

Optimización de una máquina de Carnot endorreversible

M. HERNÁNDEZ-CONTRERAS*

Departamento de Física

Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Apartdo postal 14-740, 07000, México, D.F., México

Recibido el 8 de abril de 1992; aceptado el 13 de mayo de 1993

RESUMEN. La eficiencia (η) de una máquina endorreversible de Carnot y el coeficiente de rendimiento (ω) de un refrigerador endorreversible de Carnot son calculados utilizando el método de la termodinámica de tiempo finito. Dentro del método de potencia máxima introducido por Agrawal y Menon se considera un modelo lineal para la razón de cambio del volumen. El valor de η así obtenido está en buen acuerdo con los datos experimentales, no así el de ω . Comparamos con los resultados de otros autores.

ABSTRACT. The efficiency (η) of an endoreversible Carnot engine and the coefficient of performance (ω) of an endoreversible Carnot refrigerator are calculated using the method of finite time thermodynamics. We considered a linear model for the volume change rate, within the maximum power method introduced by Agrawal and Menon. The η value is in good agreement with experimental observations while the ω is not. Comparison with other results by other authors is done.

PACS: 44.10.10.+i; 44.25+f; 44.90.+c

1. INTRODUCCIÓN

La termodinámica de tiempos finitos se inició hace dos décadas con el trabajo de Curzon-Ahlborn (C-A), quienes consideraron una máquina de Carnot endorreversible (Fig. 1) con la particularidad de un modelo de transferencia de calor lineal [1] a través de las ramas isotermas. Calcularon la eficiencia η a máxima potencia de salida, obteniendo la fórmula $\eta_{C-A} = 1 - (T_3/T_1)^{1/2}$, donde T_1 y T_3 son la temperatura máxima y mínima en el ciclo, respectivamente. Esta fórmula aproxima bien los valores observados de la eficiencia de una gran variedad de máquinas térmicas [1,9]. El problema de la optimización de la potencia de salida de tales máquinas, incluyendo restricciones sobre la razón de cambio de volumen (constante y periódico), con adiabáticas *instantáneas*, ha sido analizado por Y.B. Band *et al.* [2] y J.M. Gordon y M. Huleihil [3]. Esos autores obtuvieron expresiones para varios parámetros importantes de una máquina endorreversible; la máxima potencia de salida P y la eficiencia correspondiente η (eficiencia C-A). Sin embargo, este enfoque falla cuando se aplica un ciclo inverso (un refrigerador). No se ha tenido éxito para obtener una expresión del coeficiente de rendimiento ω en términos únicamente de las temperaturas de

*Dirección actual: Instituto de Física "Manuel Sandoval Vallarta", UASLP. Alvaro Obregón 64, Apartado postal 629, 78000, San Luis Potosí, SLP, México.

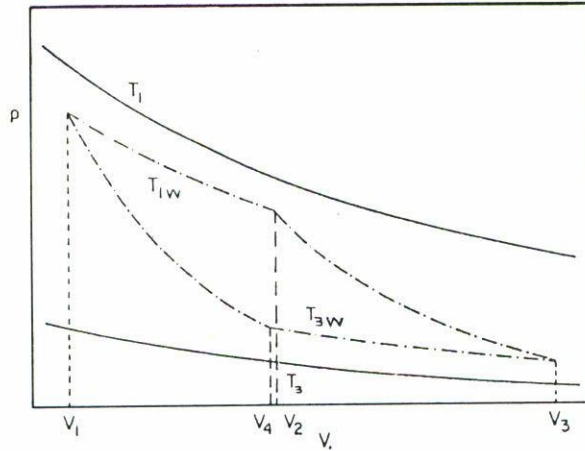


FIGURA 1. Diagrama PV de un ciclo isotérmico. Las temperaturas de los reservorios son T_1 y T_3 . El fluido se expande isotérmicamente (temperatura $T_{1\omega}$) de v_1 a v_2 y luego adiabáticamente a v_3 . La compresión es isotérmica hasta v_4 y adiabática hasta v_1 , $T_{1\omega} = T_1 - x$, $T_{3\omega} = T_3 + y$. (El refrigerador se realiza en sentido inverso con $T_{1\omega} = T_1 + x$, $T_{3\omega} = T_3 - y$.) Debido a la diferencia de temperaturas entre el reservorio y el gas en el ciclo, fluye calor irreversiblemente a través de las isotérmicas. (Fig. 1 reimpresa de la Ref. [5]).

los reservorios. Recientemente, Agrawal y Menon (AM) [4] propusieron un método para calcular el coeficiente de rendimiento de un refrigerador a máxima razón de enfriamiento, que conduce a una expresión para el coeficiente de rendimiento como función de varios parámetros (véase la siguiente sección). Ellos determinaron el tiempo en las adiabáticas del ciclo con la suposición de una razón temporal de cambio de volumen constante, que es el modelo más simple. En este trabajo utilizamos este enfoque de optimización y consideramos un modelo lineal para la razón de cambio del volumen en un motor [5]. En la Sec. 2 calculamos η y ω con una razón de cambio del volumen lineal. Los resultados para los tiempos en las isothermas y adiabáticas se dan también en esta sección. En la Sec. 3 comparamos nuestros resultados con los valores observados y los obtenidos por AM y C-A, y nuestro valor del coeficiente de rendimiento (ω) resulta alejado del observado.

2. OPTIMIZACIÓN CON VARIACIÓN TEMPORAL EN EL VOLUMEN LINEAL

D. Gutkowicz *et al.* [5] obtuvieron ecuaciones termodinámicas para la expansión irreversible y compresión de un gas ideal en una máquina C-A. El flujo de calor a través de la rama superior está dada por $dQ/dt = \alpha(T - T_\omega)$, donde T_ω es la temperatura del gas, T la temperatura del reservorio y α es la conductancia constante. A través de la primera rama isoterma, hay una expansión de v_1 a v_2 y usando la primera ley de la termodinámica

Gutkowicz *et al.* obtienen

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v}{f_1}, \quad (1)$$

donde $f_1 = RT_{1\omega}/\alpha(T_1 - T_{1\omega})$, y R es la constante del gas ideal. A través de la rama adiabática (expansión de v_2 a v_3), se supone la misma ecuación; análogas ecuaciones son válidas en las otras dos ramas:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v}{f_2}, \quad f_2 = \frac{RT_{3\omega}}{\beta(T_{3\omega} - T_3)}. \quad (2)$$

Empezamos nuestro cálculo de la potencia de salida P de un motor tipo C-A, dentro del enfoque de AM. Usando las relaciones válidas para un ciclo de Carnot ideal [4],

$$\begin{aligned} \frac{Q_1}{Q_3} &= \frac{T_1 - x}{T_3 + y} \equiv a, \\ \frac{v_3}{v_2} &= \frac{v_4}{v_1} \equiv a^c, \end{aligned} \quad (3)$$

donde $c = c_v/R$, con c_v la capacidad calorífica a volumen constante y $t_1 = Q_1/\alpha x$, $t_3 = Q_3/\beta y$, que resultan de la integración de la ley de Newton del enfriamiento, con $x = -T_{1\omega} + T_1$, $y = -T_3 + T_{3\omega}$. Así, utilizando las Ecs. (1)-(3) junto con los tiempos newtonianos se tiene que

$$\tau = Q_3 \left[\frac{a}{\alpha x} + \frac{ac \ln a}{\alpha x \ln(v_2/v_1)} + \frac{1}{\beta y} + \frac{c \ln a}{\beta y \ln(v_2/v_1)} \right] \quad (4)$$

y la potencia de salida

$$P = \frac{(a-1)}{\frac{a}{\alpha x} + \frac{1}{\beta y} + \frac{ac \ln a}{\alpha x \ln(v_2/v_1)} + \frac{c \ln a}{\beta y \ln(v_2/v_1)}}, \quad (5)$$

donde $P(x, y, a) = W/\tau$ y $W = Q_3(a-1)$ y hemos usado $f_1 = aQ_3/[\alpha x \ln(v_2/v_1)]$, $f_2 = Q_3/[\beta y \ln(v_2/v_1)]$ y las Ecs. (1)-(3). La Ec. (5) está determinada en términos del parámetro a , las variables x , y y las constantes α , β , v_2/v_1 , T_1 , T_3 y c . En el método de AM el extremo de la Ec. (5) se obtiene por medio de $\partial P/\partial a = 0$. Utilizando la técnica de multiplicadores de Lagrange [6], obtenemos la ecuación

$$y = \pm \frac{\sqrt{\alpha/\beta}(T_1 - aT_3)}{a(1 + \sqrt{\alpha/\beta})}, \quad (6)$$

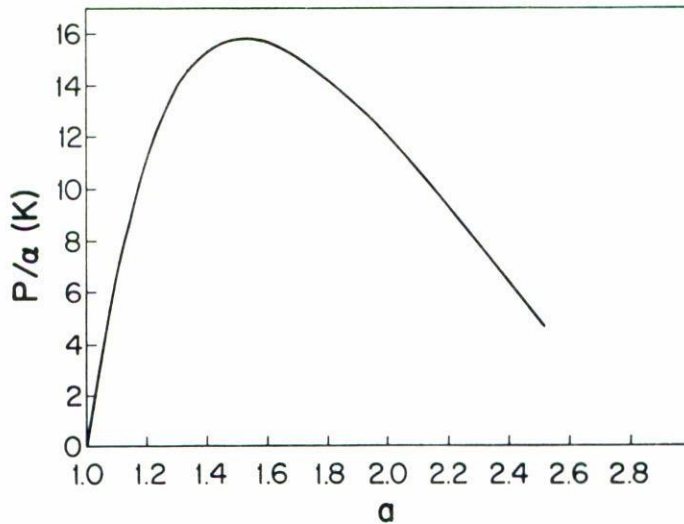


FIGURA 2. Potencia P/α del motor C-A, contra a y valores fijos de $v_2/v_1 = 16$ y $\alpha/\beta = 2$. El máximo se obtiene en $a = 1.52$ que da la eficiencia $\eta = 34\%$.

donde el signo + se debe mantener por consistencia física [7]. La condición de optimización para el motor que resulta es

$$a^2 T_3 \left(-1 + \frac{c}{q} \right) - \frac{a(T_1 + T_3)c}{q} + T_1 \left(1 + \frac{c}{q} \right) - \frac{a^2 T_3 c \ln a}{q} + \frac{c T_1 \ln a}{q} = 0, \quad (7)$$

que es una ecuación trascendental, donde $q = \ln(v_2/v_1)$.

La potencia de salida P presenta un máximo como se muestra en la gráfica de P/α contra a en la Fig. 2. Esta gráfica se obtuvo tomando valores fijos de la inversa de la razón de compresión $v_2/v_1 = 16$, $\alpha/\beta = 2$, $T_1 = 838$ K, $T_3 = 298$ K y $c = 3.767$ de los datos de la West Turrock (UK) Coal Fired Steam Plant, en analogía con Agrawal y Menon (hemos usado los mismos valores para propósitos de comparación). El pico corresponde a $a = 1.52$, esto da la eficiencia $\eta = 1 - 1/a = 34\%$, mientras que el valor observado es $\eta = 36\%$.

2.1 Optimización del refrigerador C-A

En este caso el parámetro a está dado por $a = (T_1 + x)/(T_3 - y)$ y $T_{1\omega} = T_1 + x$, $T_{3\omega} = T_3 - y$. El tiempo total τ para completar el ciclo es el de la Ec. (4). Por lo tanto, la razón de enfriamiento es

$$R = \frac{1}{\frac{a}{\alpha x} + \frac{ac \ln a}{\alpha x q} + \frac{1}{\beta y} + \frac{c \ln a}{\beta y q}}. \quad (8)$$

Aplicando el método de AM ($\partial R/\partial a = 0$) y multiplicadores de Lagrange, obtenemos la ecuación

$$y = + \frac{\sqrt{\alpha/\beta}(-T_1 + aT_3)}{a(1 + \sqrt{\alpha/\beta})} \quad (9)$$

y la condición de optimización para refrigerador

$$\frac{T_1 c \ln a}{q} - \frac{aT_3 c}{q} + T_1 \left(1 + \frac{c}{q}\right) = 0, \quad (10)$$

de la cual se obtiene a . Tomando los valores $T_1 = 316$ K, $T_3 = 275$ K, $c = 2.558$ y la inversa de la razón de compresión $v_2/v_1 = 16$, $\alpha/\beta = 2$ [4]. Se obtiene la gráfica de R/α contra a como se muestra en la Fig. 3. El valor de $a = 3.9$ que corresponde al pico se dedujo de la Ec. (10), este valor da el coeficiente de rendimiento $\omega = 1/(a - 1) = 0.34$, el cual no es un buen resultado si se tiene en cuenta que los valores observados de ω en refrigeradores reales son $\omega = 0.75-1.75$. Se puede observar un hecho interesante en las Ecs. (7) y (10), éstas implican que el parámetro a es independiente de las constantes α y β . Es decir, η y ω tienen valores independientes de las conductancias α y β a pesar de que la potencia de salida y la razón de enfriamiento toman diferentes valores [véanse las Ecs. (5) y (8)]. Este comportamiento es característico de las máquinas térmicas endorreversibles de Carnot, como se muestra en la Ref. [8]. Al analizar el modelo de Gutkowicz obtenemos los tiempos $t_1 = 0.46$ s (0.14 s) y $t_3 = 0.66$ s (0.31 s) en la primera y segunda ramas isotérmicas para el motor (refrigerador) y $t_2 = 0.26$ s (0.18 s), $t_4 = 0.37$ s (0.09 s) en las ramas adiabáticas, por lo que el modelo de Gutkowicz predice incorrectamente los tiempos para el refrigerador, dado que la duración del proceso adiabático es menor que el isotérmico, y para el refrigerador en este modelo se tiene que t_2 es mayor que t_1 . Hemos usado $\alpha = 209$ J/sK para la conductancia en la isoterma superior y 1 mol de gas ideal.

3. CONCLUSIONES

La Tabla I muestra la comparación de los resultados teóricos y los valores observados para η y ω con dos modelos diferentes para dv/dt . La razón temporal de cambio de volumen que hemos estudiado aquí [5] fue propuesta originalmente para motores. La hipótesis de AM de considerar esta razón temporal de cambio de volumen constante e independiente del volumen tanto para motores como para refrigeradores, mejora el valor con respecto a nuestro valor del coeficiente de rendimiento ω , esto nos dice que la razón dv/dt para refrigeradores debe tener una forma funcional no lineal en el volumen v , contrario a nuestra suposición de considerar una dependencia del volumen lineal. Por otro lado, nuestro valor de η es más próximo al observado que el de AM [4] y el de C-A [1], lo cual se debe al hecho de haber tomado un modelo para dv/dt que tiene en cuenta la expansión y compresión isotérmica irreversible en el ciclo.

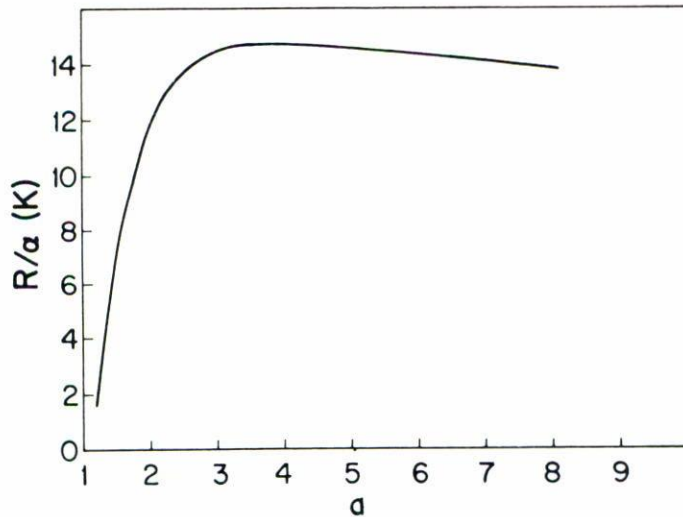


FIGURA 3. Razón de refrigeración R/α del refrigerador C-A contra a con valores fijos de $v_2/v_1 = 16$ y $\alpha/\beta = 2$. El máximo se obtiene en $a = 3.9$ el cual da el coeficiente de rendimiento $\omega = 0.34$.

TABLA I. Eficiencia (η) y coeficiente de rendimiento (ω) de la máquina C-A a máxima potencia de salida y razón de enfriamiento, con dos modelos de razón temporal de volumen. Las temperaturas y valores usados son los de la Sec. 2. Como referencia, las eficiencias de Carnot (C) y de Curzon-Ahlborn (C-A) son, respectivamente, $\eta_C = 1 - T_3/T_1 = 64\%$, $\eta_{C-A} = 1 - (T_3/T_1)^{1/2} = 40\%$.

	Valores observados	Modelo	
		Agrawal y Menon	Este trabajo
Eficiencia de la planta		$\frac{dv}{dt} = \text{cte.}$	$\frac{dv}{dt} = \frac{v}{A}, \quad A = f_1, f_2$
West Turrock (UK) Motor	$\eta_{\text{obs}} = 36\%$	$\eta_{\text{AM}} = 24\%$	$\eta = 34\%$
Refrigerador	$\omega_{\text{obs}} = 0.75-1.75$	$\omega = 1.27$	$\omega = 0.34$

4. AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecerle a los Doctores J.L. Arauz, J.L. Lucio y F. Angulo la revisión de este manuscrito. Es un placer agradecerle al árbitro las observaciones hechas y el recomendarme la Ref. [9].

REFERENCIAS

1. F.L. Curzon y Ahlborn, *Am. J. of Phys.* **43** (1975) 22.
2. Y.B. Band, O. Kafri, P. Salamon, *J. appl. Phys.* **53** (1982) 29; *ibid.*, p. 8.
3. J.M. Gordon y M. Huleihil, *J. Appl. Phys.* **69** (1991) 1.
4. D.C. Agrawal y V.J. Menon, *J. Phys. A: Math. Gen.* **D3** (1990) 5319.

5. D. Gutkowicz-Krusin, I. Proccacia y J. Ross, *J. Chem. Phys.* **69** (1978) 3898.
6. P. Salomon, A. Nitzan, B. Andresen, R.S. Berry, *Phys. Rev. A* **21** (1980) 2115.
7. J.L. Torres, *Rev. Mex. Fís.* **34** (1988) 18.
8. F. Angulo-Brown, *Rev. Mex. Fís.* **37** (1991) 87; *J. Appl. Phys.* **69** (1991) 1.
9. A. Bejan, *Advanced Engineering Thermodynamics*, Wiley, N.Y. (1988) p. 408.