Electrostática, magnetostática y funciones de variable compleja

En esta sección se estudia el problema específico de expresar las leyes de Gauss de la electrostática y de Ampère de la magnetostática en situaciones bidimensionales bajo la forma del teorema de residuos de Cauchy. Aunque la importancia y aplicación de las funciones de variables compleja en el estudio de la electrostática en dos dimensiones es bien conocida, ese estudio generalmente se da al nivel de posgrado [2,3]. En todo caso, las conexiones estudiadas en el presente trabajo entre la electrostática y la magnetostática bidimensionales y los teoremas básicos de la teoría de funciones de variables complejas no parecen ser conocidas, de acuerdo con un muestreo realizado por el autor entre colegas físicos y matemáticos. Se puede señalar que la analogía electrostática aparece mencionada al menos en un libro de texto [4].

A continuación se analizan las formulaciones generales de A) la ley de Gauss, de la electrostática, B) la ley de Ampère de la magnetostática y C) el teorema de los residuos de Cauchy, para proceder a expresar D) la circulación magnética y E) el flujo eléctrico en situaciones bidimensionales bajo la forma del teorema de los residuos identificando en cada caso a las posiciones de las fuentes como los polos y a sus magnitudes como los residuos, respectivamente.

A) Ley de Gauss de la electrostática

La formulación de la ley de Gauss de la electrostática tiene como base experimental la ley de Coulomb y el principio de superposición, y como base conceptual el campo de intensidad eléctrica y su flujo a través de una superficie cerrada. A continuación se analizan cada uno de estos elementos y sus conexiones para alcanzar esa formulación [5].

La ley de Coulomb describe las fuerzas que ejercen entre sí dos cuerpos eléctricamente cargados, de dimensiones pequeñas comparadas con la separación entre ellos. Esas fuerzas son respulsivas o atractivas según que las cargas eléctricas asociadas a cada cuerpo sean del mismo signo o de signos opuestos, respectivamente; son radiales en el sentido de que actúan a lo largo de la línea recta que pasa por las posiciones de ambos cuerpos; y su magnitud es proporcional a la magnitud de cada una de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los cuerpos. Si q_1 y q_2 son las cargas eléctricas asociadas a las partículas situadas en las posiciones $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, respectivamente, entonces la fuerza que ejerce la primera sobre la segunda queda expresada por la fuerza de Coulomb:

$$\vec{F}_{1\to 2} = \frac{q_1 q_2 (\widehat{\vec{r}_2 - \vec{r}_1})}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2}. \tag{1}$$

De acuerdo con la ley de la acción y la reacción la fuerza que ejerce la segunda partícula sobre la primera está dada por $F_{2\to 1} = -F_{1\to 2}$.

El principio de superposición reconoce que la fuerza total que actúa sobre una partícula eléctricamente cargada por sus interacciones con una colección de partículas cargadas en diferentes posiciones es la suma vectorial de las fuerzas de Coulomb que cada una de las partículas de esta colección ejerce sobre aquélla. Si llamamos q y $\vec{r}$ a la carga eléctrica y el vector de posición de la parícula de nuestro interés, y $q_1, q_2, q_3, \ldots, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \ldots$ a las cargas y vectores de posición de la colección de partículas, entonces la fuerza bajo consideración está dada por la superposición

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\{q_i\}\to q} &= \frac{qq_1(\widehat{\vec{r}-\vec{r}_1})}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^2} + \frac{qq_2(\widehat{\vec{r}-\vec{r}_2})}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^2} + \frac{qq_3(\widehat{\vec{r}-\vec{r}_3})}{|\vec{r}-\vec{r}_3|^2} + \cdots \\ &= q\sum_{i=1}^{N} \frac{q_i(\widehat{\vec{r}-\vec{r}_i})}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

En esta fuerza se reconoce su proporcionalidad con la magnitud de la carga eléctrica q de la partícula sobre la que actúa. Esto hace posible y muestra la conveniencia de introducir el campo vectorial de intensidad eléctrica,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_{\{q_i\}\to q}(\vec{r})}{q} = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i(\widehat{\vec{r}-\vec{r}_i})}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2}, \tag{3}$$

definido como la fuerza por unidad de carga en las diferentes posiciones $\vec{r}$ debida a la colección de cargas. El campo total es la superposición de los campos asociados a cada carga.

Si en vez de una colección de cargas puntuales se consideran distribuciones lineales, superficiales o volumétricas de carga, las sumas en las Ecs. (2) y (3) se transforman en integrales de línea, superficie o volumen, respectivamente, con las sustituciones $\vec{r}_i \to \vec{r}\,'$ y $q_i \to \lambda(\vec{r}\,')\,ds'$, $\sigma(\vec{r}\,')\,da'$, $\rho(\vec{r}\,')\,dv'$, en términos de las densidades de carga lineales λ, superficiales σ, y volumétricas ρ, respectivamente. En particular para una línea recta infinita uniformemente cargada, que se toma en la dirección del eje z y en la posición $\vec{R}'$,

$$\vec{E}(\vec{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda\, dz'\left[\vec{r}\,' - (\vec{R}' + \hat{k}z')\right]}{|\vec{r} - (\vec{R}' + \hat{k}z')|^3} = \frac{2\lambda(\widehat{\vec{R}-\vec{R}'})}{|\vec{R}-\vec{R}'|}, \tag{4}$$

donde la evaluación de la integral es inmediata, encontrándose que el campo de intensidad eléctrica es radial con respecto a la línea de carga e inversamente proporcional a la distancia a la línea.

La ley de Gauss establece que el flujo del campo de intensidad eléctrica a través de cualquier superficie cerrada es proporcional a la carga eléctrica contenida en el volumen

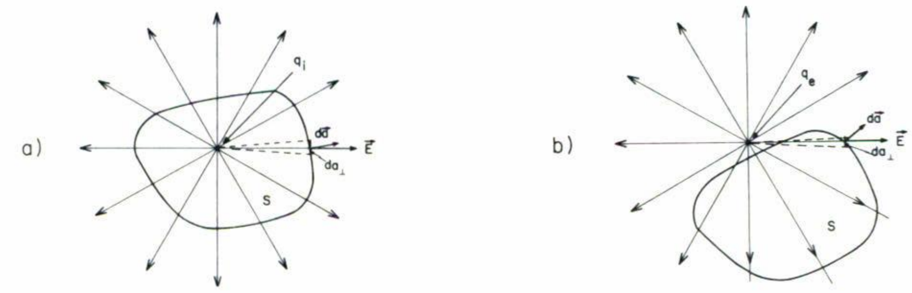

FIGURA 1. Flujo eléctrico a través de una superficie cerrada S asociada a cargas eléctricas en el interior (a), y exterior (b) del volumen delimitado por esa superficie.

delimitado por esa superficie. Este resultado se puede obtener a partir de la Ec. (3) calculando la integral de área correspondiente,

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} q_i \oint_S \frac{(\widehat{\vec{r}-\vec{r}_i})\cdot d\vec{a}}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} q_i \oint_S d\Omega_i = 4\pi \sum_{i\subset \text{vol.}} q_i. \tag{5}$$

En ese cálculo se reconoce que, por el principio de superposición, el flujo total es la suma de las contribuciones de cada carga; dado el carácter radial de la fuerza de Coulomb, sólo cuenta la proyección del elemento de área transversal a la dirección radial desde cada carga $(\widehat{\vec{r}-\vec{r}_1})\cdot d\vec{a} = da_\perp$; este elemento de área dividido entre el cuadrado de la distancia se identifica con el elemento de ángulo sólido subtendido desde la posición de la carga i; y el ángulo sólido subtendido por la superficie de integración es de 4π o 0, según que la carga esté en el interior o en el exterior del volumen delimitado por la superficie (véase Fig. 1). Nótese que en la suma del último miembro de la Ec. (5) sólo contribuyen las cargas dentro de ese volumen.

B) Ley de Ampère de la magnetostática

La ley circuital de Ampère se formula en base al concepto de campo de inducción magnética y el cálculo de la circulación de ese campo alrededor de un circuito cerrado. El campo de inducción magnética se determina experimentalmente a partir de sus efectos de rotación y orientación sobre agujas magnetizadas. Se reconoce también que tanto los imanes como las corrientes eléctricas actúan como fuentes de campo magnético y, en particular, Ampère determinó cuantitativamente las características de la inducción magnética asociada a una corriente eléctrica en un alambre recto [5].

La existencia de campos magnéticos se puede poner de manifiesto a través de sus efectos de orientación sobre agujas magnetizadas o limaduras de hierro. Estos efectos de orientación se pueden entender sobre la base observacional de que el llamado campo de inducción magnética $\vec{B}$ ejerce una torca sobre una aguja magnetizada, caracterizada por su momento dipolar magnético $\vec{\mu}$, dada por

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}. \tag{6}$$

Si la aguja se monta sobre un pivote, entonces tiende a oscilar alrededor de su posición de equilibrio. Cuando alcanza esa posición de equilibrio la torca vale cero, y el momento dipolar magnético tiene la misma dirección y sentido que la inducción magnética. El estudio de las oscilaciones de una misma aguja en diferentes campos permite determinar las características de dirección, sentido y magnitud de la inducción magnética asociada. También el estudio de las oscilaciones de diferentes agujas en un mismo campo permite determinar sus respectivos momentos dipolares magnéticos.

Tanto los imanes permanentes como las corrientes eléctricas actúan como fuentes de campo magnético. Oersted desde 1820 descubrió que las corrientes eléctricas producen efectos magnéticos y Ampère estudió estos efectos cuantitativamente en los años siguientes. En la geometría más sencilla se tiene un alambre recto por el que se hace circular una corriente eléctrica estacionaria. La inducción magnética asociada corresponde a círculos concéntricos con el alambre y su magnitud es proporcional a la intensidad de la corriente e inversamente proporcional a la distancia al alambre. Si se llama I a la intensidad de corriente, la dirección del alambre se toma como el eje z y se llama $\vec{R}'$ a su posición, entonces la inducción magnética queda expresada por la ley de Ampère:

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{2I\hat{k} \times (\widehat{\vec{R} - \vec{R}'})}{|\vec{R} - \vec{R}'|}. \tag{7}$$

Si se comparan las Ecs. (4) y (7) que describen los campos electrostáticos y magnetostáticos asociados a fuentes rectilíneas, se reconoce que ambos son proporcionales a las magnitudes de las fuentes e inversamente proporcionales a las distancias a las mismas. En contraste, mientras el campo de intensidad eléctrica es radial, el campo de inducción magnética es transversal.

El principio de superposición también es válido en magnetostática. En particular si se tiene una colección de alambres rectos y paralelos entre sí con corrientes I_i y en posiciones $\vec{R}_i$, el campo de inducción magnética que producen en conjunto es la superposición de los campos del tipo de la Ec. (7) asociado a cada alambre:

$$\vec{B}(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{2I_i\hat{k} \times (\widehat{\vec{R} - \vec{R}_i})}{|\vec{R} - \vec{R}_i|}. \tag{8}$$

La ley circuital de Ampère establece que la circulación magnética alrededor de un circuito cerrado es proporcional a la corriente neta que atraviesa a la superficie delimitada por el circuito. Aquí se obtiene este resultado a partir de la Ec. (8) calculando la integral de línea correspondiente, pero advirtiendo que el resultado es general para cualquier geometría de las corrientes. El circuito se toma como una curva cerrada en un plano transversal a las corrientes:

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{B}(\vec{R}) \cdot d\vec{R} &= \sum_{i=1}^{N} 2I_i \oint_C \frac{\hat{k} \times \widehat{(\vec{R} - \vec{R}_i)} \cdot d\vec{R}}{|\vec{R} - \vec{R}_i|} \\ &= \sum_{i=1}^{N} 2I_i \oint_C \frac{\hat{k} \cdot \widehat{(\vec{R} - \vec{R}_i)} \times d\vec{R}}{|\vec{R} - \vec{R}_i|} \\ &= \sum_{i=1}^{N} 2I_i \oint_C \frac{\hat{k} \cdot \hat{k}\, dR_\perp}{|\vec{R} - \vec{R}_i|} \\ &= \sum_{i=1}^{N} 2I_i \oint_C d\varphi_i = 4\pi \sum_{i \subset \text{sup.}} I_i. \end{aligned} \tag{9}$$

De manera análoga a la discusión que sigue a la Ec. (5), aquí se reconoce que por el principio de superposición la circulación total en la Ec. (9) es la suma de las contribuciones de cada corriente. Dado el carácter transversal de la inducción magnética, al intercambiar el punto y la cruz en el triple producto escalar sólo aparece la componente transversal del desplazamiento a lo largo del circuito de integración; este elemento de desplazamiento dividido entre la distancia corresponde al ángulo subtendido por el elemento de circuito desde la posición de la corriente bajo consideración. El ángulo subtendido por el circuito cerrado de integración es de 2π ó 0, según que la corriente esté en el interior o en el exterior de la superficie delimitada por el circuito (véase Fig. 2). Nótese que en el último miembro de la Ec. (9) sólo se incluyen las corrientes que atraviesan esa superficie.

C) Teorema de los residuos de Cauchy

En esta subsección se presentan los conceptos de funciones analíticas y meromorfas, de polos como singularidades puntuales y de residuos; estos conceptos se utilizan en la formulación de los teoremas de Cauchy, incluido el de los residuos. La presentación se limita a introducir los conceptos y enunciar los teoremas, discutiendo sus implicaciones y relaciones. El lector interesado en un estudio más detallado, incluyendo las demostraciones de los teoremas, puede usar las referencias correspondientes [4,6,7].

Definición 1: Funciones analíticas.
Sea $f(z)$ una función univaluada y continua de la variable compleja $z = x + iy$ en un

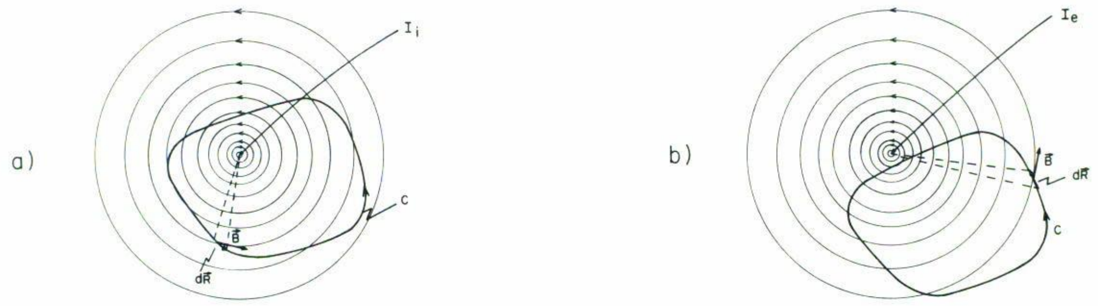

FIGURA 2. Circulación magnética a través de una curva cerrada C asociada a corrientes eléctricas en el interior (a) y exterior (b) de la superficie delimitada por esa curva.

dominio D. Se dice que $f(z)$ es diferenciable en el punto z_0 de D si existe el límite

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

como un número finito y es independiente del modo en que el incremento complejo Δz tiende a cero. El límite, en caso de existir, se representa como $f'(z_0)$ y se llama la derivada en z_0.

La función $f(z)$ es diferenciable en D si es diferenciable en todos los puntos de D, y entonces se dice que es una función analítica de z en D. También se dice que $f(z)$ es analítica en $z = z_0$ si es analítica en alguna vecindad-ϵ de z_0.

Nótese que las funciones analíticas son univaluadas, continuas y diferenciables en su dominio de definición. En vez del calificativo de analítica también se usan los términos holomorfa, monogénica y regular.

Teorema de Cauchy.
Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio D. Sea C una curva simple rectificable y cerrada en D, tal que $f(z)$ es analítica dentro y sobre C, entonces

$$\oint_C f(z)\, dz = 0. \tag{10}$$

Es decir, la integral de línea alrededor de esa curva de la función analítica es nula.

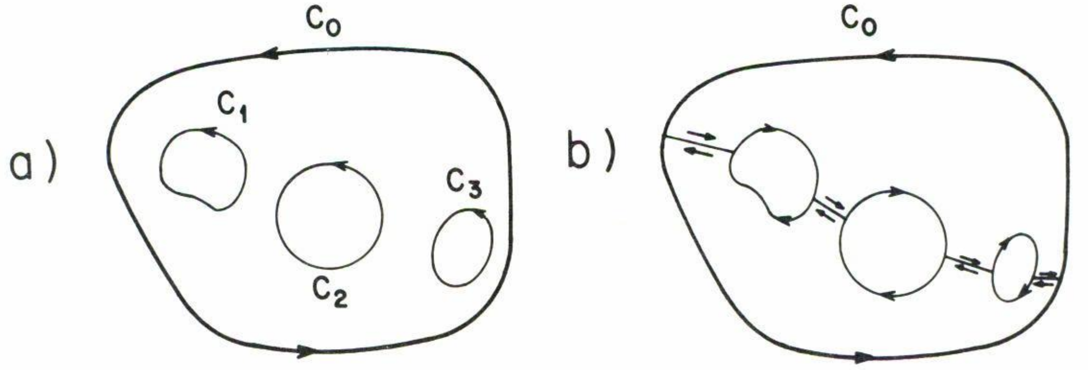

FIGURA 3. Conversión de una región: a) múltiplemente conectada en una región; b) simplemente conectada en la que es válido el teorema de Cauchy.

Esta versión del teorema involucra regiones simplemente conectadas. A continuación se enuncia la versión para una región múltiplemente conectada que se puede convertir en una región simplemente conectada (véase Fig. 3).

Sean $C_0, C_1, \ldots C_n$, $(n+1)$ curvas simples rectificables y cerradas en el plano y que tienen orientación positiva, es decir, que se recorren en el sentido opuesto a las manecillas del reloj. Supóngase que $C_j \subset (C_k)_\mathrm{e} \cap (C_0)_\mathrm{i}$, para $j, k = 1, 2, \ldots, n$, y $j \neq k$, y que $f(z)$ es una función analítica en un dominio D que contiene al dominio cerrado

$$D_0 = (C_0)_\mathrm{i} \cap (C_1)_\mathrm{e} \cap (C_z)_\mathrm{e} \cap \cdots \cap (C_n)_\mathrm{e}, \tag{11}$$

donde los subíndices i y e denotan el interior y el exterior de las curvas, entonces

$$\oint_{C_0} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,dz. \tag{12}$$

Es decir, la integral de línea alrededor de la curva más externa es igual a la suma de las integrales de línea sobre las curvas internas.

La importancia de la versión general del teorema es la posibilidad de deformar los contornos de integración en el dominio en que el integrando es una función analítica.

Teorema de la integral de Cauchy.
Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio D. Sea C una curva simple rectificable y cerrada en D, tal que $f(z)$ es analítica dentro y sobre C, entonces para cualquier punto en el interior de la curva $z \in C_i$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}. \tag{13}$$

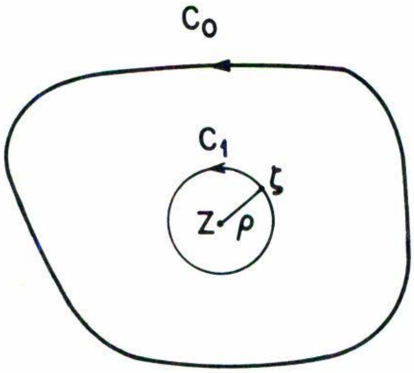

FIGURA 4. Integración alrededor de la curva C_0 es equivalente a la integración alrededor del círculo C_1, incluida la situación límite en que el radio ρ tiende a anularse.

La demostración de este teorema se basa en que el integrando en la Ec. (13) no es una función analítica en el punto $\zeta = z \in D$, pero sí lo es en el dominio $D_0 = (C)_{\mathrm{i}} \cap (C_1)_{\mathrm{e}}$, donde C_1 es la circunferencia $\zeta - z = \rho e^{i\varphi}$ centrada en ese punto singular y con un radio $\rho \to 0$, como se ilustra en la Fig. 4. La aplicación de la Ec. (12) a la integral sobre la curva C,

$$\oint_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}, \tag{14}$$

indica que su cálculo se reduce al cálculo de la integral alrededor de la circunferencia C_1, para la cual $d\zeta = \rho e^{i\varphi}\, i d\varphi$ y, por lo tanto,

$$\oint_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \lim_{\rho \to 0} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \rho e^{i\varphi}) \rho e^{i\varphi}\, i d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = 2\pi i f(z), \tag{15}$$

y de aquí sigue la llamada fórmula integral de Cauchy [Eq. (13)]. l.q.q.d.

Este teorema indica que los valores de la función analítica en la región interior de la curva C están determinadas por sus valores sobre la frontera C misma. Adicionalmente, de la Ec. (12) se obtiene la generalización

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \tag{16}$$

que implica que una función no solamente tiene una derivada de primer orden $f'(z)$, sino de todos los órdenes $n = 1, 2, 3, \ldots$ Esto a su vez hace posible el desarrollo de funciones analíticas en series de Taylor.

Definición 2: Funciones meromorfas.
Una función $f(z)$ se dice que es meromorfa en un dominio D si las singularidades que tiene en D son solamente polos.

Definición 3: Polos y residuos.
Sea $f(z)$ una función analítica en $0 < |z - z_0| < R$ y representada por la serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{17}$$

Se dice que la función tiene un polo en $z = z_0$ y un residuo

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta)\, d\zeta, \tag{18}$$

donde la integral se evalúa alrededor del círculo $|z - z_0| = \rho < R$.

Teorema de los residuos de Cauchy.
Supóngase que $f(z)$ es una función analítica dentro y sobre una curva simple cerrada rectificable y orientada C, excepto por un número finito de singularidades aisladas, ninguna de las cuales se encuentra sobre C, entonces

$$\oint_C f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i S[f; C_i], \tag{19}$$

donde $S[f; c_i]$ es la suma de los residuos de $f(z)$ en el interior de C.

Alternativamente, se podría decir que $f(z)$ es meromorfa en C_i y analítica sobre C. la Ec. (13) es un caso particular de la Ec. (19) cuando hay un solo polo, y la Ec. (10) sigue de la Ec. (19) cuando $f(z)$ es analítica en C_i.

D) Circulación magnética expresada como teorema de los residuos

La posibilidad de expresar la integral de circulación de la inducción magnética asociada a un conjunto de corrientes eléctricas en alambres rectos infinitos paralelos entre sí [Ec. (9)] bajo la forma del teorema de los residuos [Ec. (19)], está sugerida por las siguientes correspondencias entre las propiedades del campo de inducción magnética y de las funciones meromorfas: i) El campo de la Ec. (8) tiene un número finito de singularidades puntuales $\vec{R} = \vec{R}_i$; en cualquier plano transversal a las corrientes, esas posiciones de las fuentes se identifican con polos. ii) El valor de la integral de circulación magnética de la Ec. (9) no cambia si el circuito de integración se cambia manteniendo las mismas fuentes en su interior y exterior; es decir, se da la misma situación que permite deformar el contorno de integración en la evaluación de integrales de funciones analíticas y meromorfas [Ecs. (12) y (19)]. iii) La contribución de cada fuente en el interior del circuito a la circulación magnética es proporcional a la intensidad de la corriente eléctrica [Ec. (9)]; las intensidades correspondients se identifican como proporcionales a los residuos de la Ec. (19). A continuación se muestra que efectivamente la circulación magnética de la Ec. (9) se puede expresar en la forma del teorema de los residuos de la Ec. (19). Para esto se hace uso de las correspondencias entre las representaciones de puntos, desplazamientos e integraciones en un plano usando vectores y números complejos, respectivamente:

$$\vec{R} - \vec{R}_i = \hat{\rho}\rho \leftrightarrow z - z_i = \rho e^{i\varphi_i}, \tag{20a}$$

$$\hat{\rho} = \hat{\imath}\cos\varphi_i + \hat{\jmath}\,\mathrm{sen}\,\varphi_i \leftrightarrow e^{i\varphi_i} = \cos\varphi_i + i\,\mathrm{sen}\,\varphi_i, \tag{20b}$$

$$d\vec{R} = \hat{\rho}\,d\rho + \hat{\varphi}\rho\,d\varphi \leftrightarrow dz = e^{i\varphi_i}\,d\rho + ie^{i\varphi_i}\rho\,d\varphi, \tag{20c}$$

$$\hat{\varphi} = -\hat{\imath}\,\mathrm{sen}\,\varphi_i + \hat{\jmath}\cos\varphi_i \leftrightarrow ie^{i\varphi_i} = -\,\mathrm{sen}\,\varphi_i + i\cos\varphi_i, \tag{20d}$$

$$dR_\perp = \rho\,d\varphi_i \leftrightarrow dz = ie^{i\varphi_i}\rho\,d\varphi_i. \tag{20e}$$

Recuérdese que el elemento de integración efectivo en la evaluación de la circulación magnética es el desplazamiento transversal $dR_\perp$ [Ec. (9)] y en la evaluación de la integral de Cauchy es el desplazamiento tangencial al círculo centrado en el polo [Ec. (15)]. Desde luego, la contribución nula a ambas integrales de los desplazamientos radiales es lo que hace posible la deformación de los contornos de integración. Para darle la forma de una integral en el plano complejo a la Ec. (9), hacemos las siguientes identificaciones:

$$|\vec{R} - \vec{R}_i|e^{i\varphi_i} = z - z_i \tag{20a}$$

$$dR_\perp e^{i\varphi_i} = dz/i, \tag{20e}$$

y la de la función meromorfa,

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\hat{\varphi}_i \cdot \vec{B}_i(\vec{R})}{e^{i\varphi_i}} \leftrightarrow f(z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{2I_i}{z - z_i}. \tag{20f}$$

Por lo tanto, la Ec. (9) toma la forma

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{B}(\vec{R}) \cdot d\vec{R} &= \sum_{i=1}^{N} 2I_i \oint_C \frac{dz}{i(z - z_i)} \\ &= \frac{1}{i}\oint_C f(z)\,dz = 2\pi \sum_{i\subset C_i} (2I_i),\end{aligned} \tag{21}$$

que es equivalente al teorema de los residuos [Ec. (19)], siendo $z = z_i$ los polos y $2I_i$ los residuos de la función de la Ec. ($20f$) en el interior del contorno de integración.

E) Flujo eléctrico expresado como teorema de los residuos

La Ec. (5) es la expresión general de la ley de Gauss para cualquier distribución de cargas y el campo de intensidad eléctrico asociado. En esta subsección se consideran los campos bidimensionales del tipo de la Ec. (4) asociados a distribuciones uniformes de carga eléctrica en líneas rectas infinitas paralelas con densidad λ_i y posición $\vec{R}_i$,

$$\vec{E}(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{2\lambda_i(\widehat{\vec{R}-\vec{R}_i})}{|\vec{R}-\vec{R}_i|}, \tag{22}$$

obtenidos por superposición. A continuación se formula la ley de Gauss para tales situaciones calculando el flujo del campo de intensidad eléctrica a través de un cilindro con generatrices paralelas a las fuentes y bases transversales a las fuentes. Dado el carácter radial de los campos de la Ec. (22) su contribución al flujo a través de las bases del cilindro es nulo; por lo tanto el flujo a través del cilindro se reduce a la contribución a través de la cara lateral. Si h es la altura del cilindro y $d\vec{R}$ describe el elemento de desplazamiento tangencial a la curva C de intersección del cilindro con planos transversales a las fuentes, entonces el elemento de área para la evaluación del flujo es

$$d\vec{a} = d\vec{R} \times \hat{k} h; \tag{23}$$

y el flujo del campo de la Ec. (22) a través del cilindro se reduce a la integral alrededor de la curva C:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} &= \sum_{i=1}^{N} 2\lambda_i \oint_C \frac{(\widehat{\vec{R}-\vec{R}_i}) \cdot d\vec{R} \times \hat{k} h}{|\vec{R}-\vec{R}_i|} \\ &= \sum_{i=1}^{N} 2\lambda_i h \oint_C \frac{\hat{k} \cdot (\widehat{\vec{R}-\vec{R}_i}) \times d\hat{R}}{|\vec{R}-\vec{R}_i|} \\ &= 4\pi \sum_{i \subset C_i} \lambda_i h. \end{aligned} \tag{24}$$

Nótese que el cambiar en orden cíclico el orden de los factores en el triple producto escalar, las integrales que aparecen coinciden con las que aparecieron en el cálculo de la circulación magnética [Ec.(9)] y se identifican con el ángulo subtendido por la curva de integración desde la posición de la fuente, siendo sus valores 2π o 0, según que la fuente esté en el interior o en el exterior de la curva. La Ec. (4) indica que el flujo de la intensidad eléctrica es proporcional a la suma de las cargas $\lambda_i h$ contenidas dentro del cilindro, coincidiendo con la Ec. (5).

Al tomar en cuenta la analogía de las formas respectivas de las Ecs. (24) y (9) es claro que la ley de Gauss para la situación bidimensional también se puede expresar en la forma del teorema del residuo. Además de usar las Ecs. (20a) y (20e) se hace la identificación de la función meromorfa:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\widehat{(\vec{R}-\vec{R}_i)} \cdot \vec{E}_i(\vec{R})}{e^{i\varphi_i}} \leftrightarrow f(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2\lambda_i}{z-z_i}, \tag{20g}$$

para reescribir la Ec. (24) como

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E}(\vec{R}) \cdot d\vec{a} &= \sum_{i=1}^{n} 2\lambda_i h \oint_C \frac{dz}{i(z-z_i)} \\ &= \frac{h}{i} \oint_C f(z)\, dz = 2\pi \sum_{i \subset C_i} 2\lambda_i h, \end{aligned} \tag{25}$$

que es equivalente al teorema de los residuos [Ec. (19)], siendo $z = z_i$ los polos y $2\lambda_i$ los residuos de la función de la Ec. (20g) dentro del contorno de integración.

3. Contribuciones de Gauss y Cauchy a la teoría de funciones analíticas

Para el estudiante actual de física o matemáticas no hay duda sobre el hecho de que Cauchy realizó contribuciones fundamentales para el desarrollo de la teoría de funciones analíticas [4,6,7], las cuales quedan ilustradas a través de los teoremas de la Sec. 2.C. Otra ilustración son las bien conocidas y llamadas condiciones de Cauchy-Riemann sobre las partes real e imaginaria de una función analítica $f(z) = \psi(x,y) + i\phi(x,y)$, y que están íntimamente asociadas al carácter analítico de la función. Por otra parte, Gauss no dio a conocer públicamente durante su vida las investigaciones que realizó sobre estos temas. En consecuencia esas investigaciones no son suficientemente conocidas ni en la actualidad, y también permiten entender por qué cuando el joven Cauchy empezó a dar a conocer sus brillantes descubrimientos, Gauss, el matemático ya reconocido, simplemente los ignoró y dio lugar a que fuera criticado por su falta de cordialidad en aceptar el trabajo de otros, especialmente de los jóvenes [8].

En el resto de esta sección se sitúa a ambos personajes en el ambiente y la época en que vivieron, y se destacan sus respectivas contribuciones a la teoría de funciones analíticas, señalando algunos documentos que aclaran el orden cronológico de las investigaciones correspondientes.

Karl Friedrich Gauss vivió en Alemania de 1777 a 1855. Desde pequeño mostró su aptitud para las matemáticas. En su tesis doctoral, escrita cuando tenía 22 años, desarrolló el concepto de los números complejos y demostró el teorema fundamental del álgebra. En su obra *Disquisitiones Aritmeticæ*, escrita de 1796 a 1798, pero publicada hasta 1801, él incluyó sus investigaciones sobre esa parte de las matemáticas relacionadas con números enteros y también fracciones, pero excluyendo números irracionales: teoría de congruencias, teoría de residuos cuadráticos, teoría de formas cuadráticas binarias y la teoría de congruencias binomiales.

En esa obra, él reprodujo resultados previamente obtenidos de manera suelta por Fermat, Euler, Lagrange y Legendre, pero que en su presentación son consecuencias de las formulaciones y soluciones de problemas relevantes que combinan en un patrón perfecto la aritmética, el álgebra y la geometría, conjuntamente. Lagrange y Legendre reconocieron el talento matemático de Gauss al leer este trabajo. Las investigaciones subsecuentes de Gauss fueron en el área de matemática-física cubriendo temas de mecánica celeste, geodesia, gravitación, magnetismo, electricidad e hidrodinámica. Su obra *Theoria Motus Corporum Coelestium*, de 1809, desarrollada en conexión con el cálculo de la órbita del asteroide Ceres y aplicada exitosamente para el asteroide Pallas, le ganó el reconocimiento de Laplace, aunque no contribuyó con nada nuevo a las matemáticas. De sus mediciones de la superficie terrestre desarrolló una teoría de superficies curvas y reconoció la posibilidad de geometrías no-euclidianas. Sus estudios de gravitación, magnetismo y electricidad lo llevaron a sentar las bases de la teoría moderna del potencial. En sus estudios de capilaridad desarrolló los principios variacionales que contribuyeron al establecimiento del principio de conservación de la energía. Aparte de estos trabajos y resultados que Gauss publicó durante su vida, en 1898 se dio a conocer la existencia de su *Notizen-journal* o *Diario de Anotaciones*, en el que consignó 146 descripciones brevísimas de descubrimientos o resultados de cálculos en el período del 30 de marzo de 1796 al 9 de julio de 1814. Esas anotaciones dan testimonio de la mente prolífica de Gauss y de su prioridad en el estudio de muchos temas de matemáticas.

Augustin Louis Cauchy vivió en Francia de 1789 a 1857. Hacia 1810, cuando trabajaba como ingeniero militar en Cherbourg, produjo varios trabajos de matemáticas importantes. En uno de ellos resolvió un problema que le envió Lagrange y que establece una relación entre el número de aristas, el número de vértices y el número de caras de un poliedro convexo y la solución del problema de Fermat sobre números poligonales. En 1813, ya en París, Cauchy decidió dedicarse por completo a las matemáticas siguiendo los consejos de Lagrange y Laplace. En 1814 publicó la memoria sobre integrales definidas que sirvió de base para su teoría de las funciones complejas de 1825. En matemáticas también contribuyó a la teoría de números y a la teoría de errores, y en matemática-física a la propagación de ondas en fluidos, a la teoría de la elasticidad y a la comprensión del movimiento del asteroide Pallas.

De las biografías de Gauss y Cauchy se reconoce que además de haber sido contemporáneos, ambos contribuyeron a establecer el rigor en las investigaciones matemáticas y sus trabajos recibieron el reconocimiento por parte de los colegas más establecidos de su época. Algunas de sus líneas de investigación coincidieron en la temática pero no en el tiempo, como es el caso de la teoría de las funciones analíticas. Cauchy publicó su teorema fundamental en su *Mémoire sur les Intégrales Définies Prises entre des Limites Imaginaires*, en 1825. Gauss había estudiado el mismo problema desde 1811, como se infiere de una carta que envió a Bessel a fines de ese año; en las obras completas de Gauss esa carta se reproduce bajo el título "Uber das Wesen und die Definition der Functionen" y en ella plantea las condiciones bajo las cuales la integral de línea $\oint f(z)\, dz$ es cero, y reconoce que esas condiciones son las de "uniformidad" y "monogenicidad" de la función

$f(z)$. Con esta información el lector puede entender que para Gauss ese trabajo de Cauchy no era novedoso.

4. DISCUSIÓN

En la Sec. 2 se formularon las leyes de Gauss de la electrostática y de Ampère de la magnetostática, así como el teorema de los residuos de Cauchy y se mostró que las primeras aplicadas a situaciones bidimensionales conducen a la forma del tercero. En las carreras de física el estudio de electricidad y magnetismo generalmente se da en la primera mitad de la carrera, y el estudio de las funciones de variables complejas ocurre en la segunda mitad. El contenido del presente trabajo puede aprovecharse para ilustrar cómo la familiaridad de los alumnos con los fenómenos de electrostática y magnetostática constituyen una base para que comprendan el significado de los teoremas de Cauchy.

El lector habrá notado que en la Sec. 2 primero se estableció la conexión en D) de la ley de Ampère con el teorema de los residuos, y después en E) se hizo lo correspondiente con la ley de Gauss. La razón es que la ley de Ampère involucra desde un principio una integral de línea, y en cambio la ley de Gauss involucra una integral de superficie; la última se convierte en una integral de línea solamente en el caso bidimensional estudiado en E), y desde luego se aprovecha la parte geométrica que comparte con el caso de D). Es interesante hacer notar que la ley de Gauss se puede ver a su vez como la extensión natural del teorema de los residuos a espacios con otras dimensiones, de los cuales los casos unidimensional y tridimensional son ya familiares para el estudiante de electrostática. En particular, la correspondencia entre campos armónicos y funciones analíticas es el punto clave en esta extensión.

Para concluir la discusión del problema específico abordado en este trabajo podemos decir que los fenómenos electrostáticos y magnetostáticos bidimensionales hablan el lenguaje de las funciones meromórficas. La moraleja para el problema general del orden de la adquisición de los conocimientos de física y de matemáticas se puede resumir en las variantes del dicho general "la naturaleza se expresa en el lenguaje matemático" o "las matemáticas describen a la naturaleza". El estudiante y el maestro puede escoger una variante o la otra, adaptada a la situación concreta. La Sec. 3 ilustra que los matemáticos reconocidos han desarrollado las matemáticas por las matemáticas mismas, pero también a partir del estudio de la naturaleza. Para Gauss ambas variantes eran lo mismo [8].

REFERENCIAS

1. E. Ley Koo, *Rev. Mex. Fís.* **27** (1981) 449.
2. W.K.H. Panofsky y M. Phillips, *Classical electricity and magnetism*, Addison-Wesley, Reading (1962) p. 61.
3. R.H. Good Jr. y T.J. Nelson, *Classical theory of electric and magnetic fields*, Academic Press, New York (1971) p. 147.
4. G. Arfken, *Mathematical methods for physicists*, Segunda Edición, Academic Press, New York (1970) Cap. 7, p. 302
5. D. Halliday and R. Resnick, *Physics for students of science and engineering*, Parte II, Wiley, New York (1960), Caps. 28, 33 y 34.

6. R.V. Churchill, *Introduction to complex variables and applications*, McGraw-Hill, New York (1948), pp. 32, 82, 90 y 118.
7. E. Hille, *Analytic function theory*, Vol. I, Ginn and Co., Boston (1959) pp. 72, 163, 175, 212 y 241.
8. E.T. Bell, "The Prince of Mathematicians", en: *Men of mathematics* (1937), reimpreso en J.R. Newman, *The World of Mathematics*, Simon and Schuster, New York (1956) p. 294.