

Estudio teórico y numérico de la difracción en óptica electromagnética. II Teoría rigurosa de la difracción de un haz gaussiano por dos rendijas. Polarización T.E.

O. MATA-MENDEZ Y F. CHÁVEZ-RIVAS

*Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional*

Zacatenco, Lindavista, 07738 México, D.F., México

Recibido el 8 de febrero de 1993; aceptado el 13 de abril de 1993

RESUMEN. Presentamos una teoría rigurosa de la difracción de un haz electromagnético gaussiano que incide normalmente sobre dos rendijas iguales en una pantalla metálica, infinitamente conductora e infinitamente delgada. Se analizan numéricamente los coeficientes de transmisión y reflexión, así como sus respectivos patrones de difracción, en función de la longitud de onda, del ancho del haz y del acercamiento de las rendijas. También se estudia el acoplamiento entre rendijas

ABSTRACT. Based on Maxwell's equations and their associated boundary conditions we studied the diffraction of gaussian beams by two slits in a perfectly conducting thin screen. Numerical results for the transmission coefficient and diffraction patterns are presented.

PACS: 42.10.H.C.

1. INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas el estudio teórico y experimental de haces de ancho finito, en el visible y en la región de las microondas, ha despertado un gran interés debido a sus aplicaciones tanto en óptica [1-4] como en la física del estado sólido [5,6]. A pesar de la extensa literatura sobre el tema, existen escasas teorías rigurosas de la difracción de haces de ancho finito. Entenderemos por teoría rigurosa de la difracción, a una teoría que resuelva sin *aproximaciones*, el problema de la difracción utilizando las ecuaciones de Maxwell y las condiciones de frontera adecuadas a la estructura difractante bajo estudio. En estas teorías rigurosas se toman en cuenta los efectos de polarización, de borde y de espesor de la pantalla, así como la naturaleza de la pantalla misma (dieléctrica o metálica), dando lugar a que se tenga un intervalo de validez más amplio que el de las teorías aproximadas (limitado únicamente por la capacidad de los procesadores numéricos). En las teorías aproximadas, como por ejemplo la de Kirchhoff [4,7,8] o equivalentemente la de Rayleigh-Sommerfeld [4,7], estos efectos no son tomados en consideración, limitándose fuertemente su intervalo de aplicación.

En el artículo previo [4], que denotaremos en lo siguiente por I, comparamos la importante teoría aproximada de Rayleigh-Sommerfeld (TRS), para haces gaussianos incidiendo sobre una rendija, con una teoría rigurosa de la difracción. Esta comparación nos permitió de manera natural dividir el intervalo de valores posibles de λ/ℓ en dos partes, siendo λ la

longitud de onda y ℓ el ancho de la rendija. La primera parte, que corresponde a $\lambda/\ell < 0.2$, la definimos como la región escalar y mostramos que los efectos de polarización no son importantes aquí. Probamos también, que esta región escalar es el dominio de validez de la TRS. Además, encontramos el importante resultado de que el valor $\lambda/\ell = 0.2$ es una cota superior para la región de validez de cualquier teoría escalar. A la segunda parte, que corresponde a $0.2 < \lambda/\ell$, la llamamos región vectorial. De estos puntos de vista, la continuación lógica de I, sería la comparación de la TRS o de alguna otra teoría aproximada importante, como por ejemplo la teoría geométrica de la difracción, con una teoría rigurosa de la difracción para dos o más rendijas. Desgraciadamente, hasta donde sabemos, no existe una teoría rigurosa que tome en cuenta que el haz incidente es gaussiano. Aunque en la literatura existe una amplia variedad de teorías rigurosas de la difracción por N rendijas, $N = 2, 3, 4, \dots$, sólo se ha considerado el caso especial de ondas planas incidentes [9–14]. Luego, antes de continuar con nuestro estudio de teorías aproximadas, es necesario que dispongamos de una teoría rigurosa. Así, la finalidad de este artículo será la presentación de una teoría rigurosa de la difracción para haces gaussianos que inciden normalmente sobre dos rendijas iguales.

En este artículo, generalizando el método utilizado en el estudio de la difracción de haces electromagnéticos por una rendija [15] y por una acanaladura [6], presentamos una teoría rigurosa de la difracción de un haz electromagnético gaussiano por dos rendijas iguales en una pantalla metálica de conductividad infinita e infinitamente delgada. Aunque esta teoría rigurosa es eficiente tanto en la región escalar como en la vectorial, en este artículo analizaremos exclusivamente esta última región y dejaremos para un próximo trabajo el análisis de la región escalar. Además, supondremos que el campo eléctrico incidente es paralelo a las rendijas, es decir, el haz incidente tiene polarización T.E. En la Sec. 2, desarrollamos la teoría y mostramos cómo la noción de un haz incidente arbitrario puede introducirse en la propia teoría, con el beneficio de reducir enormemente el tiempo de cálculo, así como el de aumentar la precisión de los resultados. En la Sec. 3, restringiéndonos a un haz gaussiano normalmente incidente y a la región de campo lejano, analizamos numéricamente los coeficientes de transmisión y reflexión, así como sus respectivos patrones de difracción, en función de la longitud de onda, del ancho del haz y de la posición del haz respecto de las rendijas. Finalmente en esta sección trataremos el acoplamiento entre rendijas.

2. FORMULACIÓN DE LA TEORÍA

2.1. La base de Fourier

Consideremos una pantalla plana infinitamente conductora e infinitamente delgada (espesor cero), colocada en el vacío, la cual tiene dos rendijas paralelas de longitud infinita, de ancho ℓ y con una separación entre las rendijas igual a d . Escojamos un sistema coordenado rectangular $Oxyz$, de tal manera que la pantalla coincida con el plano Oxz y que las rendijas sean paralelas al eje Oz . Las rendijas son iluminadas por un haz monocromático gaussiano de longitud de onda $\lambda = 2\pi/k_0$ (k_0 vector de onda), el cual es independiente de la variable z (onda cilíndrica), y que incide normalmente sobre la pantalla. La distribución

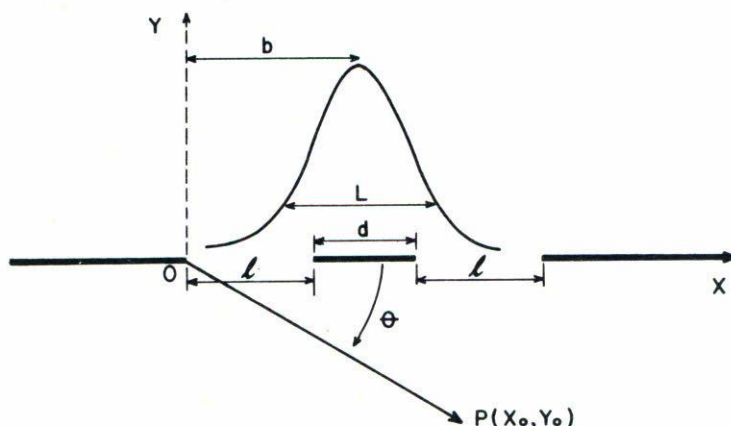


FIGURA 1. Nuestro sistema. Las rendijas de ancho ℓ son paralelas al eje Oz , es decir, son perpendiculares al plano de la figura. El ángulo θ es usado para describir los patrones de difracción.

de la intensidad del haz gaussiano sobre la pantalla tiene un ancho L y su posición con respecto al eje Oy está dada por el parámetro b . En la Fig. 1 se ilustra la configuración. En lo que sigue se sobrentenderá una dependencia en el tiempo de la forma $\exp(-i\omega t)$.

La unicidad de la solución y la condición de invariancia del sistema bajo una traslación paralela al eje Oz , garantizan que tanto el campo eléctrico total \mathbf{E} , como el campo magnético total \mathbf{H} , son independientes de la coordenada z . Si el campo eléctrico incidente \mathbf{E}^i es paralelo a las rendijas, se dice que se tiene el caso fundamental de polarización transversal eléctrico (T.E.); mientras que si el campo magnético incidente \mathbf{H}^i es paralelo a las rendijas, se dice que se está en el caso fundamental de polarización transversal magnético (T.M.) Para el caso T.E. (respectivamente T.M.), el campo eléctrico total (respectivamente campo magnético total) es paralelo a las rendijas en todo el espacio. En este artículo estudiaremos únicamente el caso T.E.

En el caso T.E., la componente del campo eléctrico sobre el eje Oz , que denotaremos por E , verifica a la ecuación de Helmholtz [3]:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + k_0^2 E = 0; \tag{1}$$

por lo tanto, el problema a tratar se convierte en un problema escalar.

Definamos la transformada de Fourier del campo eléctrico $E(x, y)$ con respecto de x de la siguiente manera:

$$E(x, y) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(\alpha, y) \exp(i\alpha x) d\alpha, \tag{2}$$

cuya transformada inversa es

$$\hat{E}(\alpha, y) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y) \exp(-i\alpha x) dx. \tag{3}$$

Si se sustituye la Ec. (2) en la ecuación de Helmholtz, se obtendrá una ecuación diferencial lineal de segundo orden para $\hat{E}(\alpha, y)$, cuya solución es

$$\hat{E}_1(\alpha, y) = A(\alpha) \exp(-i\beta y) + B(\alpha) \exp(i\beta y) \quad (\text{para } y > 0), \tag{4}$$

$$\hat{E}_2(\alpha, y) = C(\alpha) \exp(-i\beta y) + D(\alpha) \exp(i\beta y) \quad (\text{para } y < 0), \tag{5}$$

donde $\beta^2 = k_0^2 - \alpha^2$, con $\beta \geq 0$ o $\beta/i \geq 0$.

A continuación interpretaremos las Ecs. (4) y (5). En estas ecuaciones se tienen cuatro términos, cuyos coeficientes son $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ y $D(\alpha)$. Identificaremos al término con coeficiente $A(\alpha)$ con la transformada de Fourier en x del campo incidente $E^i(x, y)$, siendo $A(\alpha)$ su amplitud. En este trabajo $A(\alpha)$ estará dada por una función gaussiana. El término con coeficiente $B(\alpha)$ representa la onda reflejada, compuesta de una componente saliente ($|\alpha| < k_0$) y una componente evanescente ($|\alpha| > k_0$). El término con coeficiente $C(\alpha)$ representa a la onda transmitida. Nótese que, debido a que no existe onda incidente en la región $y < 0$, debemos imponer $D(\alpha) = 0$ para $|\alpha| < k_0$. Finalmente, $A(\alpha) = D(\alpha) = 0$ para $|\alpha| > k_0$, ya que la condición apropiada en infinito ($y \rightarrow \pm\infty$) es que el campo total sea acotado (ausencia de ondas antievanescentes) [3]. En resumen, $D(\alpha)$ es nula y $A(\alpha)$ tiene su soporte contenido en $|\alpha| < k_0$. Estas son las condiciones de propagación apropiadas a nuestra formulación [3].

De las Ecs. (2)-(5) y de los razonamientos anteriores, se sigue que los campos eléctricos E_1 y E_2 están dados por los siguientes desarrollos en ondas planas:

$$E_1(x, y) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-k_0}^{k_0} A(\alpha) \exp[i(\alpha x - \beta y)] d\alpha + \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha) \exp[i(\alpha x + \beta y)] d\alpha \quad (\text{para } y > 0), \tag{6}$$

$$E_2(x, y) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) \exp[i(\alpha x - \beta y)] d\alpha \quad (\text{para } y < 0). \tag{7}$$

Analizaremos ahora la solución de la ecuación de Helmholtz en $y = 0$. Denotemos por $E_3(x, 0)$ el campo eléctrico en $y = 0$. La condición de conductividad infinita implica que el campo eléctrico es nulo en la pantalla, por lo tanto, podemos expresar a E_3 mediante el siguiente desarrollo modal:

$$E_3(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^1 \phi_n^1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \phi_n^2(x), \tag{8}$$

donde las $\phi_n^i(x)$ ($i = 1, 2$) son dadas por

$$\phi_n^i(x) = \begin{cases} \text{sen} [(x - (i - 1)(d + \ell))n\pi/\ell], & (i - 1)(d + \ell) \leq x \leq \ell + (i - 1)(d + \ell), \\ 0, & \text{en cualquier otro } x, \end{cases} \tag{9}$$

con $i = 1, 2$. Entre las $\phi_n^i(x)$ existe la siguiente relación de ortogonalidad:

$$\langle \phi_n^i(x), \phi_m^j(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^i(x) \phi_m^{j*}(x) dx = \frac{\ell}{2} \delta_{nm} \delta_{ij}, \tag{10}$$

donde el asterisco denota el complejo conjugado.

Con lo anterior hemos determinado tres diferentes expresiones para el campo eléctrico total, dadas por las Ecs. (6), (7) y (8), válidas en tres diferentes regiones, quedando únicamente por encontrar a las funciones $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, y a los conjuntos de constantes a_n^1 , a_n^2 . Para determinar estas incógnitas, a continuación aplicaremos las condiciones de continuidad del campo eléctrico en $y = 0$.

2.2 Condiciones de continuidad

La continuidad en $y = 0$ de los campos eléctricos E_1 y E_3 , así como la de los campos E_2 y E_3 , está dada por la continuidad de sus respectivas transformadas de Fourier ($\hat{E}_1(\alpha, 0) = \hat{E}_3(\alpha, 0)$ y $(\hat{E}_2(\alpha, 0) = \hat{E}_3(\alpha, 0)$). Luego de las Ecs. (4), (5) y (8) se tiene

$$A(\alpha) + B(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^1 \hat{\phi}_n^1(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \hat{\phi}_n^2(\alpha), \tag{11}$$

$$C(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^1 \hat{\phi}_n^1(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \hat{\phi}_n^2(\alpha), \tag{12}$$

donde las $\hat{\phi}_n^i(\alpha)$ denotan la transformada de Fourier de las $\phi_n^i(x)$. Estos resultados nos proporcionan dos ecuaciones con las cuatro incógnitas $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, a_n^1 y a_n^2 . Para determinar estas incógnitas debemos recurrir a otras dos ecuaciones. Para esto, analicemos el salto de la derivada del campo eléctrico con respecto a y , en $y = 0$, es decir, consideremos $S = \partial E_1(x, 0)/\partial y - \partial E_2(x, 0)/\partial y$. Si x está sobre el metal, se tiene que S es proporcional a la corriente superficial, luego, S es diferente de cero. Pero si x está en alguna rendija, necesariamente $S = 0$. Como la función ϕ_j^1 es diferente de cero únicamente en la rendija de la izquierda, mientras que ϕ_j^2 es diferente de cero en la rendija de la derecha, se tiene que

$$\left\langle \frac{\partial \hat{E}_1}{\partial y}(\alpha, 0) - \frac{\partial \hat{E}_2}{\partial y}(\alpha, 0), \hat{\phi}_j^1(\alpha) \right\rangle = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, \infty), \tag{13}$$

$$\left\langle \frac{\partial \hat{E}_1}{\partial y}(\alpha, 0) - \frac{\partial \hat{E}_2}{\partial y}(\alpha, 0), \hat{\phi}_j^2(\alpha) \right\rangle = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, \infty). \tag{14}$$

En estos resultados se ha aplicado el teorema de Parseval-Plancherel:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \langle \hat{f}(\alpha), \hat{g}(\alpha) \rangle. \tag{15}$$

Las Ecs. (13) y (14), nos proporcionarán las dos restantes ecuaciones que faltaban.

Finalmente, si después de derivar las Ecs. (4) y (5) y sustituir en las Ecs. (13) y (14), se elimina a $B(\alpha)$ y $C(\alpha)$ mediante las Ecs. (11) y (12), se obtendrá el siguiente sistema de ecuaciones lineales con las incógnitas a_n^1 y a_n^2 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^1 \langle \beta \hat{\phi}_n^1, \hat{\phi}_j^i \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \langle \beta \hat{\phi}_n^2, \hat{\phi}_j^i \rangle = \langle \beta A(\alpha), \hat{\phi}_j^i \rangle \quad (i = 1, 2; j = 1, 2, 3, \dots, \infty). \quad (16)$$

Representaremos a este sistema en forma matricial. Si a_1 y a_2 son matrices columna, formadas respectivamente con los coeficientes modales a_n^1 y a_n^2 , se tiene

$$M_{11}a_1 + M_{12}a_2 = S_1, \quad (17)$$

$$M_{21}a_1 + M_{22}a_2 = S_2, \quad (18)$$

donde M_{ik} ($i, k = 1, 2$) son matrices cuadradas que dependen de los parámetros opto-geométricos y S_i ($i = 1, 2$) es una matriz columna en la cual sus elementos son funciones lineales de $A(\alpha)$.

En resumen, hemos establecido que la determinación de los coeficientes modales a_n^1 y a_n^2 , se reduce a la resolución del sistema matricial lineal dado en la Ec. (16) o equivalentemente por las Ecs. (17) y (18). Nótese que la determinación de los coeficientes modales, a_n^1 y a_n^2 , es condición suficiente para calcular en cualquier punto del espacio el campo reflejado y el transmitido, es decir, estos campos pueden calcularse tanto en la región de campo cercano, como en la región de campo lejano y aún en la misma rendija. Así, la Ec. (11) nos permite el cálculo de $B(\alpha)$, y mediante la Ec. (6) el del campo reflejado. La Ec. (12) nos da $C(\alpha)$, con lo que podemos calcular a partir de la Ec. (7) el campo transmitido. Finalmente, de la Ec. (8) calculamos el campo en la rendija.

Hemos llegado de esta manera a establecer un sistema de ecuaciones lineales matriciales de orden infinito, el cual no se puede resolver analíticamente. Debemos, entonces, recurrir a una solución numérica, lo que nos impone truncar el sistema lineal a un orden n_0 . La determinación de n_0 nos la fija el criterio de conservación de la energía y la convergencia de los resultados al aumentar n . Nuestras experiencias numéricas nos han mostrado que $n_0 = 10$ es suficiente para garantizar los resultados.

Finalmente, discutiremos brevemente el cálculo numérico de los elementos matriciales de M_{ik} ($i, k = 1, 2$). Estos elementos matriciales hacen intervenir integrales del tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta(\alpha) \exp(i\alpha\ell)}{\left[\left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^2 - \alpha^2 \right] \left[\left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 - \alpha^2 \right]} d\alpha. \quad (19)$$

Estas integrales presentan una seria dificultad numérica si se calculan directamente, ya que el integrando es una función muy oscilante. Esta dificultad se supera fácilmente si se emplea el hecho que la función multivaluada $\beta(\alpha) = \sqrt{k_0^2 - \alpha^2}$ tiene cortes en el plano complejo, y se utiliza el contorno de integración que se muestra en la Fig. 2. Esta nueva trayectoria de integración, incluye a un semicírculo de radio infinito y el corte Δ . El lema de Jordan garantiza la anulaci3n de la integral en el semicírculo, quedando únicamente la

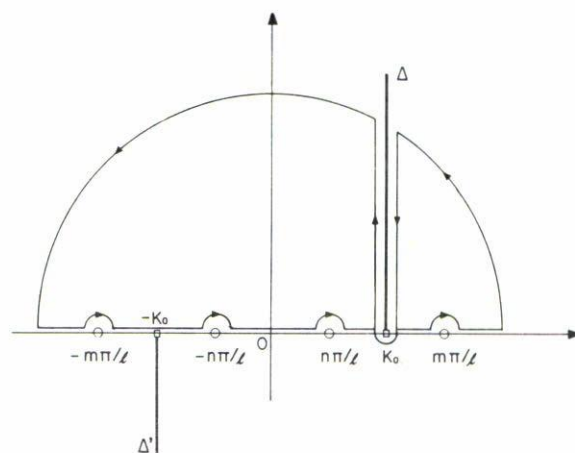


FIGURA 2. Trayectoria de integración en el plano complejo utilizada para el cálculo de los elementos matriciales.

integración sobre el corte. La integración a lo largo de este corte converge rápidamente, siendo posible calcular estas integrales con una precisión de 10^{-6} (método de trapecios).

2.3. Conservación de la energía

Definiremos como coeficiente de transmisión T , al cociente entre la energía transmitida y la energía incidente. El coeficiente de reflexión R será el cociente entre la energía reflejada y la energía incidente. Luego, la conservación de la energía se expresa como

$$R + T = 1. \tag{20}$$

Estos coeficientes T y R , en términos de la amplitud del campo transmitido y reflejado, son dados por [3]

$$R = \frac{\int_{-k_0}^{k_0} \beta(\alpha) |B(\alpha)|^2 d\alpha}{\int_{-k_0}^{k_0} \beta(\alpha) |A(\alpha)|^2 d\alpha}, \tag{21}$$

$$T = \frac{\int_{-k_0}^{k_0} \beta(\alpha) |C(\alpha)|^2 d\alpha}{\int_{-k_0}^{k_0} \beta(\alpha) |A(\alpha)|^2 d\alpha}. \tag{22}$$

Y la intensidad difractada en el ángulo θ está dada por [4]

$$I(\theta) = \frac{k_0^2}{2\mu_0\omega} \text{sen}^2(\theta) |\hat{E}_3(k_0 \cos \theta, 0)|^2. \tag{23}$$

En todos los patrones de difracción presentados en este artículo la intensidad estará normalizada a la intensidad incidente I_0 , es decir, se graficará el cociente $I(\theta)/I_0$.

La ley de conservación de la energía, nos proporciona uno de los principales criterios de validez de nuestros resultados numéricos. En la siguiente sección mostraremos la dependencia del coeficiente de transmisión en función de varios parámetros optogeométricos.

3. RESULTADOS NUMÉRICOS

Supondremos en lo que sigue que la distribución de intensidades del haz incidente sobre la pantalla es de tipo gaussiano [2]:

$$I(x) = \exp \left[-\frac{4(x-b)^2}{L^2} \right]. \quad (24)$$

Este haz incide normalmente sobre la pantalla, tiene un ancho L y se fija su posición con respecto al eje Oy con el parámetro b (véase Fig. 1). Luego, la amplitud $A(\alpha)$ del campo eléctrico incidente está dada por

$$A(\alpha) = \frac{L}{2} \exp(-i\alpha b) \exp \left(-\frac{\alpha^2 L^2}{8} \right). \quad (25)$$

Hasta donde conocemos, ésta es la primera vez que en el problema de la difracción rigurosa por dos rendijas se considera una onda incidente que no es plana. La teoría presentada no es únicamente válida para haces gaussianos; en principio, la forma que puede tomar la función $A(\alpha)$ es arbitraria, permitiéndonos esto el estudio de haces más generales y más realistas, pudiendo ser posible simular los modos de un láser [6] (haces Hermite-Gauss) o algún tipo de aberración óptica.

Para verificar tanto la teoría como los programas numéricos, hemos realizado una serie de pruebas que describiremos a continuación. Durante todos los cálculos hemos cuidado que se satisfaga la conservación de la energía (con una precisión mejor que 10^{-3}) y el criterio de aproximaciones sucesivas, que consiste en aumentar progresivamente el número de coeficientes modales hasta que se obtiene la estabilización de los resultados. Nuestras experiencias numéricas nos han mostrado que esto ocurre a partir de 10 coeficientes modales. La realización sistemática de estas pruebas nos ha garantizado que los resultados son correctos hasta la tercera cifra decimal.

Otro tipo de prueba ha sido la consistencia de la teoría con el caso previamente conocido de la difracción por una rendija [15]. Para esto, iluminamos con un haz angosto ($L = 5\ell$) una de las rendijas y colocamos a la otra rendija considerablemente lejos de la primera ($d = 30\ell$), obteniéndose un patrón de difracción idéntico al producido por una sola rendija.

Finalmente, comparamos nuestros resultados numéricos con dos teorías de la difracción para dos rendijas. Una de ellas es la teoría de Otsuki [14], publicada en 1990, en la cual se supone que la onda incidente es plana. En nuestras comparaciones utilizamos los mismos parámetros optogeométricos e iluminamos las dos rendijas con un haz muy ancho ($L/\ell = 1000/\sqrt{2}$), centrado entre las rendijas. También tomamos en consideración que

TABLA . Variación del coeficiente de transmisión con la longitud de onda.

Autores	Longitud de onda*			
	5.2359	6.2831	15.707	31.415
Otzuki	0.7882	0.4689	0.0437	0.0055
Nosotros	0.7601	0.4861	0.0433	0.0053

*Las rendijas son iluminadas a incidencia normal por una onda plana con: $\ell = 2$ y $d = 2$.

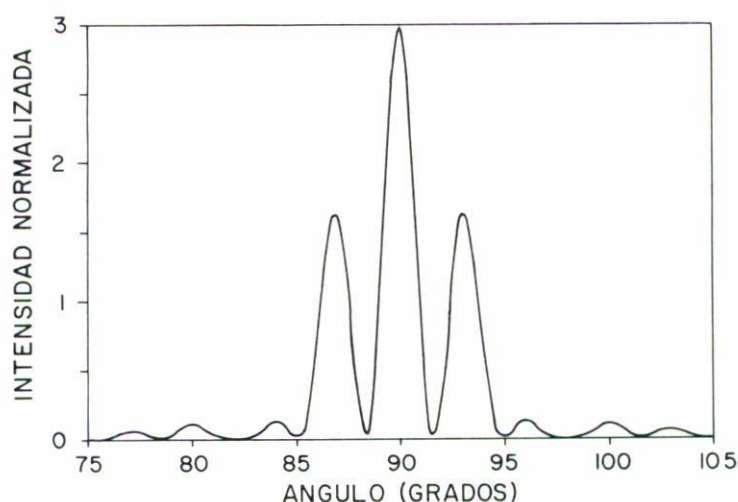


FIGURA 3. Patrón de difracción normalizado ($I(\theta)/I_0$) de un haz gaussiano, que incide normalmente sobre dos rendijas. La teoría de Rayleigh-Sommerfeld y la teoría rigurosa dan el mismo resultado, con $\lambda = 0.05$, $L = 3.5355$, $\ell = 0.3749$, $b = 1.25$ y $d = 0.5$.

Otsuki define el coeficiente de transmisión como el cociente entre la energía transmitida y la energía incidente que llega a las dos rendijas. En la Tabla I, utilizando la definición de Otsuki, mostramos algunas de las comparaciones realizadas, observándose una buena concordancia, principalmente para grandes longitudes de onda.

La segunda teoría de la difracción con la que comparamos nuestros resultados fue la teoría aproximada de Rayleigh-Sommerfeld. Encontramos que esta teoría y la nuestra (rigurosa), dan el mismo resultado en la región escalar, en concordancia con lo establecido en el artículo previo (I). El patrón de difracción mostrado en la Fig. 3, obtenido en las dos teorías, fue calculado con los siguientes parámetros: $\lambda = 0.05$, $L = 3.5355$, $\ell = 0.3749$, $\theta_0 = 0^\circ$, $b = 1.25$ y $d = 0.5$. Estos valores nos dan un espectro que cae justo entre la frontera de la región escalar y la región vectorial (λ/ℓ es igual a 0.1333). ¡Los espectros así obtenidos fueron idénticos hasta la tercera cifra significativa!

En la Fig. 4 mostramos cómo varía el coeficiente de transmisión T en función de la longitud de onda λ (normalizada al ancho ℓ de una rendija). En esta gráfica el cociente λ/ℓ varía de 0.2 a 2.5, es decir, en la región vectorial. El haz incidente tiene un ancho

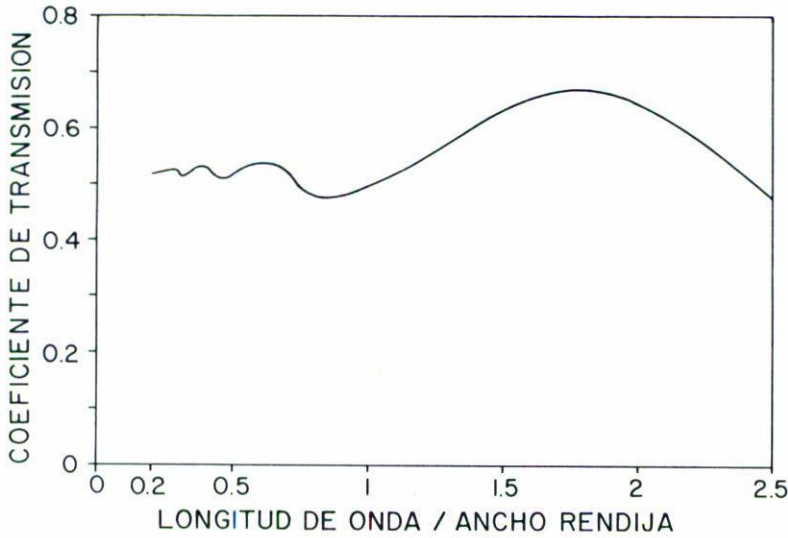


FIGURA 4. Coeficiente de transmisión en función de la longitud de onda (normalizada al ancho de la rendija): $L/\ell = 3.5355$, $d/\ell = 0.5$ y $b/\ell = 1.25$.

$L/\ell = 3.5355$, una separación entre rendijas $d/\ell = 0.5$ y un acercamiento a las rendijas $b/\ell = 1.25$. Lo primero que notamos de la figura es la presencia de unas oscilaciones de amplitud creciente, que se extienden a lo largo de toda la gráfica. Estas oscilaciones también están presentes en el caso de una sola rendija (I), sólo que los valores del coeficiente de transmisión son distintos. Más aún, si comparamos la Fig. 4 con la Fig. 3 de I para una rendija, en donde se han utilizado los mismos parámetros, notaremos el interesante resultado que la posición de los máximos y los mínimos coinciden en ambas figuras. Para la Fig. 4, los máximos y mínimos se localizan en $\lambda/\ell = 0.2702, 0.3150, 0.3725, 0.4587, 0.6312, 0.8325$ y 1.7622 , mientras que para la Fig. 3 de I en las posiciones $\lambda/\ell = 0.2707, 0.3150, 0.3725, 0.4587, 0.6312, 0.8325$ y 1.7853 . Observamos que en general las dos series coinciden hasta la cuarta cifra, salvo por los últimos valores (1.7622 y 1.7853), debido a problemas numéricos (la conservación de la energía no se verificó con buena precisión para dos rendijas). En este último caso, el valor correcto debe ser el de una rendija (1.7853). De estos resultados, hacemos la conjetura, que para tres o más rendijas se tendrá un comportamiento similar al de la Fig. 4, con los máximos y mínimos localizados en la misma posición que para una rendija. Finalmente, comentaremos que estas oscilaciones son una propiedad del carácter vectorial del campo eléctrico y que no pueden ser predichas por la teoría de Rayleigh-Sommerfeld, como puede verse en la Fig. 3 de la Ref. [1].

Los coeficientes de transmisión de la Fig. 4 indican la cantidad de energía que pasa a través de las dos rendijas, sin embargo, de estos valores no es posible conocer directamente cómo se distribuye esta energía en el espacio. Para remediar esta situación, en la Fig. 5 se presentan algunos de sus patrones de difracción para $\lambda\ell = 0.4, 0.8, 1.5$ y 2.5 . Estos espectros nos muestran que, para longitudes de onda cerca de la región escalar, los patrones de difracción oscilan mucho, concentrándose prácticamente toda la energía transmitida alrededor de $\theta = 90^\circ$, es decir, cerca de la normal a la pantalla. Cuando el cociente

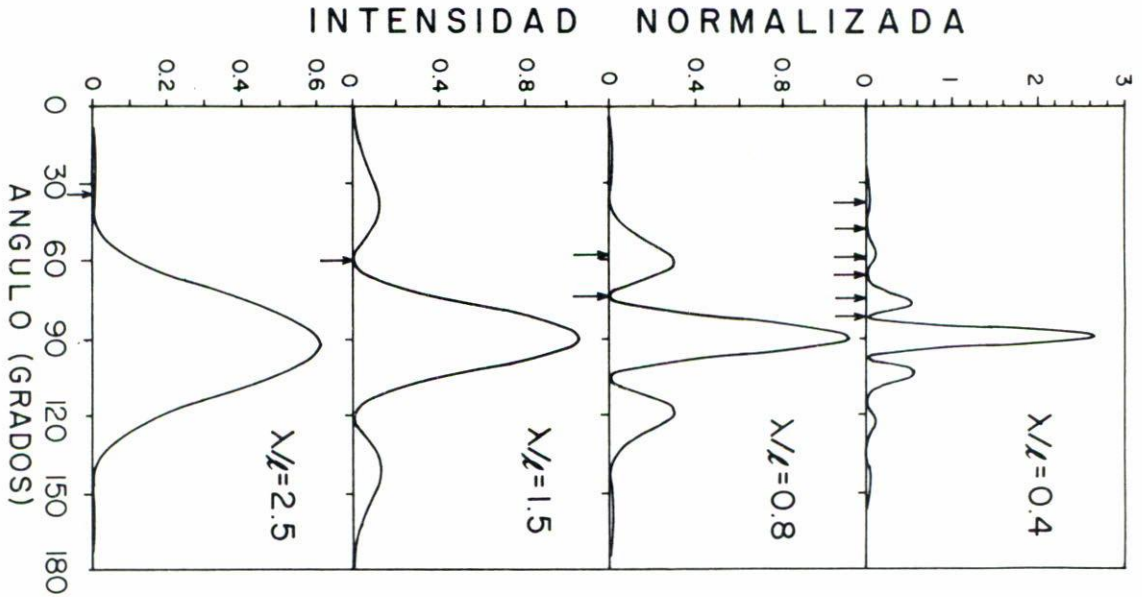


FIGURA 5. Patrones de difracción normalizados ($I(\theta)/I_0$) para dos rendijas. Mismos parámetros que en la Fig. 4 y $\lambda/\ell = 0.4, 0.8, 1.5$ y 2.5 .

λ/ℓ aumenta, el número de oscilaciones disminuye, alcanzando el patrón de difracción grandes valores angulares, y desapareciendo finalmente las características oscilaciones de un patrón de difracción en la óptica tradicional.

Es interesante conocer si el método clásico de determinar los máximos y mínimos de un patrón de difracción, mediante la diferencia de caminos ópticos, se aplica también en la región vectorial. La utilización de este método nos conduce a determinar los máximos a partir de la siguiente expresión

$$\cos \theta = m \frac{\lambda}{(\ell + d)} \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots), \tag{26}$$

mientras que la determinación de los mínimos es dada por

$$\cos \theta = m \frac{\lambda/2}{(\ell + d)} \quad (m = 1, 3, 5, 7, \dots), \tag{27}$$

donde $0 \leq \theta \leq \pi/2$. En la Fig. 5, señalamos con flechas pequeñas (únicamente para la parte izquierda de cada patrón) las posiciones angulares de los máximos (salvo el máximo central) y mínimos obtenidos a partir de estas dos últimas ecuaciones. Como se observa en esta figura, el método de diferencia de caminos ópticos es capaz, para el valor $\lambda/\ell = 0.4$, de prever muy bien la posición de todos los máximos y mínimos con un error relativo máximo de 0.1. Cuando este cociente aumenta, $\lambda/\ell = 0.8$, también determina con muy buena precisión tanto el primer mínimo como el primer máximo secundario, pero es incapaz de predecir la existencia de un segundo máximo secundario en $\theta = 21.5^\circ$. A partir

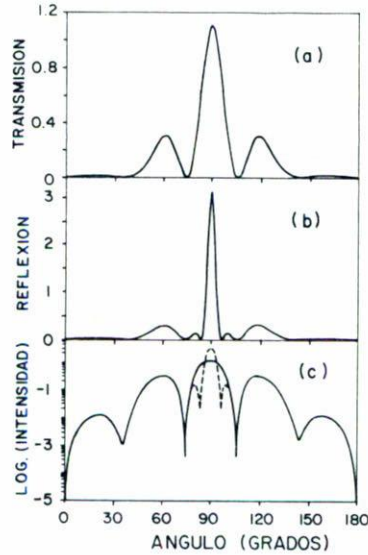


FIGURA 6. Patrón de difracción normalizado, en transmisión (a) y en reflexión (b), de un haz gaussiano que incide normalmente sobre dos rendijas en una pantalla infinitamente conductora e infinitamente delgada, con $\lambda/\ell = 0.8$, $L/\ell = 5/\sqrt{2}$, $d/\ell = 0.5$ y $b/\ell = 1.25$. En (c) se muestra la superposición de los dos patrones en una escala semilogarítmica.

de $\lambda/\ell = 1.5$, la Ec. (26) indica que no hay máximos secundarios, en franca contradicción con las dos últimas gráficas. De estos resultados podemos concluir que el método de diferencia de caminos ópticos es capaz de predecir con muy buena precisión, al menos, la localización del primer máximo si $\lambda/(\ell + d) < 1$, y entre más cerca se esté de la región escalar puede prever más máximos secundarios, así como sus respectivos mínimos. Sin embargo, si $\lambda/\ell > 1$, este método falla rotundamente en la determinación de la posición de los máximos. Este ejemplo nos muestra que no siempre es correcto extrapolar resultados válidos en la región escalar a la región vectorial.

Existe una propiedad, poco conocida, pero muy importante, entre los patrones de difracción y los patrones de reflexión generados por una onda *escalar* arbitraria que incide sobre una abertura en una pantalla infinitamente delgada [8]. Esta propiedad señala que, salvo por la reflexión especular, ambos patrones coinciden. Propiedad válida si se admite que el campo escalar o su derivada normal se anulan en la pantalla. Es nuestra intención verificar esta propiedad en la región vectorial, cuando dos rendijas son iluminadas por un haz gaussiano en polarización T.E. En la Fig. 6a y 6b graficamos los patrones en reflexión y en transmisión para $\lambda/\ell = 0.8$, $L/\ell = 5/\sqrt{2}$, $b/\ell = 1.25$ y $d/\ell = 0.5$. Para mayor claridad, en la Fig. 6c hemos superpuesto, en una escala semilogarítmica, estos dos patrones. Es sorprendente ver cómo la propiedad mencionada se verifica muy bien. Consideramos que este resultado es muy interesante, debido a que puede servir como una prueba, en la región vectorial, de teorías rigurosas y aproximadas.

En la Fig. 7 se muestra cómo varía el coeficiente de transmisión en función del ancho del haz incidente (L/ℓ), para $\lambda/\ell = 1$, $d/\ell = 0.5$ y $b/\ell = 1.25$ (punto medio entre rendijas).

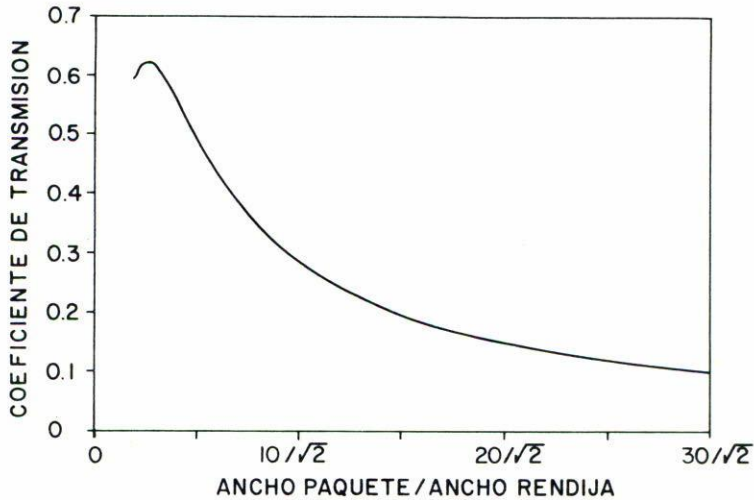


FIGURA 7. Variación del coeficiente de transmisión en función del ancho del haz incidente (L/ℓ), para $\lambda/\ell = 1.0$, $d/\ell = 0.5$ y $b/\ell = 1.25$.

En esta gráfica observamos un máximo aproximadamente cuando $L/\ell = 1.8384$; a partir de este valor, T disminuye rápidamente conforme aumenta L/ℓ , para finalmente converger asintóticamente a cero para grandes valores de L/ℓ . Podemos explicar fácilmente estos dos rasgos. Como se ha mencionado, L es el ancho de la distribución de intensidad gaussiana sobre la pantalla, esta distribución de intensidad tiene asociada una distribución gaussiana de campo eléctrico (incidente) en la pantalla. De la Ec. (24) puede probarse fácilmente que esta última distribución gaussiana tiene un ancho $A = (2)^{1/2}L$. En términos de este ancho A , el máximo en la Fig. 7 se alcanza cuando A/ℓ es aproximadamente 2.6. Por otro lado, la separación entre los bordes exteriores de las dos rendijas es 2.5; luego, entonces, si disminuimos el valor de A/ℓ a partir de 2.6, el campo eléctrico incidente comienza a no cubrir ambas rendijas, disminuyendo la energía transmitida y por tanto el valor de T . Pero si aumentamos el valor de A/ℓ , el campo eléctrico continúa cubriendo ambas rendijas, manteniéndose prácticamente constante la energía transmitida, y como la energía incidente aumenta, da como consecuencia que el coeficiente de transmisión disminuye, para anularse finalmente cuando L/ℓ es infinito (energía incidente infinita). Este razonamiento está de acuerdo con el hecho de que la posición del máximo es prácticamente independiente de λ . Por lo que respecta a los patrones de difracción (no ilustrados), hemos encontrado que la posición de los máximos y mínimos de interferencia permanecen prácticamente inalterados cuando $A/\ell > 2.6$, es decir, la posición es independiente del ancho del haz incidente. Por ejemplo, la diferencia relativa máxima, en la posición, para $L = 5/\sqrt{2}$, $L = 40/\sqrt{2}$ y $L = 320/\sqrt{2}$, es de 0.018.

En la Fig. 8, presentamos la influencia de la posición del haz en el coeficiente de transmisión, para $L/\ell = 3.5355$, $\lambda/\ell = 0.8$ y $d/\ell = 0.5$. La posición del haz está determinada por el parámetro b , como se ilustra en la Fig. 1. De la Fig. 8, se observa que el valor máximo de T se alcanza cuando el centro del haz se localiza entre las dos rendijas, es decir, en la

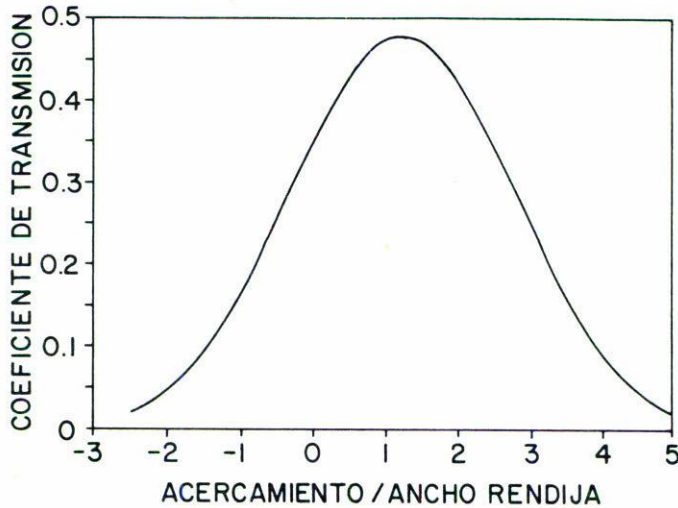


FIGURA 8. Influencia de la posición del haz (b/ℓ) en el coeficiente de transmisión: $L/\ell = 3.5355$, $\lambda/\ell = 0.8$ y $d/\ell = 0.5$.

posición de simetría de la configuración. Además, el valor de T disminuye conforme el haz se aleja de esta posición. Este resultado es completamente análogo al obtenido para una rendija [4], en la cual el máximo de T se alcanza también en su posición de simetría. Por lo que respecta a los patrones de difracción en función del parámetro b , éstos no presentan cambios importantes, únicamente disminuyen en intensidad conforme el haz se aleja de su posición de simetría.

Por último, en la Fig. 9, presentamos el coeficiente de transmisión como función de la separación entre rendijas (d/ℓ). Suponemos que las rendijas son iluminadas por un haz muy ancho y que el centro del haz está fijo en el centro de una de las rendijas: $L/\ell = 500/\sqrt{2}$, $\lambda/\ell = 0.8$ y $b/\ell = 0.5$. El haz incidente se escogió muy ancho (onda plana) para asegurar que las dos rendijas estén siempre iluminadas cuando se aumenta la separación. Con esta gráfica ilustramos la influencia de una rendija sobre la otra, es decir, mostramos el acoplamiento entre rendijas. De esta figura, y otras similares, hemos obtenido resultados nuevos acerca de la difracción por dos rendijas y que podemos resumir como sigue:

- 1) El acoplamiento da lugar a una función oscilante de amplitud decreciente conforme se incrementa la separación entre las rendijas.
- 2) Se tiene el importante resultado de que, en la región vectorial, la separación entre máximos (período de oscilación) es precisamente λ .

Un comportamiento similar se ha observado cuando se analiza el campo eléctrico en el interior de dos canales rectangulares [16], separados por una distancia d . En la Fig. 10, mostramos como evolucionan los patrones de difracción cuando se aumenta la separación entre rendijas.

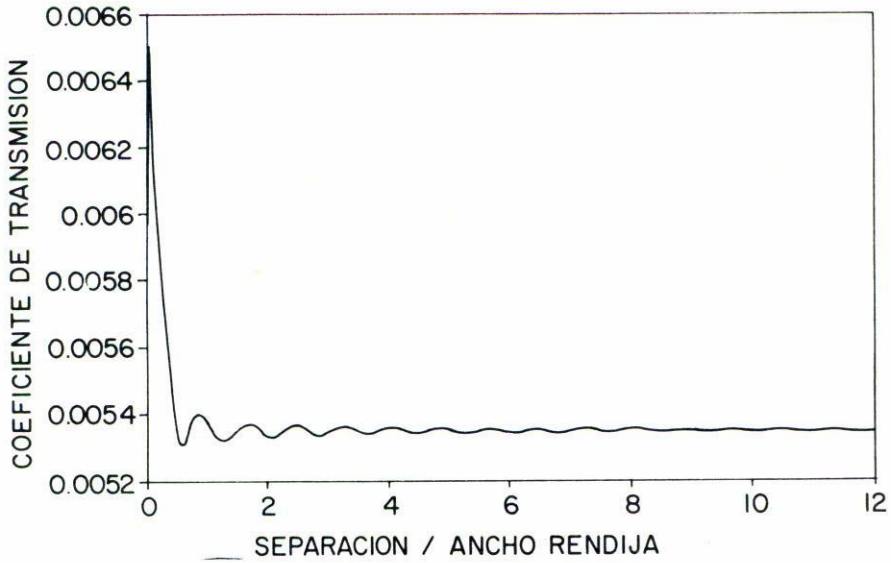


FIGURA 9. Acoplamiento entre dos rendijas. El coeficiente de transmisión en función de la separación de las rendijas (d/ℓ), para $L/\ell = 500/\sqrt{2}$, $\lambda/\ell = 0.8$ y $b/\ell = 0.5$.

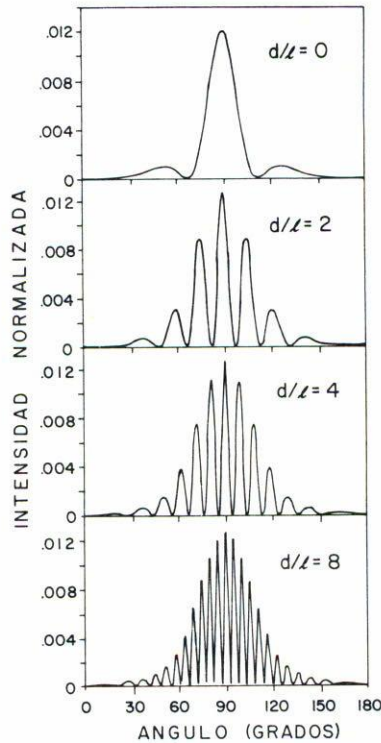


FIGURA 10. Patrones de difracción normalizados ($I(\theta)/I_0$) para varias separaciones entre rendijas, $d/\ell = 0, 2, 4$ y 8 con $L/\ell = 500/\sqrt{2}$, $\lambda/\ell = 0.8$ y $b/\ell = 0.5$.

4. CONCLUSIONES

En este artículo hemos presentado por primera vez una teoría rigurosa de la difracción por dos rendijas en una pantalla metálica de conductividad infinita e infinitamente delgada (para haces gaussianos en polarización T.E.). Hemos mostrado la influencia de ciertos parámetros optogeométricos en el patrón de difracción y el coeficiente de transmisión y hemos estudiado el acoplamiento entre rendijas. Luego, como la teoría de este artículo es rigurosa, consideramos que puede servir para verificar la validez de otras teorías de la difracción (rigurosas o aproximadas).

AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan su agradecimiento al M. en C. Arturo Zúñiga Segundo por su ayuda en la elaboración de los programas numéricos. También se agradece el apoyo de COFFA-IPN.

REFERENCIAS

1. Jeffrey J. Regan y David R. Andersen, *Computers in Physics* (jan/feb. 1991) 49.
2. O. Mata-Méndez, *Opt. Lett.* **16** (1991) 1629.
3. O. Mata-Méndez, *Rev. Mex. Fís.* **38** (1992) 850.
4. O. Mata-Méndez y F. Chávez-Rivas, *Rev. Mex. Fís.* **39** (1993) 371.
5. O. Mata-Méndez, *Phys. Rev.* **B37** (1988) 8182.
6. A. Zúñiga-Segundo y O. Mata-Méndez, (Rapid Comm.) *Phys. Rev.* **B46** (1992) 536.
7. Joseph W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill, Book Company, New York (1968) Cap. III.
8. C.J. Bouwkamp, *Rep. Progr. Phys.* **17** (1954) 35.
9. D.L. Jain y R.P. Kanwal, *Can J. Phys.* **50** (1972) 928.
10. R.P. Kanwal y B.K. Sachdeva, *Z. Angew. Math. Phys.* **24** (1973) 111.
11. K. Saermark, *Appl. Sci. Res.* **B7** (1960) 417.
12. K. Saermark, *Appl. Sci. Res.* **B8** (1960) 29.
13. B.K. Sachdeva y R.A. Hurd, *Can. J. Phys.* **53** (1975) 1013.
14. Takuro Otsuki, *J. Opt. Soc. Am.* **7** (1990) 646.
15. O. Mata-Méndez, M. Cadilhac y R. Petit, *J. Opt. Soc. Am.* **73** (1983) 328.
16. Resultado inédito.