Enseñanza *Revista Mexicana de Física* **39**, *No. 5 (1993) 785–798*

Desarrollos armónicos del potencial de Coulomb en coordenadas cilíndricas, parabólicas y esferoidales

E. LEY-KOO
Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México
Apartado postal 20-364, 01000 México, D.F., México

Y

A. GÓNGORA T.*
University of Michigan, Physics Department
Ann Arbor, Michigan 48109-1120, USA

Recibido el 29 de abril de 1993; aceptado el 10 de junio de 1993

RESUMEN. Se construyeron los desarrollos armónicos del potencial de Coulomb en coordenadas cilíndricas circulares, parabólicas y esferoidales tanto prolatas como oblatas, como alternativas al bien conocido desarrollo multipolar con coordenadas esféricas. Estos desarrollos son útiles y necesarios en el estudio de sistemas físicos con las simetrías y condiciones de frontera asociadas a las geometrías de las coordenadas respectivas.

ABSTRACT. We construct the harmonic expansions of Coulomb's potential in circular cylindrical, parabolic, and both prolate and oblate spheroidal coordinates, as alternatives to the well-known multipolar expansion in spherical coordinates. These expansions are useful and necessary in the study of physical systems possessing symmetries and satisfying boundary conditions associated with the geometries of the respective coordinates.

PACS: 41.10.Dq; 41.70.+t

1. INTRODUCCIÓN

El desarrollo multipolar del potencial de Coulomb en coordenadas esféricas es bien conocido y ampliamente utilizado [1–4]. Entre sus propiedades matemáticas [5] se puede mencionar que dicho potencial es la función generadora de los polinomios de Legendre, y que su invariancia bajo rotaciones conduce al teorema de la adición para los armónicos esféricos; además, los armónicos esféricos constituyen una base completa de funciones ortonormales. Los significados de cada uno de los términos del desarrollo multipolar y de las discontinuidades de sus gradientes al pasar el punto campo de dentro hacia afuera de la esfera del punto fuente, han sido explicados desde el punto de vista de la electrostática, sobre la base de la relación unívoca entre fuentes y campos de una misma multipolaridad [6]. En cálculos de física atómica la repulsión coulombiana electrón-electrón ha sido incorporada a través de dicho desarrollo multipolar [7].

---

*En año sabático del Instituto de Física de la UNAM.

En este trabajo se construyen de manera sistemática los desarrollos armónicos del potencial de Coulomb en coordenadas cilíndricas circulares, parabólicas y esferoidales tanto prolatas como oblatas. La motivación general de estos desarrollos alternativos al desarrollo multipolar es el estudio de sistemas físicos que no poseen la simetría esférica sino simetrías asociadas a las geometrías de las otras coordenadas. En consecuencia, en la Sec. 2 se presentan las ecuaciones de transformación de las coordenadas bajo consideración a coordenadas cartesianas; se calculan los vectores de desplazamiento determinando así los vectores unitarios y los factores de escala asociados en las coordenadas cuvilíneas. A partir de esos factores se escriben el operador laplaciano, así como las ecuaciones de Laplace y de Poisson; se lleva a cabo la separación de la ecuación de Laplace y se identifican sus soluciones que son las funciones armónicas en las coordenadas respectivas; y se construyen las soluciones de la ecuación de Poisson para la fuente puntual, que son desde luego el potencial de Coulomb o la función de Green, como desarrollos de las funciones armónicas. El método utilizado se basa en los desarrollos armónicos tanto del potencial como de la fuente y se ilustra explícitamente para coordenadas cilíndricas circulares en la Ref. [4]. En la Sec. 3 se calculan las componentes armónicas del campo de intensidad eléctrica y de la distribución de carga. Finalmente, en la Sec. 4 se señalan algunos puntos de interés didáctico y se mencionan algunos problemas físicos que ilustran la utilidad y necesidad de estos desarrollos en los análisis cuantitativos correspondientes.

2. DESARROLLOS ARMÓNICOS DEL POTENCIAL COULOMBIANO

Los desarrollos armónicos del potencial coulombiano [1–4] corresponden a las soluciones de la ecuación de Poisson para una fuente puntual,

$$\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}\,') = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,'), \tag{1}$$

como superposiciones de las funciones armónicas que son soluciones de la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = 0. \tag{2}$$

Es claro que para puntos campo diferentes del punto fuente ($\vec{r} \neq \vec{r}\,'$), la Ec. (1) coincide con la Ec. (2), lo cual justifica el poder construir tales desarrollos armónicos. Adicionalmente, la solución de la Ec. (1) requiere la integración explícita alrededor del punto fuente $\vec{r} = \vec{r}\,'$, para determinar el peso de cada una de las funciones armónicas que se superponen. A continuación se construyen explícitamente los desarrollos armónicos del potencial coulombiano en coordenadas a) cilíndricas circulares, b) parabólicas, c) esferoidales prolatas y d) esferoidales oblatas.

El punto de partida son las ecuaciones de transformación de las coordenadas curvilíneas a) $(0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\infty < z < \infty)$, b) $(0 \leq \xi < \infty, 0 \leq \eta < \infty, \varphi)$, c) $(1 \leq \lambda < \infty, -1 \leq \mu \leq 1, \varphi)$ y d) $(0 \leq \sigma < \infty, -1 \leq \tau \leq 1, \varphi)$ a las coordenadas cartesianas [5]:

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi, \qquad z = z; \tag{3a}$$

$$x = \xi\eta\cos\varphi, \qquad y = \xi\eta\,\mathrm{sen}\,\varphi, \qquad z = (\xi^2 - \eta^2)/2; \tag{3b}$$

$$x = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}\cos\varphi, \qquad y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}\,\mathrm{sen}\,\varphi, \qquad z = c\lambda\mu; \tag{3c}$$

$$x = c\sqrt{(\sigma^2 + 1)(1 - \tau^2)}\cos\varphi, \qquad y = c\sqrt{(\sigma^2 + 1)(1 - \tau^2)}\,\mathrm{sen}\,\varphi, \qquad z = c\sigma\tau. \tag{3d}$$

Estas ecuaciones de transformación permiten calcular el vector de desplazamiento diferencial:

$$d\vec{r} = (\hat\imath\cos\varphi + \hat\jmath\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,d\rho + (-\hat\imath\,\mathrm{sen}\,\varphi + \hat\jmath\cos\varphi)\rho\,d\varphi + \hat k\,dz \tag{4a}$$

$$\begin{aligned} &= \left[(\hat\imath\cos\varphi + \hat\jmath\,\mathrm{sen}\,\varphi)\eta + \hat k\xi\right]d\xi + \left[(\hat\imath\cos\varphi + \hat\jmath\,\mathrm{sen}\,\varphi)\xi - \hat k\eta\right]d\eta \\ &\quad + (-\hat\imath\,\mathrm{sen}\,\varphi + \hat\jmath\cos\varphi)\xi\eta\,d\varphi \end{aligned} \tag{4b}$$

$$\begin{aligned} &= \left[(\hat\imath\cos\varphi + \hat\jmath\,\mathrm{sen}\,\varphi)\frac{\lambda\sqrt{1-\mu^2}}{\sqrt{\lambda^2-1}} + \hat k\mu\right]c\,d\lambda \\ &\quad + \left[-(\hat\imath\cos\varphi + \hat\jmath\,\mathrm{sen}\,\varphi)\frac{\mu\sqrt{\lambda^2-1}}{\sqrt{1-\mu^2}} + \hat k\lambda\right]c\,d\mu \\ &\quad + (-\hat\imath\,\mathrm{sen}\,\varphi + \hat\jmath\cos\varphi)c\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}\,d\varphi \end{aligned} \tag{4c}$$

$$\begin{aligned} &= \left[(\hat\imath\cos\varphi + \hat\jmath\,\mathrm{sen}\,\varphi)\frac{\sigma\sqrt{1-\tau^2}}{\sqrt{\sigma^2+1}} + \hat k\tau\right]c\,d\sigma \\ &\quad + \left[-(\hat\imath\cos\varphi + \hat\jmath\,\mathrm{sen}\,\varphi)\frac{\tau\sqrt{\sigma^2+1}}{\sqrt{1-\tau^2}} + \hat k\sigma\right]c\,d\tau \\ &\quad + (-\hat\imath\,\mathrm{sen}\,\varphi + \hat\jmath\cos\varphi)c\sqrt{(\sigma^2+1)(1-\tau^2)}\,d\varphi. \end{aligned} \tag{4d}$$

En cada caso se identifican los vectores unitarios y los factores de escala asociados a las coordenadas respectivas

$$\left.\begin{array}{lll} \hat\rho = \hat\imath\cos\varphi + \hat\jmath\,\mathrm{sen}\,\varphi, & \hat\varphi = -\hat\imath\,\mathrm{sen}\,\varphi + \hat\jmath\cos\varphi, & \hat k = \hat k, \\ h_\rho = 1, & h_\varphi = \rho, & h_z = 1; \end{array}\right\} \tag{5a}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \hat\xi = \dfrac{\hat\rho\eta + \hat k\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, & \hat\eta = \dfrac{\hat\rho\xi - \hat k\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, & \hat\varphi = \hat\varphi, \\ h_\xi = \sqrt{\xi^2+\eta^2} = h_\eta, & & h_\varphi = \xi\eta; \end{array}\right\} \tag{5b}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{\lambda} &= \frac{\hat{\rho}\lambda\sqrt{1-\mu^2}+\hat{k}\mu\sqrt{\lambda^2-1}}{\sqrt{\lambda^2-\mu^2}}, \quad \hat{\mu} = \frac{-\hat{\rho}\mu\sqrt{\lambda^2-1}+\hat{k}\lambda\sqrt{1-\mu^2}}{\sqrt{\lambda^2-\mu^2}}, \quad \hat{\varphi}=\hat{\varphi}, \\ h_\lambda &= c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2-1}}, \quad h_\mu = c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{1-\mu^2}}, \quad h_\varphi = c\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}; \end{aligned}\right\} \tag{5c}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \frac{\hat{\rho}\sigma\sqrt{1-\tau^2}+\hat{k}\tau\sqrt{\sigma^2+1}}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}, \quad \hat{\tau} = \frac{-\hat{\rho}\tau\sqrt{\sigma^2+1}+\hat{k}\sigma\sqrt{1-\tau^2}}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}, \quad \hat{\varphi}=\hat{\varphi}, \\ h_\sigma &= c\sqrt{\frac{\sigma^2+\tau^2}{\sigma^2+1}}, \quad h_\tau = c\sqrt{\frac{\sigma^2+\tau^2}{1-\tau^2}}, \quad h_\varphi = c\sqrt{(\sigma^2+1)(1-\tau^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{5d}$$

Nótese la ortogonalidad de los vectores de cada tríada y las conexiones entre los vectores de los diferentes sistemas de coordenadas; en particular, la coordenada azimutal φ y el vector unitario asociado $\hat{\varphi}$ son comunes a todos los sistemas. Una vez conocidos los factores de escala el operador laplaciano se puede escribir en la forma general [5]

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\right)\right]. \tag{6}$$

Entonces la ecuación de Laplace toma las siguientes formas específicas para cada sistema de coordenadas:

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\phi(\rho,\varphi,z)=0, \tag{6a}$$

$$\left[\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\xi\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\frac{1}{\xi^2\eta^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\phi(\xi,\eta,\varphi)=0, \tag{6b}$$

$$\begin{aligned}\Bigg[\frac{1}{c^2(\lambda^2-\mu^2)}&\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}(\lambda^2-1)\frac{\partial}{\partial\lambda}+\frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}\right) \\ &+\frac{1}{c^2(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Bigg]\phi(\lambda,\mu,\varphi)=0,\end{aligned} \tag{6c}$$

$$\begin{aligned}\Bigg[\frac{1}{c^2(\sigma^2+\tau^2)}&\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}(\sigma^2+1)\frac{\partial}{\partial\sigma}+\frac{\partial}{\partial\tau}(1-\tau^2)\frac{\partial}{\partial\tau}\right) \\ &+\frac{1}{c^2(\sigma^2+1)(1-\tau^2)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Bigg]\phi(\sigma,\tau,\varphi)=0.\end{aligned} \tag{6d}$$

También la densidad de carga para la fuente puntual en la ecuación de Poisson [Ec. (1)] toma la carga general [5]

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')=\frac{1}{h_1h_2h_3}\delta(q_1-q_1')\delta(q_2-q_2')\delta(q_3-q_3'), \tag{7}$$

reconociéndose que $h_1h_2h_3$ es el Jacobiano de las transformaciones de coordenadas [Ecs. (3)]. Sus formas específicas son las siguientes:

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')=\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\varphi-\varphi')\delta(z-z') \tag{7a}$$

$$=\frac{1}{(\xi^2+\eta^2)\xi\eta}\delta(\xi-\xi')\delta(\eta-\eta')\delta(\varphi-\varphi') \tag{7b}$$

$$=\frac{1}{c^3(\lambda^2-\mu^2)}\delta(\lambda-\lambda')\delta(\mu-\mu')\delta(\varphi-\varphi') \tag{7c}$$

$$=\frac{1}{c^3(\sigma^2+\tau^2)}\delta(\sigma-\sigma')\delta(\tau-\tau')\delta(\varphi-\varphi'). \tag{7d}$$

La ecuación de Laplace en las coordenadas bajo estudio [Ecs. (6a–d)] es separable y admite soluciones factorizables:

$$\phi(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z), \tag{8a}$$

$$\phi(\xi,\eta,\varphi)=\Xi(\xi)H(\eta)\Phi(\varphi), \tag{8b}$$

$$\phi(\lambda,\mu,\varphi)=\Lambda(\lambda)M(\mu)\Phi(\varphi), \tag{8c}$$

$$\phi(\sigma,\tau,\varphi)=\Sigma(\sigma)T(\tau)\Phi(\varphi). \tag{8d}$$

El factor $\Phi(\varphi)$ es común a los cuatro casos y es eigenfunción del operador correspondiente en el Laplaciano:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-m^2\Phi. \tag{9}$$

Su forma explícita es

$$\Phi_m(\varphi)=\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}, \tag{10}$$

donde la constante de separación queda restringida a los valores $m=0,\pm1,\pm2\ldots$ para asegurar que la función es univaluada. Se reconoce que las eigenfunciones de la Ec. (10) constituyen un conjunto completo

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-im\varphi'}}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}=\delta(\varphi-\varphi') \tag{11}$$

de funciones ortonormales

$$\int_0^{2\pi}\frac{e^{-im'\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}d\varphi=\delta_{mm'}, \tag{12}$$

que es simplemente una base de Fourier [5].

Los otros factores de las Ecs. (8a–d) son soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias que resultan de la separación de las Ecs. (6a–d) y que también son ecuaciones de eigenvalores:

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho\frac{d}{d\rho}-\frac{m^2}{\rho^2}\right]R(\rho)=k^2R(\rho), \tag{9ai}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}Z(z)=-k^2Z(z); \tag{9aii}$$

$$\left[\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\xi\frac{d}{d\xi}-\frac{m^2}{\xi^2}\right]\Xi(\xi)=k^2\Xi(\xi), \tag{9bi}$$

$$\left[\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\eta\frac{d}{d\eta}-\frac{m^2}{\eta^2}\right]H(\eta)=-k^2H(\eta); \tag{9bii}$$

$$\left[\frac{d}{d\lambda}(\lambda^2-1)\frac{d}{d\lambda}-\frac{m^2}{\lambda^2-1}\right]\Lambda(\lambda)=\ell(\ell+1)\Lambda(\lambda), \tag{9ci}$$

$$\left[\frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right]M(\mu)=-\ell(\ell+1)M(\mu); \tag{9cii}$$

$$\left[\frac{d}{d\sigma}(\sigma^2+1)\frac{d}{d\sigma}+\frac{m^2}{\sigma^2+1}\right]\Sigma(\sigma)=\ell(\ell+1)\Sigma(\sigma), \tag{9di}$$

$$\left[\frac{d}{d\tau}(1-\tau^2)\frac{d}{d\tau}-\frac{m^2}{1-\tau^2}\right]T(\tau)=-\ell(\ell+1)T(\tau); \tag{9dii}$$

donde k^2 y $\ell(\ell+1)$ son las constantes de separación. Se reconocen las formas comunes de las Ecs. (9aii) y (9); (9ai), (9bi) y (9bii); y (9ci), (9cii), (9di) y (9dii); así como sus diferencias en los respectivos dominios de definición y los signos de las constantes de separación.

Las soluciones respectivas se identifican como funciones exponenciales, de Bessel y de Legendre [5]. Sus formas explícitas son las siguientes:

$$R(\rho)=a_mI_m(k\rho)+b_mK_m(k\rho), \tag{10ai}$$

$$Z(z)=a(k)e^{ikz}+b(k)e^{-ikz}; \tag{10aii}$$

$$\Xi(\xi)=a'_mI_m(k\xi)+b'_mK_m(k\xi), \tag{10bi}$$

$$H(\eta)=a''_mJ_m(k\eta)+b''_mN_m(k\eta); \tag{10bii}$$

$$\Lambda(\lambda)=a_\ell P_\ell^m(\lambda)+b_\ell Q_\ell^m(\lambda), \tag{10ci}$$

$$M(\mu)=a'_\ell P_\ell^m(\mu)+b'_\ell Q_\ell^m(\mu); \tag{10cii}$$

$$\Sigma(\sigma) = a_\ell'' P_\ell^m(i\sigma) + b_\ell'' Q_\ell^m(i\sigma), \tag{10di}$$

$$T(\tau) = a_\ell''' P_\ell^m(\tau) + b_\ell''' Q_\ell^m(\tau); \tag{10dii}$$

donde J_m y N_m son las funciones de Bessel ordinarias, I_m y K_m las funciones de Bessel modificadas, y P_ℓ^m y Q_ℓ^m las funciones de Legendre. Mientras las funciones J_m son bien comportadas en todo su dominio de definición, las funciones N_m son divergentes cuando su argumento tiende a cero; por otra parte, las funciones I_m son regulares en el origen y divergentes al infinito, y las funciones K_m son divergentes en el origen y tienden a cero cuando su argumento tiende a infinito; y a su vez las funciones de Legendre P_ℓ^m son finitas en el intervalo $[-1,1]$ sólo si $\ell = 0,1,2,3,\ldots$ y son divergentes al infinito, y las funciones Q_ℓ^m son divergentes en ± 1 y tienden a cero al infinito. En las Ecs. (10bii), (10cii) y (10dii) se excluyen las soluciones divergentes tomando los coeficientes respectivos b_m'', b_ℓ' y b_ℓ''' como cero, asegurándose así el buen comportamiento de las soluciones en los dominios completos respectivos.

Las funciones oscilantes de las Ecs. (10aii), (10bii), (10cii) y (10dii) también constituyen conjuntos completos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \frac{e^{-ikz'}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikz}}{\sqrt{2\pi}} = \delta(z-z'), \tag{11a}$$

$$\int_0^{\infty} k\, dk\, J_m(k\eta') J_m(k\eta) = \frac{\delta(\eta-\eta')}{\eta}, \tag{11b}$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\mu',\varphi') Y_{\ell m}(\mu,\varphi) = \delta(\mu-\mu')\delta(\varphi-\varphi'), \tag{11c}$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\tau',\varphi') Y_{\ell m}(\tau,\varphi) = \delta(\tau-\tau')\delta(\mu-\mu'), \tag{11d}$$

de funciones ortonormales

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz\, \frac{e^{-ik'z}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikz}}{\sqrt{2\pi}} = \delta(k-k'), \tag{12a}$$

$$\int_0^{\infty} d\eta\, \eta J_m(k'\eta) J_m(k\eta) = \frac{\delta(k-k')}{k}, \tag{12b}$$

$$\int_{-1}^{1} d\mu \int_0^{2k} d\varphi\, Y_{\ell' m'}^*(\mu,\varphi) Y_{\ell m}(\mu,\varphi) = \delta_{\ell'\ell}\delta_{m'm}, \tag{12c}$$

$$\int_{-1}^{1} d\tau \int_0^{2k} d\varphi\, Y_{\ell' m'}^*(\tau,\varphi) Y_{\ell m}(\tau,\varphi) = \delta_{\ell'\ell}\delta_{m'm}. \tag{12d}$$

En las Ecs. (11c–d) y (12c–d) se usan los armónicos esferoidales prolatos y oblatos, respectivamente, definidos como los productos normalizados de los polinomios de Legendre de las Ecs. (10c–d) y las funciones azimutales de la Ec. (10), en analogía completa con los armónicos esféricos [5].

Las soluciones de la ecuación de Poisson [Ec. (1)] se pueden escribir como desarrollos de funciones armónicas en las coordenadas respectivas:

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, g_m(k\rho, k\rho') \frac{e^{im(\varphi-\varphi')}}{2\pi} \frac{e^{ik(z-z')}}{2\pi} \tag{13a}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{0}^{k} dk\, g_m(k\xi, k\xi') k J_m(k\eta') \frac{e^{im(\varphi-\varphi')}}{2\pi} \tag{13b}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} g_\ell(\lambda,\lambda') Y^*_{\ell m}(\mu',\varphi') Y_{\ell m}(\mu,\varphi) \tag{13c}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} g_\ell(\sigma,\sigma') Y^*_{\ell m}(\tau',\varphi') Y_{\ell m}(\tau,\varphi). \tag{13d}$$

Los "coeficientes" g de estos desarrollos se determinan sustituyendo las Ecs. (13) en la Ec. (1), usando las formas respectivas del operador laplaciano [Ecs. (6)] y de las deltas de Dirac [Ecs. (7) y (11)] y la independencia lineal de las funciones base. Las ecuaciones diferenciales ordinarias que deben satisfacer esos "coeficientes" son, respectivamente,

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho\frac{d}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} - k^2\right] g_m(k\rho, k\rho') = -4\pi\frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho}, \tag{14a}$$

$$\left[\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\xi\frac{d}{d\xi} - \frac{m^2}{\xi^2} - k^2\right] g_m(k\xi, k\xi') = -4\pi\frac{\delta(\xi-\xi')}{\xi}, \tag{14b}$$

$$\left[\frac{d}{d\lambda}(\lambda^2-1)\frac{d}{d\lambda} - \frac{m^2}{\lambda^2-1} - \ell(\ell+1)\right] g_\ell(\lambda,\lambda') = -\frac{4\pi}{c}\delta(\lambda-\lambda'), \tag{14c}$$

$$\left[\frac{d}{d\sigma}(\sigma^2+1)\frac{d}{d\sigma} + \frac{m^2}{\sigma^2+1} - \ell(\ell+1)\right] g_\ell(\sigma,\sigma') = -\frac{4\pi}{c}\delta(\sigma-\sigma'). \tag{14d}$$

Los miembros derechos de las Ecs. (14a–d) son nulos en los puntos campo diferentes del punto fuente, de modo que las soluciones g deben ser de las formas de las Ecs. (10ai), (10bi), (10ci) y (10di), respectivamente. La simetría de la función de Green y de la densidad de la fuente bajo el intercambio de los puntos campo y fuente, y el buen comportamiento del potencial coulombiano al origen y al infinito restringen las soluciones a las formas

$$g_m(k\rho,k\rho') = \begin{cases} A_m K_m(k\rho')I_m(k\rho), & 0 \le \rho < \rho', \\ A_m I_m(k\rho')K_m(k\rho), & \rho' \le \rho < \infty; \end{cases} \tag{15a}$$

$$g_m(k\xi,k\xi') = \begin{cases} A'_m K_m(k\xi')I_m(k\xi), & 0 \le \xi \le \xi', \\ A'_m I_m(k\xi')K_m(k\xi), & \xi' \le \xi < \infty; \end{cases} \tag{15b}$$

$$g_\ell(\lambda,\lambda') = \begin{cases} A_\ell Q_\ell^m(\lambda')P_\ell^m(\lambda), & 1 \le \lambda \le \lambda', \\ A_\ell P_\ell^m(\lambda')Q_\ell^m(\lambda), & \lambda' \le \lambda < \infty; \end{cases} \tag{15c}$$

$$g_\ell(\sigma,\sigma') = \begin{cases} A''_\ell Q_\ell^m(i\sigma')P_\ell^m(i\sigma), & 0 \le \sigma \le \sigma', \\ A''_\ell P_\ell^m(i\sigma')Q_\ell^m(i\sigma), & \sigma' \le \sigma < \infty. \end{cases} \tag{15d}$$

La continuidad de cada componente armónica del potencial, cuando el punto campo pasa por el punto fuente, también queda asegurada con la selección de los coeficientes en las Ecs. (15a–d). La determinación de los coeficientes A en estas ecuaciones sigue de la integración de las Ecs. (14a–d) alrededor del punto fuente, obteniéndose

$$A_m k\rho'\left[I_m(k\rho')K'(k\rho') - K_m(k\rho')I'_m(k\rho')\right] = -4\pi, \tag{16a}$$

$$A'_m k\xi'\left[I_m(k\xi')K'(k\xi') - K_m(k\xi')I'_m(k\xi')\right] = -4\pi, \tag{16b}$$

$$A_\ell(\lambda'^2-1)\left[P_\ell^m(\lambda')Q_\ell^{m\prime}(\lambda') - Q_\ell^m(\lambda')P_\ell^{m\prime}(\lambda')\right] = -\frac{4\pi}{c}, \tag{16c}$$

$$A''_\ell i(\sigma'^2+1)\left[P_\ell^m(i\sigma')Q_\ell^{m\prime}(i\sigma') - Q_\ell^m(i\sigma')P_\ell^{m\prime}(i\sigma')\right] = -\frac{4\pi}{c}. \tag{16d}$$

Se reconoce que las cantidades en los corchetes de las Ecs. (16a,b) y (16c,d) son los wronskianos de las funciones modificadas de Bessel y de las funciones de Legendre, respectivamente [5]; sus valores son $-1/x$ y $1/(1-x^2)$.

Como conclusión de esta sección, las formas explícitas del potencial coulombiano, en las respectivas coordenadas y sus desarrollos armónicos obtenidos de la combinación de las Ecs. (13), (15) y (16), son:

$$\frac{1}{[\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\varphi-\varphi')+(z-z')^2]^{1/2}}$$
$$= \frac{1}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, I_m(k\rho_<)K_m(k\rho_>)e^{im(\varphi-\varphi')}e^{ik(z-z')} \tag{17a}$$

$$\left[\xi^2\eta^2 + \xi'^2\eta'^2 - 2\xi\eta\xi'\eta'\cos(\varphi-\varphi') + \tfrac{1}{4}(\xi^2-\eta^2-\xi'^2+\eta'^2)^2\right]^{-1/2}$$

$$= 2\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} dk\, kI_m(k\xi_<)K_m(k\xi_>)J_m(k\eta')J_m(k\eta)e^{im(\varphi-\varphi')} \tag{17b}$$

$$\left[\lambda^2+\mu^2+\lambda'^2+\mu'^2-2-2\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)(\lambda'^2-1)(1-\mu'^2)}\cos(\varphi-\varphi')\right]^{-1/2}$$

$$= 4\pi\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} P_\ell^m(\lambda_<)Q_\ell^m(\lambda_>)Y^*_{\ell m}(\mu',\varphi')Y_{\ell m}(\mu,\varphi) \tag{17c}$$

$$\left[\sigma^2-\tau^2+\sigma'^2-\tau'^2+2-2\sqrt{(\sigma^2+1)(1-\tau^2)(\sigma'^2+1)(1-\tau'^2)}\cos(\varphi-\varphi')\right]^{-1/2}$$

$$= 4\pi i\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} P_\ell^m(i\sigma_<)Q_\ell^m(i\sigma_>)Y^*_{\ell m}(\tau',\varphi')Y_{\ell m}(\tau,\varphi). \tag{17d}$$

En analogía con el desarrollo multipolar se puede afirmar que el potencial coulombiano es la función generadora de a) la base de Fourier en φ y z, b) la base de Bessel Fourier en η y φ, c) los armónicos esferoidales prolatos, y d) los armónicos esferoidales oblatos. El papel de $r_<^\ell/r_>^{\ell+1}$ en el caso esférico lo juegan las funciones de Bessel modificadas en los casos a) y b), y las funciones de Legendre en los casos c) y d).

3. Desarrollos armónicos del campo de intensidad eléctrica y de la distribución de carga

El campo de intensidad eléctrica se puede calcular como el negativo del gradiente del potencial electrostático [1–4]

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r}) \tag{18}$$

usando la forma general del operador de gradiente [5]

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_1\frac{\partial}{h_1\partial q_1} + \hat{e}_2\frac{\partial}{h_2\partial q_2} + \hat{e}_3\frac{\partial}{h_3\partial q_3}. \tag{19}$$

De las formas específicas de este operador, obtenidas con la ayuda de las Ecs. (5a–d) y del potencial [Ecs. (17a–d)], se obtienen los desarrollos armónicos del campo de intensidad eléctrica por dentro y por fuera en las diferentes coordenadas:

$$\vec{E}(\rho<\rho',\varphi,z) = -\frac{1}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, K_m(k\rho')\left\{\hat{\rho}kI'_m(k\rho)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\hat{\varphi}im}{\rho} + \hat{k}ik\right)I_m(k\rho)\right\}e^{im(\varphi-\varphi')}e^{ik(z-z')}, \tag{18a}$$

$$\vec{E}(\rho > \rho', \varphi, z) = -\frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, I_m(k\rho') \left\{ \hat{\rho} k K'_m(k\rho) + \left(\frac{\hat{\varphi} im}{\rho} + \hat{k} ik \right) K_m(k\rho) \right\} e^{im(\varphi-\varphi')} e^{ik(z-z')}, \quad (18a')$$

$$\vec{E}(\xi < \xi', \eta, \varphi) = -2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk\, k K_m(k\varphi') J_m(k\eta') e^{im(\varphi-\varphi')}$$

$$\left\{ \frac{\hat{\xi}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} k I'_m(k\xi) J_m(k\eta) + I_m(k\xi) \left[\frac{\hat{\eta}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} k J'_m(k\eta) + \frac{\hat{\varphi} im}{\xi\eta} J_m(k\eta) \right] \right\}, \quad (18b)$$

$$\vec{E}(\xi > \xi', \eta, \varphi) = -2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk\, k I_m(k\xi') J_m(k\eta') e^{im(\varphi-\varphi')}$$

$$\left\{ \frac{\hat{\xi}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} k K'_m(k\xi) J_m(k\eta) + K_m(k\xi) \left[\frac{\hat{\eta}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} k J'_m(k\eta) + \frac{\hat{\varphi} im}{\xi\eta} J_m(k\eta) \right] \right\}, \quad (18b')$$

$$\vec{E}(\lambda < \lambda', \mu, \varphi) = -\frac{4\pi}{c} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Q_m(\lambda') Y^*_{\ell m}(\mu', \varphi')$$

$$\left\{ \frac{\hat{\lambda}\sqrt{\lambda^2-1}}{c\sqrt{\lambda^2-\mu^2}} P_\ell^{m\prime}(\lambda) + P_\ell^m(\lambda) \left[\frac{\hat{\mu}\sqrt{1-\mu^2}}{c\sqrt{\lambda^2-\mu^2}} \frac{\partial}{\partial\mu} + \frac{\hat{\varphi} im}{c\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}} \right] \right\} Y_{\ell m}(\mu, \varphi), \quad (18c)$$

$$\vec{E}(\lambda > \lambda', \mu, \varphi) = -\frac{4\pi}{c} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} P_\ell^m(\lambda') Y^*_{\ell m}(\mu', \varphi')$$

$$\left\{ \frac{\hat{\lambda}\sqrt{\lambda^2-1}}{c\sqrt{\lambda^2-\mu^2}} Q_\ell^{m\prime}(\lambda) + Q_\ell^m(\lambda) \left[\frac{\hat{\mu}\sqrt{1-\mu^2}}{c\sqrt{\lambda^2-\mu^2}} \frac{\partial}{\partial\mu} + \frac{\hat{\varphi} im}{c\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}} \right] \right\} Y_{\ell m}(\mu, \varphi), \quad (18c')$$

$$\vec{E}(\sigma < \sigma', \tau, \varphi) = -\frac{4\pi i}{c} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Q_\ell^m(i\sigma') Y^*_{\ell m}(\tau', \varphi')$$

$$\left\{ \frac{\hat{\sigma}\sqrt{\sigma^2+1}}{c\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} P_\ell^{m\prime}(i\sigma) i + P_\ell^m(i\sigma) \left[\frac{\hat{\tau}\sqrt{1-\tau^2}}{c\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} \frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\hat{\varphi} im}{c\sqrt{(\sigma^2+1)(1-\tau^2)}} \right] \right\} Y_{\ell m}(\tau, \varphi), \quad (18d)$$

$$\vec{E}(\sigma > \sigma', \tau, \varphi) = -\frac{4\pi i}{c} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} P_\ell^m(i\sigma') Y_{\ell m}^*(\tau', \varphi')$$

$$\left\{ \frac{\hat{\sigma}\sqrt{\sigma^2+1}}{c\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} Q_\ell^{m\prime}(i\sigma) i + Q_\ell^m(i\sigma) \left[\frac{\hat{\tau}\sqrt{1-\tau^2}}{c\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} \frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\hat{\varphi} i m}{c\sqrt{(\sigma^2+1)(1-\tau^2)}} \right] \right\} Y_{\ell m}(\tau, \varphi), \quad (18\text{d}')$$

De la comparación de los miembros de cada par de Ecs. (18a–d) se reconoce que el campo de intensidad eléctrica en el interior y el exterior de a) el cilindro $\rho = \rho'$, b) el paraboloide $\xi = \xi'$, c) el esferoide prolato $\lambda = \lambda'$, y d) el esferoide oblato $\sigma = \sigma'$, tiene componentes armónicas normales discontinuas y tangenciales continuas. Las discontinuidades resultan proporcionales al wronskiano de las funciones respectivas. De acuerdo con la ley de Gauss las discontinuidades en las componentes normales corresponden a densidades superficiales de carga [1–4]:

$$\begin{aligned}
\sigma(\varphi, z) &= \hat{\rho} \cdot \frac{1}{4\pi} \left[\vec{E}(\rho = \rho_+, \varphi, z) - \vec{E}(\rho = \rho_-, \varphi, z) \right] \\
&= \frac{1}{\rho} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, \frac{e^{im(\varphi-\varphi')}}{2\pi} \frac{e^{ik(z-z')}}{2\pi} \\
&= \frac{\delta(\varphi - \varphi')}{\rho} \delta(z - z'),
\end{aligned} \tag{20a}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(\eta, \varphi) &= \hat{\xi} \cdot \frac{1}{4\pi} \left[\vec{E}(\xi = \xi'_+, \eta, \varphi, z) - \vec{E}(\xi = \xi'_-, \eta, \varphi) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\xi'^2 + \eta^2}\,\xi'} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk \, k J_m(k\eta') J_m(k\eta) \frac{e^{im(\varphi-\varphi')}}{2\pi} \\
&= \frac{\delta(\eta - \eta')}{\sqrt{\xi'^2 + \eta^2}} \frac{\delta(\varphi - \varphi')}{\xi'\eta},
\end{aligned} \tag{20b}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(\mu, \varphi) &= \hat{\lambda} \cdot \frac{1}{4\pi} \left[\vec{E}(\lambda = \lambda'_+, \mu, \varphi) - \vec{E}(\lambda = \lambda'_-, \mu, \varphi) \right] \\
&= \frac{1}{c^2\sqrt{(\lambda'^2 - \mu^2)(\lambda'^2 - 1)}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\mu', \varphi) Y_{\ell m}(\mu, \varphi) \\
&= \frac{\delta(\mu - \mu')\delta(\varphi - \varphi')}{c^2\sqrt{(\lambda'^2 - \mu^2)(\lambda'^2 - 1)}},
\end{aligned} \tag{20c}$$

$$
\begin{aligned}
\sigma(\tau,\varphi) &= \hat{\sigma}\cdot\frac{1}{4\pi}\left[\vec{E}(\sigma=\sigma_+,\tau,\varphi)-\vec{E}(\sigma=\sigma'_-,\tau,\varphi)\right] \\
&= \frac{1}{c^2\sqrt{(\sigma'^2+\tau^2)(\sigma'^2+1)}}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}Y^*_{\ell m}(\tau',\varphi')Y_{\ell m}(\tau,\varphi) \\
&= \frac{\delta(\tau-\tau')\delta(\varphi-\varphi')}{c^2\sqrt{(\sigma'^2+\tau^2)(\sigma'^2+1)}}. \qquad \text{(20d)}
\end{aligned}
$$

La comparación de las Ecs. (20a–d) y (17a–d) permite reconocer la correspondencia unívoca entre las componentes armónicas de la fuente y el potencial para cada geometría. Las Ecs. (20a–d) también muestran que aunque cada componente armónica de la fuente está distribuida sobre toda la superficie respectiva, la superposición de tales componentes reproduce la distribución puntual de la fuente. Aquí cabe destacar la generalidad y unidad de estas relaciones, que en la Ref. [6] se estudiaron para el caso esférico.

4. DISCUSIÓN

En las Secs. 2 y 3 se llevó a cabo la construcción explícita de los desarrollos armónicos del potencial de Coulomb, [Ecs. (17a–d)], de la intensidad de campo eléctrico [Ecs. (18a–d)] y de la distribución de carga [Ecs. (20a–d)], en las geometrías cilíndrica circular, parabólica, esferoidal prolata y esferoidal oblata, respectivamente. Este problema y sus soluciones pueden ser de interés para profesores y estudiantes de electromagnetismo y de métodos matemáticos de la física en los niveles avanzado de licenciatura y de posgrado. Los párrafos de conclusión de las Secs. 2 y 3 destacan el paralelismo y las propiedades comunes de los desarrollos estudiados en el presente trabajo con los del bien conocido desarrollo multipolar en coordenadas esféricas al que se aludió en el párrafo inicial de la Sec. 1. El presente estudio se ha limitado al caso de la electrostática, pero fácilmente se puede extender y adaptar al caso de la magnetostática, para lo cual la Ref. [6] resulta apropiada.

Para ilustrar la utilidad y necesidad de los desarrollos obtenidos en este trabajo se consideran a continuación algunos problemas de electrostática y de física atómica.

En electrostática es importante recordar que, conocida la función de Green, se puede aplicar el principio de superposición para construir el potencial debido a cualquier distribución de cargas [1–4]. En particular, los desarrollos de la función de Green de las Ecs. (17a–d) facilitan el cálculo de potenciales asociados a distribuciones de cargas en volúmenes delimitados por superficies definidas por valores constantes de las coordenadas respectivas. También es posible analizar cualquier distribución de carga y su potencial en términos de sus contribuciones armónicas en los respectivos sistemas de coordenadas; según sea la distribución, uno de los desarrollos puede resultar más apropiado que los otros. Es instructivo estudiar las características de los términos armónicos más bajos correspondientes a $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ de los diferentes casos para decidir cuáles pueden contribuir de manera más importante en diferentes situaciones. Por otra parte, los desarrollos ya obtenidos se pueden adaptar para construir funciones de Green en volúmenes delimitados por superficies definidas por valores constantes de alguna(s) de las coordenadas, y que incorporen las condiciones de frontera seleccionadas. Esto amplía desde luego el número de posibles aplicaciones.

Ya se mencionó en la Introducción que en los cálculos atómicos la repulsión coulombiana entre electrones se toma en cuenta a través del desarrollo multipolar en coordenadas esféricas [7]. Sin embargo, ésta no es la úinica opción, como se reconoce al recordar que el átomo de hidrógeno tiene eigenfunciones separables no solamente en coordenadas esféricas sino también en coordenadas parabólicas y esferoidales prolatas [8]. El estudio de átomos con varios electrones basado en funciones hidrogenoides en estas dos últimas coordenadas es natural hacerlo con los desarrollos de las Ecs. (17b) y (17c), respectivamente. En el estudio de átomos confinados, la forma de las fronteras del volumen de confinamiento determina las coordenadas en que conviene trabajar. Ha sido precisamente dentro de este tipo de estudios que encontramos la necesidad de los desarrollos construidos en el presente artículo.

REFERENCIAS

1. J.R. Reitz, F.J. Milford and R.W. Christy, *Foundations of Electromagnetic Theory*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1979).
2. L. Eyges, *The Classical Electromagnetic Field*, Dover, New York (1972).
3. W.K.H. Panofsky and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, 2nd. edition, Addison-Wesley, Reading Massachusetts (1962).
4. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd. edition, Wiley, New York (1975).
5. G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, 2nd. edition, Academic Press, New York (1970).
6. E. Ley-Koo y A. Góngora T., *Rev. Mex. Fís.* **34** (1988) 645.
7. E.U. Condon and G.H. Shortley, *The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge University Press, Càmbridge, England (1935).
8. R.A. Buckingham, *Quantum Theory I. Elements*, D.R. Bates Ed., Academic Press, New York (1961).