

Termodinámica de modelos de gases en redes con velocidades discretas

F. BAGNOLI

*Dipartimento di Matematica Applicata, Università di Firenze
Via S. Marta 3, I-50139, Firenze, Italia;
Consorzio INFN, sezione di Firenze;
INFN, sezione di Firenze*

R. RECHTMAN

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
Apartado postal 70-542, 04510 México, D.F., México*

D. ZANETTE

*Centro Atómico de Bariloche
8400 Bariloche, Argentina*

Recibido el 2 de febrero de 1993; aceptado el 24 de junio de 1993

RESUMEN. Estudiamos el comportamiento termodinámico de un modelo de un gas en una red con velocidades discretas en las estadísticas de Bose-Einstein, Fermi-Dirac y Boltzmann. Los parámetros del modelo son la dimensión del espacio y el número de velocidades permitidas. Debido a que el número de velocidades es finito, el espectro de energía de una partícula está acotado por arriba, lo que implica que la entropía no es una función siempre creciente de la energía y la temperatura puede ser negativa. Mostramos que cuando el número de velocidades permitidas aumenta, el comportamiento del modelo se acerca al de un gas ideal clásico, pero sólo en un intervalo de temperaturas.

ABSTRACT. We study the thermodynamical behavior of a model of a lattice gas with discrete velocities in Bose-Einstein, Fermi-Dirac and Boltzmann statistics. The parameters of the model are the space dimension and the number of allowed velocities. Since this last number is finite, the energy spectrum is bounded above implying that the entropy is not an always increasing function of the energy and the temperature may therefore be negative. We show that as the number of velocities increases, the model approaches the behavior of an ideal classical gas in a restricted interval of temperature.

PACS: 05.90.+m

En este trabajo estudiaremos la termodinámica de equilibrio de sistemas de partículas que se mueven con velocidades discretas en una red. Estos modelos han sido utilizados ampliamente para estudiar fenómenos fuera de equilibrio, pero las propiedades de equilibrio no han sido estudiadas de manera sistemática para modelos con transporte de energía. Si las partículas se mueven en una red en tiempos discretos, la evolución

temporal se puede simular en una computadora sin introducir errores y así estudiar flujos hidrodinámicos [1]. En los modelos que discutiremos más adelante el espectro de energía está acotado por arriba, por lo que la entropía no es una función siempre creciente de la energía y la temperatura puede ser negativa [2]. Ésta es la característica más interesante del comportamiento termodinámico de estos modelos que contrasta con el intento de definir la temperatura como una cantidad proporcional a la energía cinética media [3-5]. Además, las partículas del gas satisfacen una estadística de Fermi-Dirac.

La ecuación de transporte de Boltzmann es una ecuación integro-diferencial parcial no lineal para la cual es difícil no sólo encontrar una solución para un modelo cualquiera, sino saber siquiera si existe dicha solución y si es única. Por ello, es interesante proponer modelos sencillos para los cuales se pueda resolver la ecuación de Boltzmann. En 1911, P. y T. Ehrenfest presentaron un modelo, conocido como viento-árbol, con partículas con velocidades discretas con el objeto de explicar la tendencia irreversible al equilibrio [6-8]. En el modelo viento-árbol las partículas se mueven en un espacio continuo bidimensional en cuatro direcciones mutuamente perpendiculares con la misma rapidez y no chocan entre sí, sino con dispersores cuadrados fijos cuyas diagonales son paralelas a la dirección de movimiento. Dado que no hay interacción entre las partículas, la ecuación de Boltzmann es un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales lineales acopladas cuya solución muestra un relajamiento irreversible al equilibrio si las partículas se encuentran inicialmente colocadas al azar al igual que los dispersores. Éste es tal vez el primer modelo de un gas con velocidades discretas.

Otros modelos sencillos son el de Carleman y el de McKean [9-12]. Las partículas se mueven en una dimensión hacia la derecha o la izquierda con la misma rapidez. Cuando dos de ellas chocan se puede invertir la velocidad de una o ambas; el número de partículas se conserva (y trivialmente la energía) pero no se conserva la cantidad de movimiento. En los dos modelos hay balance detallado pero el modelo de McKean no es simétrico. Se puede encontrar la ecuación de transporte pero no se conoce su solución en el caso general. Sin embargo, si la función de distribución es homogénea, existe una solución que predice un relajamiento al equilibrio.

Broadwell consideró otro modelo, útil para estudiar ondas de choque, en el cual las partículas se mueven en un espacio tridimensional pero con rapidez 1 en las direcciones de los ejes. En las colisiones se conserva la cantidad de movimiento y la masa, por ello las únicas colisiones entre dos partículas en las cuales las velocidades cambian es cuando éstas chocan de frente. Por ejemplo, dos partículas que se mueven con velocidades opuestas en el eje x y que se encuentran en el mismo punto, se moverán en la dirección del eje y o del eje z después de chocar [13].

El modelo de Broadwell se puede simplificar pasando a dos dimensiones, imponiendo una evolución en un espacio y tiempo discretos y un principio de exclusión que prohíbe la presencia de más de una partícula en un sitio en un instante de tiempo en cada una de las cuatro direcciones permitidas. Este modelo se conoce como el modelo HPP por las iniciales de sus autores [14]. En este caso el espacio es una red cuadrada bidimensional, las partículas ocupan los sitios de la red y sólo se pueden mover hacia uno de los vecinos cercanos al pasar una unidad de tiempo. La evolución temporal se puede dividir en dos pasos: primero las partículas avanzan hacia el sitio vecino y luego chocan si es

que se encuentran de frente. En este modelo se conserva el número de partículas y la cantidad de movimiento (como en los modelos anteriores la conservación de la energía es consecuencia de la conservación del número de partículas). Es interesante notar que la evolución temporal del sistema se puede realizar localmente recorriendo todos los sitios de la red. Dado un sitio cualquiera, nos fijamos en las partículas que se encuentran en los cuatro sitios vecinos y que se mueven hacia dicho sitio, con ellas se construye un estado intermedio en el sitio que da lugar el estado final después de la colisión. El principio de exclusión es necesario para poder implementar la simulación en una computadora de manera eficiente, pues a cada sitio se le asigna una variable de estado formada por un número de cuatro bits que corresponden a las cuatro velocidades posibles; el valor 1 (0) de un bit indica la presencia (ausencia) de una partícula en la dirección asignada a ese bit.

En el modelo FHP las partículas se mueven en una red triangular bidimensional, por lo que cada sitio tiene seis sitios vecinos y por lo tanto estará ocupado a lo más por seis partículas moviéndose en direcciones distintas [15,16]. Si en este tipo de modelos ampliamos la vecindad de cada sitio, por ejemplo incluyendo al sitio mismo y a los siguientes vecinos cercanos, las partículas se pueden mover con distintas rapidezces por lo que se puede definir una función de distribución de velocidades que depende de la temperatura. Es decir, en cada sitio puede haber, a lo más, una partícula en reposo, seis partículas moviéndose hacia los primeros vecinos más cercanos con rapidez 1 y seis partículas moviéndose hacia los segundos vecinos más cercanos con rapidez $\sqrt{3}$.

El modelo más sencillo con distintas rapidezces consiste de una red cuadrada donde las partículas pueden estar en reposo, o moverse hacia los primeros y segundos vecinos más cercanos como mostramos en la Fig. 1 [17-19]. En este modelo puede haber a lo más nueve partículas, una en reposo, cuatro moviéndose hacia los primeros vecinos más cercanos en las direcciones de los ejes con rapidez 1 y otras cuatro moviéndose hacia los segundos vecinos más cercanos con rapidez $\sqrt{2}$. Las partículas primero avanzan a los vecinos cercanos y después chocan entre sí con la condición de que se conserve en cada colisión el número de partículas, la cantidad de movimiento y la energía.

En lo que sigue obtendremos el comportamiento termodinámico de una generalización de este modelo en una red cualquiera en d dimensiones con partículas en reposo o moviéndose a los primeros vecinos, segundos vecinos, etc. [20]. Para obtener las propiedades de equilibrio no es necesario conocer la dinámica de las colisiones en detalle, basta con saber que se conserva el número de partículas, la cantidad de movimiento y la energía. Debido al principio de exclusión mencionado anteriormente, las partículas obedecen una estadística de Fermi-Dirac. Sin embargo, presentaremos también el comportamiento de este modelo en las estadísticas de Boltzmann y de Bose-Einstein, la primera como punto de referencia y la segunda dado que hay sistemas como fotones dentro de una caja (láseres) para los cuales el espectro de energía también posee una cota superior y por lo tanto presentan temperaturas negativas.

Proponemos un modelo en el cual las partículas se mueven en un espacio d -dimensional con velocidad $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$, con k_l un entero entre $-m$ y m , $l = 1, \dots, d$. La dimensión d y el número m determinan las propiedades de equilibrio del modelo. El número de velocidades permitidas es $(2m + 1)^d$. Si $d = 2$, $m = 1$ tenemos el modelo de nueve velocidades mencionado anteriormente. Para un sistema cerrado en equilibrio con

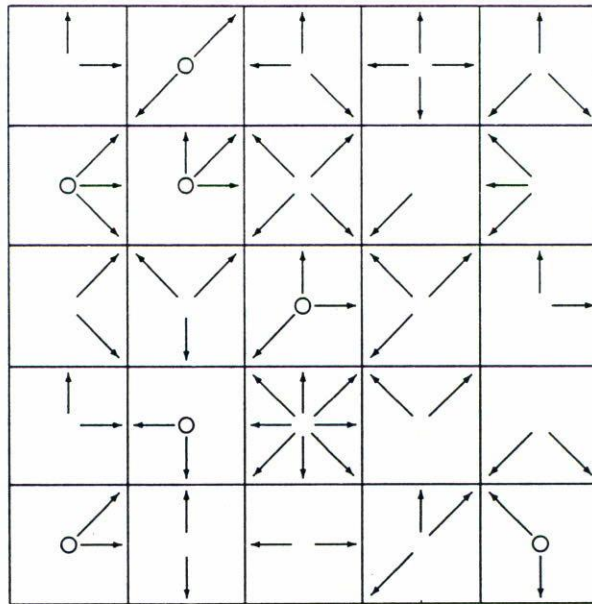


FIGURA 1. Ejemplo de una configuración del modelo de nueve velocidades ($d = 2, m = 1$). Las partículas en reposo se muestran como círculos abiertos, las partículas que se mueven a los primeros vecinos más cercanos se muestran como flechas en las direcciones de los ejes y las que se mueven a los segundos vecinos más cercanos como flechas en las direcciones diagonales.

N partículas y energía E , se cumple que

$$N = \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}, \tag{1}$$

$$E = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}; \tag{2}$$

con $N_{\mathbf{k}}$ el número de partículas con velocidad \mathbf{k} y

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \mathbf{k}^2 = \frac{1}{2} (k_1^2 + \dots + k_d^2)$$

la energía de una partícula que se mueve con velocidad \mathbf{k} .

Sea V el volumen de la red, o sea el número de sitios de ésta, y sean

$$n = \frac{N}{V}, \quad \epsilon = \frac{E}{V}, \quad n_{\mathbf{k}} = \frac{N_{\mathbf{k}}}{V},$$

el número de ocupación, la energía por sitio y el número de ocupación en la dirección \mathbf{k} . En equilibrio, esperamos que $n_{\mathbf{k}} = n_1$ si $\epsilon_{\mathbf{k}} = \epsilon_1$ pues la velocidad media del gas es cero. Podemos entonces agrupar los estados de acuerdo a su energía, y contar sobre ésta última

con el índice i . Para hacer esto introducimos el número g_i de velocidades con energía ϵ_i . La conservación del número de partículas y de la energía se pueden expresar ahora como

$$n = \sum_i g_i n_i, \quad (3)$$

$$\epsilon = \sum_i g_i \epsilon_i n_i, \quad (4)$$

donde hemos usado cantidades reducidas. Como ejemplo, si $d = 2$, $m = 1$, tenemos que $\epsilon_0 = 0$, $\epsilon_1 = \frac{1}{2}$, $\epsilon_2 = 1$, $g_0 = 1$, $g_1 = g_2 = 4$.

Es un ejercicio sencillo obtener el comportamiento termodinámico del modelo en el conjunto microcanónico. El número de estados accesibles Ω_{Bz} , Ω_{FD} y Ω_{BE} en las estadísticas de Boltzmann, Fermi-Dirac y Bose-Einstein son, respectivamente,

$$\Omega_{Bz} = \prod_{\mathbf{k}} \frac{V^{N_{\mathbf{k}}}}{N_{\mathbf{k}}!}, \quad (5)$$

$$\Omega_{FD} = \prod_{\mathbf{k}} \frac{V!}{N_{\mathbf{k}}!(V - N_{\mathbf{k}})!}, \quad (6)$$

$$\Omega_{BE} = \prod_{\mathbf{k}} \frac{(N_{\mathbf{k}} + V - 1)!}{(V - 1)!N_{\mathbf{k}}!}. \quad (7)$$

Definiendo la densidad de entropía s como

$$s = \frac{1}{V} \log \Omega,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} s_{Bz} &= - \sum_i g_i n_i (\log n_i - 1), \\ s_{FD} &= - \sum_i g_i [n_i \log n_i + (1 - n_i) \log(1 - n_i)], \\ s_{BE} &= - \sum_i g_i [n_i \log n_i - (1 + n_i) \log(1 + n_i)]; \end{aligned} \quad (8)$$

donde hemos usado la aproximación de Stirling. La distribución de equilibrio $\{\bar{n}_i\}$ se obtiene maximizando la entropía sujeta a las restricciones (3) y (4) con el método de los multiplicadores de Lagrange [21]. El resultado es

$$\begin{aligned} \bar{n}_{iBz} &= \exp(\alpha + \gamma \epsilon_i), \\ \bar{n}_{iFD} &= [\exp(-\alpha - \gamma \epsilon_i) + 1]^{-1}, \\ \bar{n}_{iBE} &= [\exp(-\alpha - \gamma \epsilon_i) - 1]^{-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

donde α y γ son los multiplicadores de Lagrange. Al sustituir este resultado en las expresiones para la entropía obtenemos

$$\begin{aligned}
 s_{\text{Bz}} &= -\gamma\epsilon + n - \alpha n, \\
 s_{\text{FD}} &= -\gamma\epsilon - \sum_i g_i \log(1 - n_i) - \alpha n, \\
 s_{\text{BE}} &= -\gamma\epsilon + \sum_i g_i \log(1 + n_i) - \alpha n.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Si comparamos estas expresiones con la ecuación de Euler

$$s = \beta e + \beta P - \beta \mu n,$$

donde β es el inverso de la temperatura T y μ el potencial químico, obtenemos

$$\alpha = \beta\mu, \quad \gamma = -\beta. \tag{11}$$

Entonces, la distribución en equilibrio está dada por

$$\begin{aligned}
 \bar{n}_{i\text{Bz}} &= \exp(\beta(\mu - \epsilon_i)), \\
 \bar{n}_{i\text{FD}} &= [\exp(-\beta(\mu - \epsilon_i)) + 1]^{-1}, \\
 \bar{n}_{i\text{BE}} &= [\exp(-\beta(\mu - \epsilon_i)) - 1]^{-1},
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

y la entropía se obtiene al sustituir esto último en la Ec. (8). Vemos también que la presión está dada por

$$\begin{aligned}
 \beta P_{\text{Bz}} &= n, \\
 \beta P_{\text{FD}} &= - \sum_i g_i \log(1 - \bar{n}_i), \\
 \beta P_{\text{BE}} &= \sum_i g_i \log(1 + \bar{n}_i).
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Nos interesan la entropía s , la presión P , la energía ϵ y el calor específico c como funciones del inverso de la temperatura β y del número de ocupación n . Para ello hay que encontrar $\mu = \mu(\beta, n)$ de la Ec. (3) con ayuda de las distribuciones en equilibrio (12). En la estadística de Boltzmann se puede encontrar el potencial químico fácilmente, mientras que en las otras estadísticas se requiere de una solución numérica. Dado el valor de β y n se varía μ hasta que la Ec. (3) se satisfaga.

Dado un número de ocupación fijo n , la energía por sitio ϵ está acotada por abajo por ϵ_F la energía de Fermi por sitio y por arriba por ϵ_M la energía máxima por sitio. Para

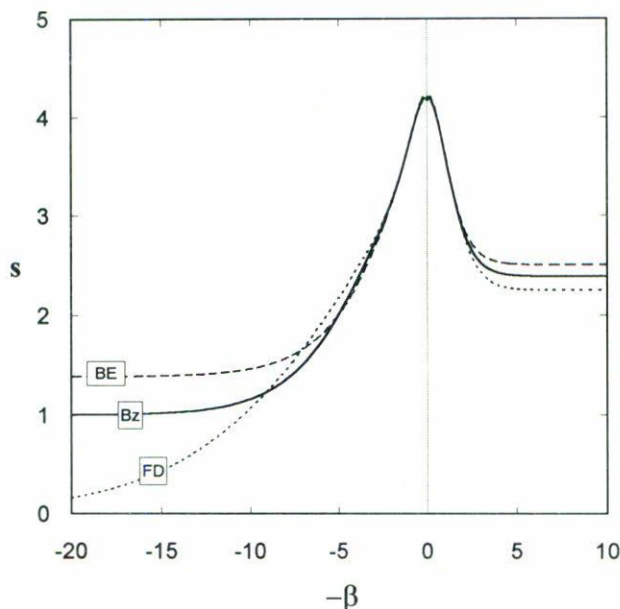


FIGURA 2. La entropía s en las tres estadísticas como función de $-\beta$ para $m = 2$, $n = 1$ y $d = 2$.

conocer ϵ_F se pone una partícula en reposo, las siguientes moviéndose hacia los primeros vecinos más cercanos con rapidez 1 y energía $1/2$ (masa = 1) y así hasta agotar las n partículas. El valor de ϵ_F es la suma de las energías de cada una de las partículas. El valor de ϵ_M se encuentra colocando las primeras partículas en la dirección de los primeros vecinos más lejanos con rapidez $m\sqrt{d}$ y energía $dm^2/2$, las siguientes en la dirección de los segundos vecinos más lejanos y así hasta agotar las n partículas.

La entropía no puede ser una función siempre creciente de la energía, dado que la densidad de energía está acotada por arriba; es creciente para energías bajas y decreciente para energías altas con un máximo en el valor de la energía para el cual el número de estados accesibles es máximo y se presenta cuando todos los números de ocupación son iguales. Dado que la temperatura se define como el inverso de la derivada de la entropía respecto de la energía, ésta es positiva, infinita y negativa cuando la entropía es creciente, alcanza su valor máximo y es decreciente, respectivamente. El inverso de la temperatura β es una función decreciente de la energía que no tiene una discontinuidad como la temperatura, por lo que si tomamos a $-\beta$ como variable independiente, ésta resulta ser una función creciente de la energía y por ello adecuada para describir este tipo de sistemas (véase Ref. [2]).

En la Fig. 2 mostramos la entropía en las tres estadísticas como función de $-\beta$ para $m = 2$, $n = 1$ y $d = 2$. La curva inferior corresponde a fermiones, la superior a bosones y la de enmedio a la estadística de Boltzmann. Para $\beta = 0$ la entropía asume su valor máximo que corresponde a la igualdad de todos los números de ocupación. Las tres entropías son aproximadamente iguales en el máximo debido a que el número de ocupación por sitio es pequeño. Si n es mayor, el orden en que aparecen las tres curvas puede cambiar,

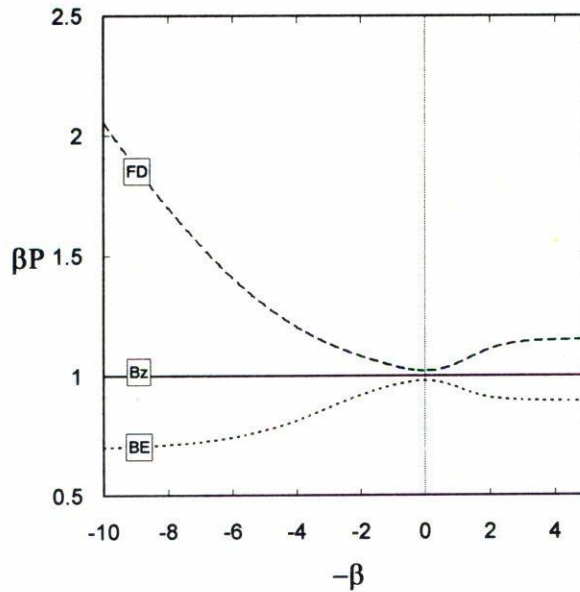


FIGURA 3. Gráfica de βP en las tres estadísticas como función de $-\beta/$ para $m = 2, n = 1$ y $d = 2$.

por ejemplo, cuando $n = 4$ y $-\beta$ tiende a ∞ la entropía de un sistema de fermiones es cero pues sólo hay un estado accesible cuando cada una de las cuatro partículas tiene la máxima energía que es $m^d/2$. En el otro límite, cuando $-\beta$ tiende a $-\infty$ la entropía de Boltzmann es la que se encuentra más abajo pues sólo hay un estado accesible con las cuatro partículas con velocidad cero, mientras que en la estadística de Fermi el estado base es degenerado con una partícula con velocidad 0 y las otras tres moviéndose con rapidez 1.

En la Fig. 3 mostramos βP como función de $-\beta$. Para la estadística de Boltzmann se obtiene una recta horizontal, [Ec. (13)], por lo que esta gráfica muestra la desviación de la presión del gas ideal en los otros dos casos. Debido al principio de exclusión la presión crece a energías bajas y altas para fermiones, mientras que la presión de un gas de bosones es inferior a la presión de un gas ideal clásico.

La energía como función de $-\beta$ y n está acotada por abajo y por arriba como mencionamos anteriormente. En las estadísticas de Boltzmann y de Fermi-Dirac cuando $-\beta$ tiende a $-\infty$ todas las partículas ocupan el estado con velocidad 0 y cuando $-\beta$ tiende a ∞ ocupan los estado de energía permitida máxima, o sea $m^d/2$. Entonces, la curva de la energía tiene forma de "s" pasando suavemente de la cota inferior a la superior. Para un gas de fermiones la energía tiene la misma forma, pero las cotas son distintas y dependen del número de ocupación n pues por el principio de exclusión sólo puede haber una partícula en cada estado.

En la Fig. 4 mostramos el potencial químico como función de $-\beta$. La curva inferior corresponde a bosones, la superior a fermiones y la de enmedio a la estadística de Boltz-

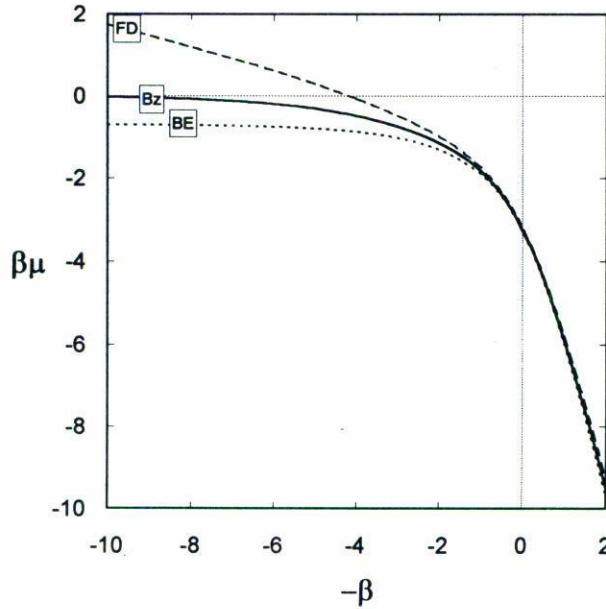


FIGURA 4. Gráfica de $\beta\mu$ en las tres estadísticas como función de $-\beta$ para $m = 2, n = 1, y d = 2$.

mann. Notamos que en el caso de la estadística de Bose-Einstein la cantidad $\beta\mu$ es siempre negativa.

El calor específico se define como

$$c = \frac{1}{n} \frac{\partial e}{\partial T}.$$

Dado que

$$c = -\frac{\beta^2}{n} \left[\frac{\partial e}{\partial \beta} \Big|_{\mu} + \frac{\partial e}{\partial \mu} \Big|_{\beta} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right],$$

y

$$\frac{\partial \mu}{\partial \beta} = -\frac{\partial n}{\partial \beta} / \frac{\partial n}{\partial \mu},$$

obtenemos

$$c = -\frac{\beta^2}{n} \left[\frac{M^{(0)}M^{(2)} - M^{(1)^2}}{M^{(0)}} \right]. \tag{14}$$

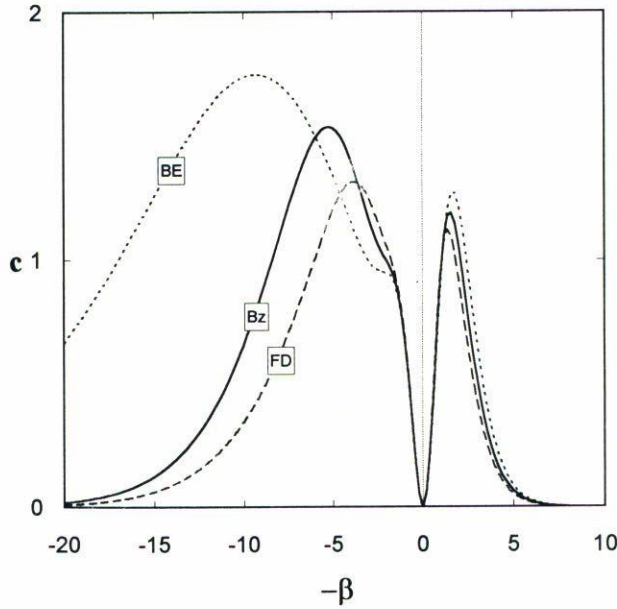


FIGURA 5. El calor específico c en las tres estadísticas como función de $-\beta$ para $m = 2$, $n = 1$ y $d = 2$.

En esta última ecuación

$$M_{Bz}^{(q)} = \sum_i g_i \epsilon_i^q \bar{n}_i,$$

$$M_{FD}^{(q)} = \sum_i g_i \epsilon_i^q \bar{n}_i (1 - \bar{n}_i),$$

$$M_{BE}^{(q)} = \sum_i g_i \epsilon_i^q \bar{n}_i (1 + \bar{n}_i).$$

En la Fig. 5 mostramos el calor específico como función de $-\beta$ para $m = 2$, $n = 1$ y $d = 2$. Las curva inferior corresponde a fermiones, la superior a bosones y la de enmedio a la estadística de Bose-Einstein. El orden en que aparecen las curvas varía con m , n y d . Podemos ver que el calor específico tiende a cero cuando β tiende a $\pm\infty$ dado que es imposible aumentar la energía del sistema en esos límites. Pero también $c = 0$ cuando $\beta = 0$.

El comportamiento del calor específico al variar m , o sea al cambiar el número de velocidades permitidas, se muestra en la Fig. 6 para fermiones. En las otras dos estadísticas se obtiene un comportamiento similar, pero un poco menos acentuado. Aumentando m , recordamos que el número de velocidades permitidas es $(2m + 1)^d$, aparece una meseta

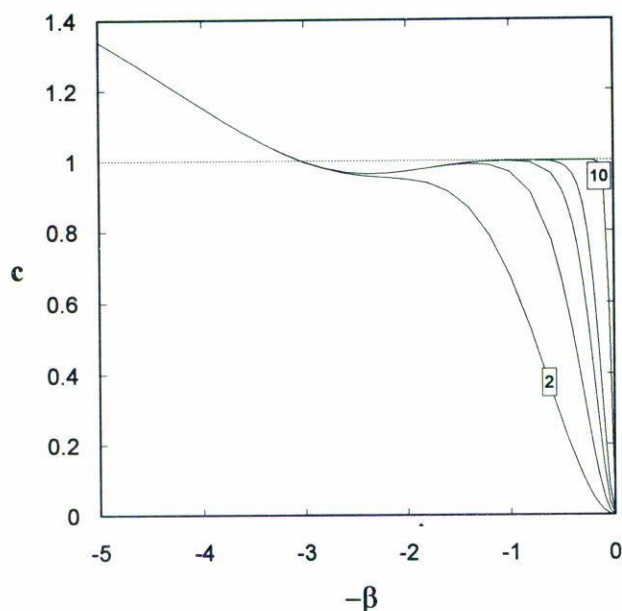


FIGURA 6. El calor específico c para la estadística de Fermi-Dirac como función de $-\beta$ para $m = 2, 3, 4, 5, 10$, $n = 1$ y $d = 2$. La curva inferior corresponde a $m = 2$, la superior a $m = 10$.

en el calor específico. El valor de c en dicha meseta es aproximadamente $d/2$, donde d es el número de dimensiones en las que se mueve el gas. Vemos que la meseta se alarga al crecer m de 2 a 10. Este resultado nos indica que independientemente de la estadística, al aumentar el número de velocidades permitidas se tiende a un comportamiento de gas ideal clásico para el cual la temperatura es proporcional a la energía, pero sólo en un intervalo de temperatura que corresponde a una temperatura positiva y alta. Así, queda claro que estos modelos no pueden tratarse como gases ideales y que hay que convivir con las consecuencias termodinámicas de la cota superior al espectro de energía, aún en situaciones fuera de equilibrio.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo contó con apoyo económico parcial del proyecto Mecánica Estadística y Sistemas Dinámicos del CNR (Italia)-CONACYT, y de la DGAPA de la UNAM.

REFERENCIAS

1. *Lattice Gas Methods for PDE's*, Proc. NATO Advanced Research Workshop, Los Alamos (1989), *Physica D* **47** (1991).
2. N.F. Ramsey, *Phys. Rev.* **103** (1956) 20.

3. B. Chopard, M. Droz, *Phys. Lett.* **A126** (1988) 476.
4. S. Chen, H. Chen, G.D. Doolen, *Complex Systems* **3** (1989) 243.
5. S. Chen, M. Lee, G.D. Doolen K. ZHao, *Physica D* **37** (1989) 42.
6. P. Ehrenfest, *Collected Scientific Papers*, North Holland (1959), 229.
7. M.J. Klein, *Paul Ehrenfest*, vol. 1, North Holland (1970), 115.
8. R. Rechtman, A. Salcido, A. Calles, *Eur. J. Phys.* **12** (1991) 27.
9. T. Carleman, *Problèmes Mathématiques dans la Théorie Cinétique des Gas*, Almqvist and Wiskells, Uppsala (1957).
10. H.P. McKean, *Commun. Pure Appl. Math.* **28** (1975) 435; *J. Comb. Theory* **2** (1967) 358.
11. M.H. Ernst, *Phys. Rep.* **78** (1981) 1.
12. D. Zanette, *Physica* **148A** (1988) 288.
13. J. Broadwell, *Phys. Fluids* **7** (1964) 1243.
14. J. Hardy, Y. Pomeau, O. de Pazzis, *J. Math. Phys.* **14** (1973) 1746.
15. U. Frisch, B. Hasslacher, Y. Pomeau, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 1505.
16. U. Frisch, D. d'Humières, B. Hasslacher, P. Lallemand, Y. Pomeau, J.P. Rivet, *Complex Systems* **1** (1987) 649.
17. D. d'Humières, P. Lallemand, U. Frisch, *Europhys. Lett.* **2** (1986) 291.
18. R. Rechtman, A. Salcido, F. Bagnoli, "Thermomechanical Effects in a Nine Velocities Two-Dimensional Lattice Gas Model", in *Lectures on Thermodynamics and Statistical Mechanics*, M. López de Haro, C. Varea, eds., World Scientific (1990).
19. A. Salcido, R. Rechtman, "Equilibrium Properties of a Cellular Automaton for Thermofluid Dynamics", in *Nonlinear Phenomena in Fluids, Solids and Other Complex Systems*, P. Cordero, B. Nachtergaele, eds., Elsevier (1991).
20. F. Bagnoli, D. Zanette, "Definition of Temperature for Discrete Velocity Gases", preprint n. 7/1991 Dipartimento di Matematica Applicata, Università di Firenze, Florencia, Italia.
21. L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Statistical Physics*, Pergamon Press, Oxford (1958).