La raíz cuadrada de una partícula puntual de espín $\frac{1}{2}$, un trompo, una cuerda relativista y una partícula puntual de espín $\frac{3}{2}$

J.A. NIETO* Y O. OBREGÓN**
Instituto de Física, Universidad de Guanajuato
Apartado postal E-143, 37150 León, Guanajuato, México
Recibido el 26 de noviembre de 1992; aceptado el 15 de junio de 1993

RESUMEN. En este trabajo se ilustra someramente el método de la raíz cuadrada a través de cuatro sistemas físicos libres: 1) Una partícula puntual supersimética, de espín $\frac{1}{2}$; 2) un trompo supersimétrico (llamado *superpépetl*); 3) una cuerda relativista con espín; 4) una partícula puntual supersimétrica de espín $\frac{3}{2}$.

ABSTRACT. In this work the square root method is illustrated through four free physical systems: 1) A supersymmetric spin-$\frac{1}{2}$ point particle; 2) a supersymmetric top (called *superpepetl*); 3) a relativistic string with spin; 4) a supersymmetric spin-$\frac{3}{2}$ point particle.

PACS: 11.30.Pb, 04.65.+e

1. INTRODUCCIÓN

El método de la raíz cuadrada es un formalismo matemático que ha jugado un papel muy importante en el desarrollo de teorías supersimétricas [1]. En particular, este método ha sido muy útil en el desarrollo de la supergravedad [2] y las supercuerdas [3]. En efecto, se sabe que la supergravedad puede entenderse como la raíz cuadrada de la teoría de la relatividad general [4] y que la teoría de las supercuerdas tuvo sus orígenes en la cuerda con espín [5], la cual, a su vez, se entiende como la raíz cuadrada de una cuerda relativista sin espín.

El método de la raíz cuadrada, originalmente descubierto por Dirac [6] en conexión con la ecuación de onda relativista del electrón, tiene sus fundamentos en la teoría de Dirac de sistemas clásicos hamiltonianos con constricciones [7] y el formalismo matemático de variables que anticonmutan [8]. La idea central en este método, es construir nuevas constricciones lineales en los momentos canónicos (las raíces cuadradas), a partir de las constricciones hamiltonianas cuadráticas en tales momentos, asociadas a un sistema físico bosónico (descrito por variables que conmutan). La linealización de las constricciones

*Investigación apoyada en parte por la coordinación de investigación científica de la UMSNH, bajo convenio con la Esc. de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
**Bajo convenio con la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa. Investigación apoyada en parte por el CONACYT, contratos 1683-E9209, F246 E9207.

bosónicas se logra introduciendo nuevas variables que anticonmutan. Así, el conjunto total de constricciones, incluyendo las nuevas y las bosónicas, deben cerrarse de acuerdo a un álgebra "graduada" [9].

El objetivo principal de este trabajo, consiste en ilustrar someramente el método de la raíz cuadrada a través de los cuatro sistemas físicos libres siguientes:

1. Una partícula puntual supersimétrica de espín $\frac{1}{2}$.
2. Un trompo supersimétrico (*Superpépetl*).
3. Una cuerda relativista con espín.
4. Una partícula puntual supersimétrica de espín $\frac{3}{2}$.

Cada uno de estos sistemas relativistas son de interés físico al menos por una razón. El caso (1) es relevante físicamente porque, al cuantizar el sistema clásico, se encuentra que su raíz cuadrada conduce a la importante ecuación de onda de Dirac para el electrón. El sistema (2), el Superpépetl, combina dos conceptos diferentes de espín: el espín asociado al momento angular interno (descrito en términos de variables que conmutan) y el espín intrínseco (descrito en términos de variables que anticonmutan). El sistema (3) jugó históricamente un papel muy importante en el desarrollo de la teoría de las supercuerdas. Por último, el sistema físico (4) ilustra la relación entre el espín $\frac{3}{2}$ y la relatividad linealizada y apunta al resultado de que la supergravedad es la raíz cuadrada de la gravedad.

Antes de proceder a discutir cada uno de estos ejemplos es conveniente hacer algunos comentarios sobre el estilo de presentación de este trabajo. Para empezar nos gustaría aclarar que nuestra intención en este trabajo no es discutir en todo detalle y profundidad cada uno de los ejemplos, sino más bien mostrar lo más brevemente posible el método de la raíz cuadrada, esperando despertar el interés y la curiosidad del lector sobre el tema. Con esta idea en mente hemos tratado de evitar en lo posible introducir en el texto definiciones que por su grado de dificultad nos llevarían necesariamente a extender substancialmente los ejemplos y el trabajo en general. En este mismo sentido no realizamos algunos cálculos, ni explicamos algunos de los resultados. Por supuesto, nos gustaría de antemano disculparnos con el lector por tantas omisiones. Sin embargo, pensamos que en todo caso una vez despertado el interés del lector, él puede por su cuenta recurrir a las fuentes originales para ver los detalles. Por último, nos gustaría mencionar, para evitar interpretaciones equivocadas, que existe un mensaje no aparente en el presente trabajo que es el de decirle al lector algo como lo que sigue: "¡Hey!, mira, aquí hay un método matemático que ha estado funcionando y produciendo importantes teorías como la teoría del electrón de Dirac, supercuerdas y supergravedad. ¿No te parece que sería bueno reflexionar porqué este método ha funcionado, produciendo teorías a nivel fundamental? aplicando dicho método, quizá tú mismo te veas motivado a descubrir una nueva teoría fundamental".

2. Una partícula puntual supersimétrica de espín $\frac{1}{2}$

El ejemplo más simple para ilustrar el método de la raíz cuadrada lo constituye la partícula puntual libre supersimétrica de espín $\frac{1}{2}$.

Antes de aplicar el método de la raíz cuadrada, se debe primero considerar el formalismo hamiltoniano. Para el caso de una partícula puntual se tiene que su movimiento puede ser descrito por medio de las ocho variables $(x^\mu(\tau), P^\nu(\tau))$ con los índices $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Aquí, x^μ representa la posición del sistema, P^ν es el momento lineal canónico y τ es un parámetro arbitrario tipo tiempo, usado para denotar puntos a lo largo de la línea de universo de la partícula. Además, se considera que su dinámica es generada por la constricción de primera clase

$$H \equiv P^\mu P_\mu + m^2 \approx 0, \tag{2.1}$$

donde m es una constante del movimiento que representa la masa en reposo del sistema. Además, se utiliza la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ y el símbolo "$\approx$" se lee "débilmente igual a" , significando que H es cero, pero su paréntesis de Poisson con otras variables canónicas no necesariamente es cero. Nótese que H es una constricción cuadrática en los momentos canónicos P^μ.

El primer paso en el procedimiento de la raíz cuadrada consiste en describir la raíz cuadrada S de H como una constricción lineal en los momentos canónicos P^μ, normalmente

$$S \equiv \theta^\mu P_\mu + \theta_5 m \approx 0. \tag{2.2}$$

Aquí, θ^μ y θ_5 se consideran como variables que anticonmutan (elementos impares de un álgebra de Grassmann; véase la Ref. [8]) e independientes de x^μ y P^μ.

Ahora, un requisito muy importante es pedir que las constricciones S y H cumplan el álgebra siguiente:

$$\{S, S\} = iH, \quad \{S, H\} = 0, \quad \{H, H\} = 0. \tag{2.3}$$

El símbolo "{ , }" representa paréntesis canónicos de Poisson generalizados definidos en la forma

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial x^\mu}\frac{\partial B}{\partial P_\mu} - \frac{\partial A}{\partial P^\mu}\frac{\partial B}{\partial x_\mu} + i\frac{\partial A}{\partial \theta^\mu}\frac{\partial B}{\partial \theta_\mu} + i\frac{\partial A}{\partial \theta_5}\frac{\partial B}{\partial \theta_5}, \tag{2.4}$$

donde A y B son dos funciones arbitrarias de las variables canónicas.

De la definición (2.4) de los paréntesis canónicos de Poisson (generalizados), se aprende que los únicos paréntesis diferentes de cero de las variables (x^μ, P^ν) y (θ^μ, θ_5) son

$$\{x^\mu, P^\nu\} = \eta^{\mu\nu}, \quad \{\theta^\mu, \theta^\nu\} = i\eta^{\mu\nu}, \quad \{\theta_5, \theta_5\} = i. \tag{2.5}$$

Usando esta álgebra y las definiciones (2.1) y (2.2) para las constricciones H y S respectivamente, se puede demostrar que el álgebra (2.3) es correcta.

El álgebra (2.3) implica que tanto H como S son constricciones de primera clase. Dado que en general las constricciones de primera clase generan la dinámica de un sistema físico, se aprende de (2.3) que las constricciones H y S son los generadores de la dinámica de una partícula libre relativista supersimétrica de espín $\frac{1}{2}$. Nótese que es el primer paréntesis en (2.3) el cual sugiere llamar a S la raíz cuadrada de H.

Después de cuantizar al sistema supersimétrico, se encuentran dos ecuaciones de onda fundamentales: la ecuación de Klein-Gordon de H y la ecuación de Dirac de S. En efecto, a un nivel cuántico H conduce a la ecuación de Klein-Gordon

$$\hat{H}|\Psi\rangle = 0, \tag{2.6}$$

mientras que S conduce a la ecuación de Dirac

$$\hat{S}|\Psi\rangle = 0. \tag{2.7}$$

3. Un trompo supersimétrico: *superpépetl*

El concepto de trompo relativista es una extensión del concepto de partícula puntual relativista, en el sentido de que para describir el movimiento de un trompo se usan cuatro vectores ortonormales $e^{\mu}_{(\alpha)}(\tau)$ además de las coordenadas de posición $x^{\mu}(\tau)$. La tétrada $e^{\mu}_{(\tau)}$, considerada ligada al sistema, se usa para describir el movimiento de rotación del trompo. Aquí, τ es un parámetro arbitrario usado para denotar la posición del sistema a lo largo de su línea de universo y el índice (α) denota el nombre de los diferentes vectores de la tétrada.

El *pepetl* constituye un caso especial de trompo relativista [10]. Este sistema se distingue de otros trompos en que su dinámica se genera por la constricción de Regge [13]:

$$\mathcal{H} \equiv P^{\mu}P_{\mu} + \frac{1}{2r^2}\Sigma^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu} + m_0^2 \approx 0. \tag{3.1}$$

Aquí, r y m_0 son constantes del movimiento, P^{μ} y $\Sigma^{\mu\nu} = -\Sigma^{\nu\mu}$ son los momentos canónicos; con P^{μ} el momento lineal asociado a las coordenadas x^{μ} y $\Sigma^{\mu\nu}$ el espín momento angular interno asociado a la tetrada $e^{\mu}_{(\alpha)}$. Los momentos P^{μ} y $\Sigma^{\mu\nu}$ obedecen la llamada constricción de Tulczyjew

$$\mathcal{H}^{\mu} \equiv \Sigma^{\mu\nu}P_{\nu} \approx 0, \tag{3.2}$$

la cual se puede entender como la definición del centro de masa del sistema. Es conveniente hacer notar que $\mathcal{H}$ se reduce a la constricción H para una partícula puntual cuando el tensor de espín $\Sigma^{\mu\nu}$ tiende a cero. La constricción $\mathcal{H}$ definida en (3.1) es de interés físico porque es el análogo de la fórmula de Christodolou-Ruffini para un hoyo negro sin carga [11].

Discutiremos ahora someramente la teoría del *Superpépetl* [10]. La idea central en tal teoría es aplicar el método de la raíz cuadrada a las constricciones $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}^{\mu}$ para convertir al sistema físico en supersimétrico. El primer paso es escribir nuevas constricciones que sean lineales en los momentos. La posibilidad más simple parece ser la siguiente;

$$S \equiv \theta^{\mu}P_{\mu} + \frac{1}{2r}\theta^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu} + \theta_5 m_0 \approx 0, \tag{3.3}$$

$$S^{\mu} \equiv \theta^{\mu\nu}P_{\nu} \approx 0. \tag{3.4}$$

Aquí, θ^μ, $\theta^{\mu\nu}$ y θ_5 son variables que anticonmutan, independientes de las coordenadas x^μ, de la tetrada $e^\mu_{(\alpha)}$, así como de los momentos P^μ y $\Sigma^{\mu\nu}$.

Para el caso del trompo relativista definimos los paréntesis canónicos de Poisson generalizados de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\{A,B\} = {} & \frac{\partial A}{\partial x^\mu}\frac{\partial B}{\partial P_\mu} - \frac{\partial A}{\partial P^\mu}\frac{\partial B}{\partial x_\mu} + \Sigma^{\mu\nu}\frac{\partial A}{\partial \Sigma^{\mu\lambda}}\frac{\partial B}{\partial \Sigma^\nu{}_\lambda} \\
& + \frac{1}{2}\left(e^\mu_{(\alpha)}\frac{\partial A}{\partial e^{\mu(\beta)}} - e^\mu_{(\beta)}\frac{\partial A}{\partial e^{\mu(\alpha)}}\right)\frac{\partial B}{\partial \Sigma_{(\alpha\beta)}} \\
& - \frac{1}{2}\left(e^\mu_{(\alpha)}\frac{\partial B}{\partial e^{\mu(\beta)}} - e^\mu_{(\beta)}\frac{\partial B}{\partial e^{\mu(\alpha)}}\right)\frac{\partial A}{\partial \Sigma_{(\alpha\beta)}} \\
& + i\frac{\partial A}{\partial \theta^\mu}\frac{\partial B}{\partial \theta_\mu} + i\frac{\partial A}{\partial \theta_5}\frac{\partial B}{\partial \theta_5} + i\frac{\partial A}{\partial \theta^{\mu\nu}}\frac{\partial B}{\partial \theta_{\mu\nu}},
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

donde A y B son funciones arbitrarias de las variables canónicas x^μ, P^μ, θ_μ, θ_5, $\theta^{\mu\nu}$, $e^\mu_{(\alpha)}$ y $\Sigma_{\mu\nu}$. Aquí, como es usual $\Sigma_{(\alpha\beta)} = e^\mu_{(\alpha)}e^\nu_{(\beta)}\Sigma_{\mu\nu}$. Los términos que involucran x^μ, P_μ, θ_μ y θ_5 son esencialmente los mismos que para el caso de una partícula puntual [véase Ec. (2.4)]. Ciertamente los otros términos, que contienen las variables de rotación del trompo $e^\mu_{(\alpha)}$ y $\Sigma^{\mu\nu}$ tienen una forma no familiar. A este respecto, conviene mencionar que es posible derivar tales términos a partir de la combinación usual $\frac{\partial A}{\partial \phi^i}\frac{\partial B}{\partial P_i} - \frac{\partial A}{\partial P^i}\frac{\partial B}{\partial \phi_i}$, donde las variables ϕ^i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, son las seis componentes independientes de las variables $e^\mu_{(\alpha)}$ (como las variables $e^\mu_{(\alpha)}$ satisfacen la relación de ortonormalidad $\eta_{\mu\nu}e^\mu_{(\alpha)}e^\nu_{(\beta)} = \eta_{(\alpha\beta)} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$, sólo seis componentes de $e^\mu_{(\alpha)}$ son independientes) y P^i son los momentos canónicos asociados a ϕ^i. En las Refs. [7] y [12] pueden verse los detalles de esta derivación. El procedimiento es similar para incluir las variables que anticonmutan $\theta^{\mu\nu}$, con los signos apropiados (véase la Ref. [10]).

Puede demostrarse con la ayuda de los paréntesis de Poisson para las variables P^μ y $\Sigma^{\mu\nu}$ que

$$
\begin{aligned}
&\{x^\mu, P^\nu\} = \eta^{\mu\nu}, \quad \{P^\mu, P^\nu\} = 0, \quad \{P^\mu, \Sigma^{\alpha\beta}\} = 0, \\
&\{\Sigma^{\mu\nu}, \Sigma^{\alpha\beta}\} = \Sigma^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \Sigma^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha} + \Sigma^{\nu\beta}\eta^{\mu\alpha} - \Sigma^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta},
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

y con los paréntesis de Poisson (generalizados) para las variables $\theta^\mu, \theta^{\mu\nu}$ y θ_5:

$$
\begin{aligned}
&\{\theta^\mu, \theta^\nu\} = i\eta^{\mu\nu}, \quad \{\theta^\mu, \theta_5\} = 0, \quad \{\theta_5, \theta_5\} = i, \quad \{\theta^{\mu\nu}, \theta^\alpha\} = 0, \\
&\{\theta^\mu, \theta_5\} = 0, \quad \{\theta^{\mu\nu}, \theta^{\alpha\beta}\} = i(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}),
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

obtenidos de (3.5), que S es una constricción de primera clase y satisface el paréntesis de Poisson

$$
\{S, S\} = i\mathcal{H}_{\text{nuevo}}. \tag{3.8}
$$

Aquí,

$$\mathcal{H}_{\text{nuevo}} = \mathcal{H}_{\text{viejo}} + \mathcal{H}', \tag{3.9}$$

donde

$$\mathcal{H}' \equiv \frac{i}{r^2}\theta^{\mu\alpha}\theta^{\nu}_{\alpha}\Sigma_{\mu\nu}. \tag{3.10}$$

Es importante señalar que el hecho de que al aplicar el método de la raíz cuadrada surja una nueva constricción hamiltoniana no es nuevo. El modelo del *superpépetl* es en este sentido similar al caso de la cuerda con espín [5] y a la supergravedad [4].

4. Una cuerda relativista con espín

En esta sección se discutirá brevemente la teoría de una cuerda libre con espín desarrollada por Ramond [5]. Esta teoría es interesante porque históricamente jugó un papel muy importante en la evolución de la teoría de las supercuerdas [3].

El movimiento de una cuerda relativista se describe a través de las coordenadas de posición $x^\mu(\tau,\sigma)$, donde τ y σ son parámetros arbitrarios; τ describe puntos a lo largo de la evolución del sistema, mientras que σ denota puntos a lo largo de la cuerda. En conexión a las coordenadas $x^\mu(\tau,\sigma)$, se puede introducir el momento canónico $\mathcal{P}^\mu = \mathcal{P}^\mu(\tau,\sigma)$ definido como

$$\mathcal{P}^\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} + \frac{\partial L}{\partial x'_\mu}, \tag{4.1}$$

donde L es el lagrangiano de Nambú [3] y

$$\dot{x}^\mu \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}, \quad x'^\mu \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma}.$$

Además, $\mathcal{P}^\mu(\tau,\sigma)$ satisface el paréntesis de Poisson

$$\{\mathcal{P}^\mu(\sigma), \mathcal{P}^\nu(\sigma')\} = \eta^{\mu\nu}\frac{d}{d\sigma}\delta(\sigma-\sigma'). \tag{4.2}$$

Es importante mencionar que este paréntesis de Poisson puede ser obtenido a partir de la siguiente definición de paréntesis de Poisson generalizado:

$$\begin{aligned}\{A,B\} = \int d\sigma \Bigg(&\frac{\delta A}{\delta x^\mu(\sigma)}\frac{\delta B}{\delta P_\mu(\sigma)} - \frac{\delta A}{\delta P^\mu(\sigma)}\frac{\delta B}{\delta x_\mu(\sigma)} \\ &+ i\frac{\delta A}{\delta \theta^\mu(\sigma)}\frac{\delta B}{\delta \theta_\mu(\sigma)} + i\frac{\delta A}{\delta \theta_5(\sigma)}\frac{\delta B}{\delta \theta_5(\sigma)}\Bigg),\end{aligned} \tag{4.3}$$

donde $P_\mu = \partial L/\partial \dot{x}^\mu$. Para ver los detalles de cómo a partir de (4.3) se obtiene (4.2) sugerimos al lector consultar la Ref. [3].

Ramond [5] generaliza la constricción H para una partícula puntual, dada en (2.1), en la forma

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{P}^\mu(\sigma)\mathcal{P}_\mu(\sigma) + m^2 \approx 0; \tag{4.4}$$

y escribe la raíz cuadrada $\mathcal{S}$ de $\mathcal{H}$ como

$$\mathcal{S} \equiv \theta^\mu(\sigma)\mathcal{P}_\mu(\sigma) + \theta_5(\sigma)m \approx 0. \tag{4.5}$$

Aquí $\theta^\mu(\sigma)$ y $\theta_5(\sigma)$ son variables que anticonmutan, independientes de $x^\mu(\tau,\sigma)$ y $\mathcal{P}^\mu(\tau,\sigma)$. Además, $\theta^\mu(\tau,\sigma)$ y $\theta_5(\tau,\sigma)$ satisfacen el álgebra

$$\{\theta^\mu(\sigma), \theta^\nu(\sigma')\} = i\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma'), \quad \{\theta_5(\sigma), \theta_5(\sigma')\} = i\delta(\sigma-\sigma'). \tag{4.6}$$

Por supuesto, esta álgebra puede ser derivada a partir de los paréntesis canónicos de Poisson generalizados [Ec. (4.3)]. Usando (4.2) y (4.6) uno puede demostrar el resultado

$$\{S, S\} = i\mathcal{H}', \tag{4.7}$$

donde

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{1}{2}i\theta^\mu(\sigma)\frac{d}{d\sigma}\theta_\mu(\sigma) \tag{4.8}$$

es una constricción hamiltoniana nueva. En la Ref. [5] se muestra que la expansión de Fourier de las constricciones S y $\mathcal{H}'$ conduce a constricciones que dan lugar a un álgebra que se cierra.

5. Una partícula puntual supersimétrica de espín $\frac{3}{2}$

La teoría clásica de una partícula puntual supersimétrica de espín $\frac{3}{2}$ ha sido recientemente desarrollada por los autores del presente trabajo [13]. En efecto, aplicando el método de la raíz cuadrada, en forma similar a los casos anteriores, a la teoría de la supergravedad linealizada es posible obtener este resultado. Sorprendentemente, suponiendo que sólo se conociera la ecuación de Rarita-Schwinger, con el método que a continuación expondremos podrían haberse descubierto las ecuaciones de gravedad linealizada e inferir la supergravedad en su forma canónica.

Siguiendo en forma paralela las ideas para los casos anteriores, permítasenos primero considerar las ecuaciones de la supergravedad linealizada:

$$\partial_\mu\partial_\nu h^\alpha_\alpha - \partial^\alpha\partial_\nu h_{\mu\alpha} - \partial^\alpha\partial_\mu h_{\nu\alpha} + \partial^\alpha\partial_\alpha h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial_\alpha h^\beta_\beta + \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta h_{\alpha\beta} = 0 \tag{5.1}$$

y

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\gamma_5\gamma_\nu\partial_\alpha\Psi_\beta = 0, \tag{5.2}$$

donde $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$. En estas ecuaciones de campo, $h_{\mu\nu}$ está relacionada con el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ en la forma usual $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ y Ψ_β es el campo de Rarita-Schwinger que describe partículas de espín $\frac{3}{2}$.

Usualmente las Ecs. (5.1) y (5.2) se simplifican fijando las condiciones de norma. Por ejemplo, (5.1) se puede simplificar si se considera la norma $\partial^\alpha h_{\mu\alpha} = 0$. Sin embargo, en nuestro caso no queremos fijar ninguna norma, sino más bien tratar de obtener los operadores apropiados actuando sobre $h_{\mu\nu}$ y Ψ_β. A primera vista, considerando que la Ec. (5.1) tiene demasiados términos con derivadas de $h_{\mu\nu}$ pareciera, una tarea imposible. Sin embargo, esta idea puede lograrse introduciendo apropiadamente en la Ec. (5.1) deltas de Kronecker.

En efecto, definiendo $\hat{P}_\mu = -i\partial_\mu$ no es dificil ver que las ecuaciones de campo (5.1) y (5.2) pueden escribirse en la forma

$$\hat{\mathcal{H}}^{\alpha\beta}_{\mu\nu} h_{\alpha\beta} = 0 \tag{5.3}$$

y

$$\hat{\mathcal{S}}^{\mu\beta}\Psi_\beta = 0, \tag{5.4}$$

donde

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \equiv{}& \eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\hat{P}^\lambda\hat{P}_\lambda - \delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu\hat{P}^\lambda\hat{P}_\lambda \\ &- \eta_{\mu\nu}\hat{P}^\alpha\hat{P}^\beta - \eta^{\alpha\beta}\hat{P}_\mu\hat{P}_\nu + \delta^\alpha_\mu\hat{P}^\beta\hat{P}_\nu + \delta^\alpha_\nu\hat{P}^\beta\hat{P}_\mu,\end{aligned} \tag{5.5}$$

y

$$\hat{\mathcal{S}}^{\mu\alpha} = \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta}\hat{\theta}_\nu\hat{P}_\beta, \tag{5.6}$$

con $\hat{\theta}_\mu = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}\gamma_5\gamma_\mu$.

La idea ahora es pensar en los operadores $\hat{\mathcal{H}}^{\alpha\beta}_{\mu\nu}$ y $\hat{\mathcal{S}}^{\mu\alpha}$ como constricciones clásicas $\mathcal{H}^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = 0$ y $\mathcal{S}^{\mu\alpha} = 0$, donde

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{\alpha\beta}_{\mu\nu} ={}& \eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}P^\lambda P_\lambda - \delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu P^\lambda P_\lambda \\ &- \eta_{\mu\nu}P^\alpha P^\beta - \eta^{\alpha\beta}P_\mu P_\nu + \delta^\alpha_\mu P^\beta P_\nu + \delta^\alpha_\nu P^\beta P_\mu\end{aligned} \tag{5.7}$$

y

$$\mathcal{S}^{\mu\alpha} = \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta}\theta_\nu P_\beta. \tag{5.8}$$

Utilizando los paréntesis generalizados de Poisson $\{P_\mu, P_\nu\} = 0$, $\{P_\mu, \theta_\nu\} = 0$ y $\{\theta_\mu, \theta_\nu\} = i\eta_{\mu\nu}$, los cuales pueden ser obtenidos a partir de la definición (2.4), se puede demostrar que $\mathcal{H}^{\alpha\beta}_{\mu\nu}$ y $\mathcal{S}^{\mu\alpha}$ satisfacen el álgebra

$$\{\mathcal{S}^\alpha_\mu, \mathcal{S}^\beta_\nu\} = i\mathcal{H}^{\alpha\beta}_{\mu\nu}, \tag{5.9}$$

$$\{\mathcal{S}^\alpha_\mu, \mathcal{H}^{\lambda\beta}_{\sigma\rho}\} = 0, \tag{5.10}$$

$$\{\mathcal{H}^{\alpha\beta}_{\mu\nu}, \mathcal{H}^{\lambda\tau}_{\sigma\delta}\} = 0. \tag{5.11}$$

Esta álgebra demuestra que $\mathcal{S}^\alpha_\mu$ y $\mathcal{H}^{\alpha\beta}_{\mu\nu}$ son constricciones de primera clase. Además, se ve de (5.9) que $\mathcal{S}^{\mu\alpha}$ puede pensarse como la raíz cuadrada de $\mathcal{H}^{\alpha\beta}_{\mu\nu}$.

6. Comentarios finales

En este trabajo se ilustró brevemente el procedimiento de la raíz cuadrada a través de cuatro ejemplos: (1) una partícula puntual supersimétrica de espín $\frac{1}{2}$; (2) un trompo relativista; (3) una cuerda con espín y (4) una partícula puntual supersimétrica de espín $\frac{3}{2}$. La idea central en este trabajo fue mostrar la utilidad del método de la raíz cuadrada para convertir, a un nivel clásico, sistemas bosónicos en sistemas supersimétricos.

Nosotros pensamos que el material presentado en este artículo puede servir como motivación para eventualmente desarrollar un trabajo más completo sobre el tema. Incluso pensamos que un libro sería lo más adecuado para presentar en todo detalle y profundidad los ejemplos discutidos aquí (y quizá otros ejemplos).

Creemos, además, que el método de la raíz cuadrada brinda la oportunidad no sólo de realizar revisiones a nivel de enseñanza sino también de realizar investigaciones tanto desde un punto de vista matemático como físico. Por ejemplo, matemáticamente el método podría hacerse riguroso para de esa manera encontrar ciertos teoremas que permitan saber de antemano cuándo puede ser aplicado dicho método. Mientras que desde un punto de vista físico queda por aclarar el porqué el método funciona realmente en concordancia con aspectos teóricos y en algunos casos con la naturaleza misma.

Agradecimientos

Gracias a la lectura crítica de este trabajo por parte del M. en C. José Socorro García Díaz y de los físicos Luis Adolfo Torres González, Victor Manuel Villanueva Sandoval y José de Jesús Bernal Alvarado fue posible entender y modificar aspectos de contenido y redacción de este trabajo.

REFERENCIAS

1. C. Teitelboim, *Proc. of Current Trends in the Theory of Fields*, Conf. on the 50th anniversary of the Dirac equation. AIP Conf. Proc. No. 48, Particles and Fields No. 15, eds. J.E. Lannutti and P.K. Williams, New York (1978), 134.
2. P. Van Nieuwenhuizen, *Phys. Rep.* **68** (1981) 189.
3. J.H. Schwarz, *Superstrings* I y II, World Scientific, Singapore (1985).
4. R. Tabensky and C. Teitelboim, *Phys. Lett.* **69B** (1977) 453.
5. P. Ramond, *Phys. Rev.* **D3** (1971) 2315. Artículo No. 2 de la Ref. [3].
6. P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A117** (1928) 610.
7. A. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems*, Accademia Nazionale del Lincei, Roma (1976).
8. B. Dewitt, *Supermanifolds*, Cambridge University Press (1984).
9. R. Casalbuoni, *Il Nuovo Cimento* **A33** (1975) 115.
10. J.A. Nieto, *Phys. Lett.* **147B** (1984) 103; J.A. Nieto, Ph. D. Thesis, University of Texas at Austin (1986).
11. C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, San Francisco (1973).
12. A. Hanson and T. Regge, *Ann. of Phys.* **87** (1974) 498.
13. J.A. Nieto y O. Obregón, *Phys. Lett.* **A175** (1993) 11.