

El péndulo cuántico

N. AQUINO Y E. PIÑA

*Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
Av. Michoacán y Purísima, Apartado postal 55-534, 09340 México, D.F., México*

Recibido el 9 de marzo de 1993; aceptado el 27 de julio de 1993

RESUMEN. La formulación de la mecánica cuántica en términos de las integrales de trayectoria en la aproximación WKB (o cuasi-clásica) proporciona una herramienta muy útil para relacionar los sistemas clásicos (sean o no caóticos) con sus análogos cuánticos. En este trabajo se utiliza este enfoque para encontrar los eigenvalores y las eigenfunciones de la energía del péndulo cuántico y se compara con los eigenvalores obtenidos mediante el método ordinario de WKB. El método que se emplea en este trabajo fue desarrollado por Gutzwiller, siendo una de sus características la de poder usarse en el estudio tanto de problemas integrables como aquellos que presentan caos.

ABSTRACT. The path integral formulation of quantum mechanics in the WKB approximation (quasi-classical) gives to us a useful tool to relate the classical systems (with or without chaos) with its quantum analogs. We use this point of view to compute the eigenfunctions and energy eigenvalues for the quantum pendulum comparing with those obtained with the standard WKB approximation. The method that we employed in this work was developed mainly by Gutzwiller, and one of its main features is that this method can be used in integrable and no integrable problems.

PACS:03.65.-w; 03.65.Sq

1. INTRODUCCIÓN

Condon [1] fue el primero en resolver el problema del péndulo cuántico en la década de los veintes. Una discusión detallada sobre este problema se encuentra en el artículo de Pradhan [2]. La ecuación de Schrödinger para este problema se puede resolver en forma exacta, reduciéndose a la ecuación de Mathieu. Khare [3] estudió el problema en la aproximación del WKB ordinario y encontró que los eigenvalores de la energía están dados en términos de ecuaciones elípticas, mientras que los exactos están determinados por los valores característicos de la ecuación de Mathieu.

Un punto aún no resuelto completamente en el problema del péndulo cuántico es el siguiente [4]: En el caso clásico existe la trayectoria separatriz que marca la transición entre los modos del movimiento oscilatorio de baja y de alta energía, mientras que en el caso cuántico no existe una separación tan marcada entre los modos del movimiento oscilatorio, lo cual hace dudar sobre la existencia de una separatriz cuántica.

El objetivo de este trabajo es mostrar cómo se pueden encontrar las eigenfunciones y los eigenvalores de la energía para el péndulo cuántico en el formalismo desarrollado por Gutzwiller [5,6] y comparar los eigenvalores con los correspondientes obtenidos mediante el WKB ordinario.

2. INTEGRALES DE TRAYECTORIA EN LA APROXIMACIÓN WKB

En esta sección se resumen algunas de las características más relevantes del formalismo de integrales de trayectoria en la aproximación WKB. La obtención detallada de las fórmulas que se presentan a continuación se puede encontrar en las Refs. [5-7].

El ente principal en este formalismo es la función de Green $G(x_b, t; x_a, t = 0)$, que representa la probabilidad de que una partícula con la posición inicial x_a en $t = 0$ arribe al punto x_b en un tiempo t . Para encontrar la forma de la función de Green, dividiremos el intervalo $x_b - x_a$ en N partes iguales y consideraremos que $x_0 = x_a$ y $x_N = x_b$, son los extremos del intervalo y x_1, x_2, \dots, x_{N-1} son las posiciones de la partícula al tiempo $t_n = n\epsilon$ ($n = 1, 2, \dots, N - 1$). De esta manera [7]:

$$G(x_b, t; x_a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int dx_1 dx_2 \dots dx_{N-1} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \times \exp \left(\frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\epsilon} \right)^2 - V(x_j) \right] \right). \quad (1.a)$$

La integración sobre todas las posibles posiciones x_1, x_2, \dots, x_{N-1} , es equivalente a sumar sobre todos los segmentos que conectan al punto x_a con el x_b . En el límite $N \rightarrow \infty$ la sumatoria de la exponencial se convierte simplemente en la acción clásica evaluada en una trayectoria particular que una a x_a con x_b :

$$S(x_b, x_a, t) = \int_0^t L(t) dt = \int_0^t \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right] dt. \quad (1.b)$$

Las integrales sobre las cantidades x_1, \dots, x_{N-1} pueden interpretarse como una suma sobre todos los segmentos de rectas de cualquier trayectoria que conecte al punto x_a con el x_b . Ya que cualquier trayectoria continua puede aproximarse mediante segmentos de recta y considerando que se va a tomar el límite $N \rightarrow \infty$ podemos pensar a las integrales como una suma sobre todas las posibles trayectorias. Así que la función de Green finalmente se puede escribir como [7]

$$G(x_b, t; x_a) = C \sum_{\alpha} e^{\frac{i}{\hbar} S_{\alpha}}, \quad (1.c)$$

donde la suma se debe realizar sobre todas las posibles trayectorias clásicas que conectan a x_a con x_b , mientras que C es una constante de normalización. Debe de observarse que la acción clásica $S(x')$ es mucho más grande que \hbar , así que la exponencial oscila rápidamente.

En la mecánica cuántica se sabe que el propagador es una solución de la ecuación de Schrödinger y se puede expresar en términos de un conjunto completo de eigenfunciones normalizadas $\psi_k(x)$ del hamiltoniano, con eigenvalores E_k :

$$G(x_b, t; x_a) = \sum_k \psi_k(x_b) \exp \left(\frac{-iE_k t}{\hbar} \right) \psi_k^*(x_a). \quad (2.a)$$

La función de Green en términos de las coordenadas y de la energía se obtiene a partir de una transformada de Fourier

$$G(x_b, x_a, E) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x_b, t; x_a) \exp\left(\frac{iEt}{\hbar}\right) dt, \tag{2.b}$$

con la condición de que $G(x_b, t; x_a)$ es igual a cero para tiempos $t < 0$. Si suponemos que E cuenta con una pequeña parte imaginaria positiva (esto asegura la convergencia de la integral en el límite superior), entonces el propagador se puede escribir como

$$G(x_b, x_a, E) = i\hbar \sum_k \frac{\psi_k(x_b)\psi_k^*(x_a)}{E - E_k}. \tag{2.c}$$

De la expresión anterior se puede calcular el producto $\psi_k(x_b)\psi_k^*(x_a)$ mediante el cálculo del residuo de $G(x_b, x_a, E)$ en el polo E_k . Existen tres maneras de obtener $G(x_b, x_a, E)$, la primera es sustituir $G(x_b, t; x_a)$ directamente en (2.b) y evaluar la integral mediante el método de la fase estacionaria [7]; la segunda consiste en resolver la ecuación de onda inhomogénea

$$[E - H]G(x_b, x_a, E) = \delta(x_b - x_a)$$

en el límite de \hbar pequeña [8,9]. En el tercer método [5] el resultado se expresa en términos de la acción clásica S evaluada a lo largo de una trayectoria clásica que conecta al punto x_b con el x_a a una energía dada $E = H(p, x)$. En todos los casos se encuentra que

$$G(x_b, x_a, E) = \frac{2\pi}{(2\pi i\hbar)} \sum_{\alpha} \sqrt{D} \cdot e^{[iS_{\alpha} - in_{\alpha}\pi/2]}, \tag{3.a}$$

la fase es igual a $\pi/2$ veces el número n_{α} de puntos conjugados; los puntos conjugados relevantes de esta expresión se obtienen al variar la trayectoria a energía constante. D en la expresión (3.a) es el determinante

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial x_a \partial x_b} & \frac{\partial^2 S}{\partial x_a \partial E} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial E \partial x_b} & \frac{\partial^2 S}{\partial E^2} \end{vmatrix}. \tag{3.b}$$

El número total de puntos conjugados n_{α} del determinante D provienen de dos fuentes diferentes, la primer contribución viene de las cústicas sobre la superficie de la energía, y la otra de los puntos de retorno clásicos (aunque contribuyen poco en los sistemas de más de dos grados de libertad). Los puntos de retorno clásico dan exactamente el cambio de fase de $\pi/2$ que son conocidos en sistemas unidimensionales de las fórmulas de conexión de Kramers (Van Vleck [10] fue el primero en dar una versión clásica de la mecánica cuántica y encontró la expresión para el propagador $G(x_b, t; x_a)$, Gutzwiller

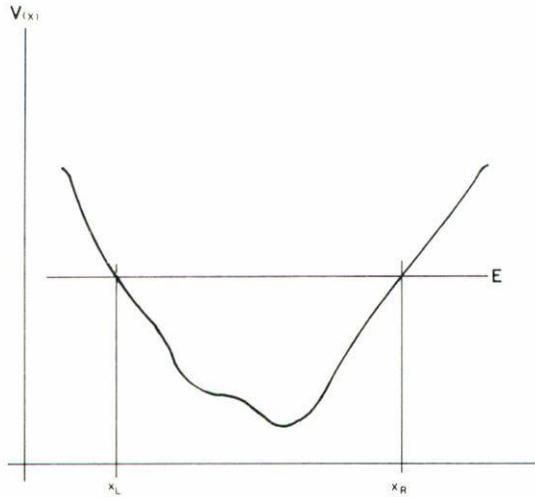


FIGURA 1. El movimiento periódico está acotado por un pozo de potencial. Para una energía E encontramos dos puntos de retorno x_L y x_R .

introdujo una corrección en la fórmula de Van Vleck al incluir la fase $in_\alpha\pi/2$). Al igualar la Ec. (2.c) con la (3.a) se obtiene una fórmula que relaciona los niveles energéticos con un conjunto de órbitas periódicas del correspondiente sistema clásico.

El análisis que a continuación se presenta está dedicado a potenciales en una dimensión y valores de la energía que confinen el movimiento de la partícula a una región finita del espacio, dicha región está acotada por los puntos de retorno $x_L(E)$ y $x_R(E)$. De la Fig. 1 vemos que x_a y x_b deben estar dentro de la región clásicamente accesible ($x_L \leq x_a, x_b \leq x_R$); en esta misma región debe calcularse $G(x_a, x_b, E)$.

La función de Green (2.c) en el espacio de coordenadas y la energía se puede calcular con mayor facilidad a través de una relación obtenida por Schulman para problemas unidimensionales. Sin embargo hay que notar que la fórmula de la que parte Schulman (Ec. (18.12), cap. 18, Ref. [7]), tiene un error en el exponente de la constante, el exponente correcto es $(d - 1)/2$. Así que la función de Green se puede escribir como

$$G(x_a, x_b, E) = \sum_{\alpha\beta} |D_{\alpha\beta}|^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{iW_{\alpha\beta}}{\hbar} - \frac{in_{\alpha\beta}\pi}{2}\right), \tag{4.a}$$

donde

$$W_{\alpha\beta}(x_a, x_b, E) = S_{\alpha\beta}(x_b, x_a, t_{\alpha\beta}) + Et_{\alpha\beta} \tag{4.b}$$

y

$$D_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 W_{\alpha\beta}}{\partial x_a \partial x_b} & \frac{\partial^2 W_{\alpha\beta}}{\partial x_b \partial E} \\ \frac{\partial^2 W_{\alpha\beta}}{\partial x_a \partial E} & \frac{\partial^2 W_{\alpha\beta}}{\partial E^2} \end{vmatrix}. \tag{4.c}$$

Los valores de $t_{\alpha\beta}$ satisfacen la relación

$$E = - \left. \frac{\partial S_{\alpha}(x_b, x_a, t)}{\partial t} \right|_{t=t_{\alpha\beta}} .$$

A la función $W_{\alpha\beta}$ se le conoce como la función característica de Hamilton, ésta también se puede escribir como [11]

$$W_{\alpha\beta}(x_b, x_a, E) = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{2m[E - V(x)]} dx. \tag{4.d}$$

De la función de Green (4.a) podemos extraer información muy importante, por ejemplo la ecuación de eigenvalores para la energía se obtiene al calcular las singularidades de esta función, mientras que la función de onda está relacionada con el residuo de $G(x_a, x_b, E)$.

Schulman encuentra que la ecuación de eigenvalores es

$$J = 2\hbar\pi \left(k + \frac{1}{2} \right), \tag{4.e}$$

donde J está dada por

$$J = \oint p dx = 2 \int_{x_L}^{x_R} \sqrt{2m[E - V(x)]} dx.$$

La fórmula (4.e) corresponde a las reglas de cuantización de Bohr-Sommerfeld.

Debido a que la fórmula que Schulman obtuvo para $G(x_a, x_b, E)$ tiene un error, éste se propaga hasta la constante de normalización de la función de onda y por esa razón no se ha escrito en este análisis. En la siguiente sección de este trabajo se hace la deducción detallada de la función de Green, el cálculo de la ecuación de eigenvalores y de la función de onda partiendo de la función de Green correcta (4.a).

3. EL PÉNDULO CUÁNTICO

La energía potencial para el péndulo cuántico está dada por

$$V(\theta) = mgl(1 - \cos \theta). \tag{5.a}$$

La ecuación de Schrödinger correspondiente se reduce a la ecuación de Mathieu

$$\frac{d^2\psi}{d\theta^2} + \frac{\beta}{4} \left[k^2 - \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right] \psi = 0, \tag{5.b}$$

donde

$$k = \sqrt{\frac{\epsilon}{2mgl}}, \quad \beta = \frac{16m^2gl^3}{\hbar^2}, \tag{5.c}$$

mientras que ϵ es el eigenvalor de la energía.

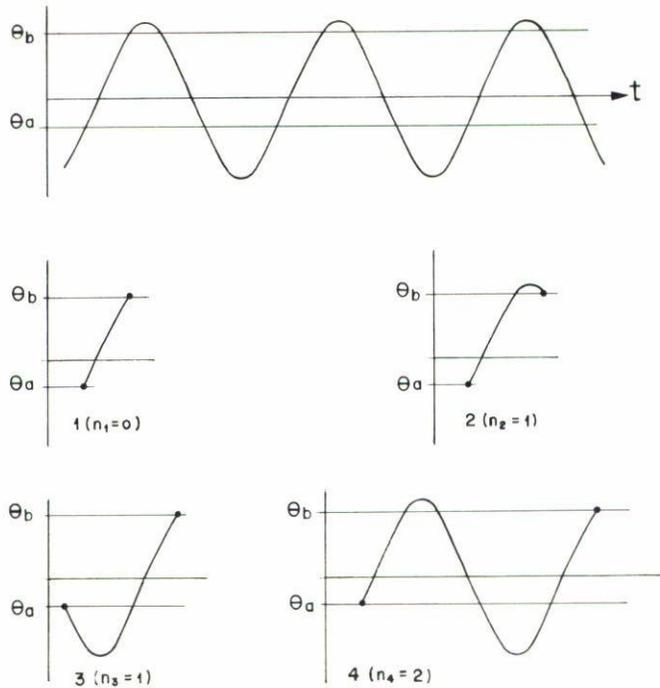


FIGURA 2. Las cuatro trayectorias primitivas para ir de θ_a a θ_b , el eje vertical representa el ángulo θ , mientras que el horizontal es el tiempo t .

Se sabe que existen tres regímenes de movimiento:

- a) Cuando $0 < k^2 < 1$ el movimiento del péndulo oscila entre los puntos de retorno $-\theta_0$ y θ_0 , y θ_0 satisface la ecuación $\text{sen } \frac{\theta_0}{2} = k$.
- b) Cuando $k^2 > 1$ el movimiento es rotatorio.
- c) Mientras que si $k^2 = 1$ el movimiento no es periódico y el péndulo se encuentra en reposo en un punto de equilibrio inestable $\theta = \pi$, o se mueve sobre la separatriz aproximándose asintóticamente al punto de equilibrio.

a) *Caso oscilatorio* $0 < k^2 < 1$

Ahora nos ocuparemos del movimiento oscilatorio entre los puntos de retorno $-\theta_0$ y θ_0 . El potencial confina la partícula que puede ir de θ_a a θ_b ; sin pérdida de generalidad se puede suponer que $-\theta_0 \leq \theta_a \leq \theta_b \leq \theta_0$. A continuación se deben de enumerar todas las trayectorias clásicas para ir de θ_a a θ_b , inmediatamente identificamos 4 caminos (Fig. 2):

- i) camino directo de θ_a a θ_b ;
- ii) camino de θ_a a θ_0 y vuelta a θ_b ;
- iii) camino de θ_a a $-\theta_0$ y de $-\theta_0$ a θ_b ;
- iv) camino de θ_a a θ_0 y de θ_0 a $-\theta_0$, después de $-\theta_0$ a θ_b .

Así que hay 4 valores de $W_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} W_1(n) &= w(\theta_b, \epsilon) - w(\theta_a, \epsilon) + nJ, \\ W_2(n) &= -w(\theta_b, \epsilon) - w(\theta_a, \epsilon) + (n + 1)J, \\ W_3(n) &= w(\theta_b, \epsilon) + w(\theta_a, \epsilon) + nJ, \\ W_4(n) &= -w(\theta_b, \epsilon) + w(\theta_a, \epsilon) + (n + 1)J, \end{aligned} \tag{6.a}$$

donde J está definida como [7]

$$J = \oint p_\theta d\theta = 2w(\theta_0, \epsilon), \tag{6.b}$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$ igual al número de ciclos completos adicionales para llegar a la configuración equivalente. El número de puntos de retorno clásicos a lo largo de cada trayectoria es $2n + n_i$, donde $n_1 = 0, n_2 = 1, n_3 = 1, n_4 = 2$.

El valor de w está dado por [7]

$$\begin{aligned} w(\theta, \epsilon) &= \int_{-\theta_0}^{\theta} l\sqrt{2m[\epsilon - V(\phi)]} d\phi \\ &= 2\sqrt{4m^2gl^3} [E(k) - (1 - k^2)K(k) + E(z, k) - (1 - k^2)F(z, k)], \end{aligned} \tag{6.c}$$

donde $K(k)$ y $F(z, k)$ son funciones elípticas completa e incompleta de primera especie, mientras que $E(k)$ y $E(z, k)$ son funciones elípticas completa e incompleta de segunda especie y

$$z = \text{sen}^{-1} \left(\frac{\text{sen} \frac{\theta}{2}}{k} \right).$$

El determinante D es simplemente el producto de $\partial^2 w / (\partial\theta_a \partial\epsilon)$ y $\partial^2 w / (\partial\theta_b \partial\epsilon)$, poniendo todos estos cálculos juntos la Ec. (4.a) queda como

$$\begin{aligned} G(\theta_a, \theta_b, \epsilon) &= \sqrt{\frac{m}{2}} [\epsilon - 2mgl \text{sen}^2(\theta_a/2)]^{-\frac{1}{4}} [\epsilon - 2mgl \text{sen}^2(\theta_b/2)]^{-\frac{1}{4}} \\ &\times \left(\sum_{n=0}^{\infty} \exp \left[\frac{inJ}{\hbar} - in\pi \right] \right) \left(\sum_{j=1}^4 \exp \left[\frac{iW_j(0)}{\hbar} - \frac{in_j\pi}{2} \right] \right). \end{aligned} \tag{6.d}$$

Los valores de n_i ya fueron dados, además en cada ciclo completo hay un cambio de fase de $-\pi$ y en n ciclos completos el cambio de fase será de $-n\pi$. La suma sobre n se puede hacer analíticamente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\exp \left(i \left[\frac{J}{\hbar} - \pi \right] \right) \right]^n = \left[1 - \exp \left(i \left[\frac{J}{\hbar} - \pi \right] \right) \right]^{-1}. \tag{6.e}$$

Esta expresión tiene un polo en $J = J_l$ cuando

$$J_l = 2\pi\hbar\left(l + \frac{1}{2}\right), \quad (l = 0, \pm 1, \dots). \tag{6.f}$$

Los valores físicamente aceptables son valores positivos de l , usando J de (6.b) y J_l (6.f) se llega a una ecuación trascendental para los eigenvalores de la energía:

$$\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}[E(k) - (1 - k^2)K(k)] = l + \frac{1}{2}, \tag{6.g}$$

donde β y k están dados en (5.c).

La Ec. (6.f) es la misma expresión a la que llegan Khare [12] y Kesarwani [13] al usar el método de WKB a segundo orden para encontrar los eigenvalores del péndulo cuántico. Hay que mencionar que a la ecuación que obtiene Khare (Ec. (9), Ref. [13]) le falta un factor 2 multiplicando al miembro izquierdo.

Cuando $k \rightarrow 0$, la Ec. (6.f) se reduce a los eigenvalores del oscilador armónico, como era de esperarse:

$$\epsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{g}{l}}\hbar.$$

A continuación calcularemos las eigenfunciones de la energía usando el hecho ya antes mencionado de que el residuo de $G(\theta_a, \theta_b, \epsilon)$ en el polo ϵ_k es igual al producto $i\hbar\psi_k(\theta_b) \times \psi_k^*(\theta_a)$. Para una J muy cercana a J_k podemos aproximar a la Ec. (6.e) mediante el primer término del desarrollo de Laurent:

$$\frac{i\hbar}{J - J_k} = \frac{i\hbar}{(dJ/d\epsilon)(\epsilon - \epsilon_k)}. \tag{7.a}$$

La derivada de J respecto a la energía es

$$\frac{dJ}{d\epsilon} = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K(k). \tag{7.b}$$

Notamos que esta expresión es exactamente el período de oscilación del péndulo clásico [14] y ahora formará parte de la amplitud de la función de onda.

El residuo de G en el polo ϵ_k es

$$\text{Res } G = \lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_k} (\epsilon - \epsilon_k)G(\theta_b, \theta_a, \epsilon). \tag{7.c}$$

Después de hacer los cálculos indicados se obtiene que

$$i\hbar\psi_k(\theta_b)\psi_k^*(\theta_a) = \sqrt{\frac{ml^2}{2}}[\epsilon_k - 2mgl \text{sen}^2(\theta_b/2)]^{-\frac{1}{4}}[\epsilon_k - 2mgl \text{sen}^2(\theta_a/2)]^{-\frac{1}{4}} \\ \times \frac{i\hbar}{4\sqrt{l/g}K(k)} 2 \left[\text{sen} \frac{w(\theta_a)}{\hbar} + \cos \frac{w(\theta_a)}{\hbar} \right] \left[\text{sen} \frac{w(\theta_b)}{\hbar} + \cos \frac{w(\theta_b)}{\hbar} \right], \tag{7.d}$$

finalmente de aquí podemos encontrar las eigenfunciones de la energía:

$$\psi(\theta, \epsilon) = \left[\frac{mgl}{8K^2(k)} \right]^{\frac{1}{4}} [\epsilon_k - 2mgl \text{sen}^2(\theta/2)]^{-\frac{1}{4}} \left[\text{sen} \frac{w(\theta_a)}{\hbar} + \text{cos} \frac{w(\theta_a)}{\hbar} \right], \quad (7.e)$$

donde $w(\theta) = w(\theta, \epsilon_k)$ está dada por la Ec. (6.c), mientras que k se determina por la Ec. (5.c).

b) Caso rotatorio $k^2 > 1$

En este caso la partícula gira alrededor del punto de suspensión describiendo círculos. Suponiendo sin pérdida de generalidad que $0 \leq \theta_a \leq \theta_b \leq 2\pi$, sólo es posible una trayectoria clásica: camino directo de θ_a a θ_b . Por lo tanto, $W_{\alpha\beta}$ es

$$W(n) = w(\theta_b, \epsilon) - w(\theta_a, \epsilon) + nJ, \quad (8.a)$$

donde $w(\theta, \epsilon)$ está definida por la relación

$$w(\theta, \epsilon) = \int_0^\theta l \sqrt{2m[\epsilon - V(\phi)]} d\phi,$$

que para este caso resulta ser

$$w(\theta, \epsilon) = \sqrt{8m\epsilon l^2} E(\theta/2, \lambda); \quad (8.b)$$

la cantidad adimensional útil en esta ocasión es

$$\lambda = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{2mgl}{\epsilon}}, \quad (8.c)$$

mientras que la integral de acción J definida mediante (6.b) es igual a

$$J = \frac{2\sqrt{\beta} \hbar}{\lambda} E(\lambda). \quad (8.d)$$

En este caso no existen puntos de retorno clásico, así que el cambio de fase en cada ciclo completo es 0, y también $n_i = 0$. Nuevamente el determinante D es (Ec. (4.c)) simplemente el producto de $\partial^2 w / (\partial \theta_a \partial \epsilon)$ y $\partial^2 w / (\partial \theta_b \partial \epsilon)$, reuniendo todos los cálculos en la Ec. (4.a), tenemos que

$$G(\theta_b, \theta_a, \epsilon) = \sqrt{\frac{2mgl^2}{2}} [\epsilon - 2mgl \text{sen}^2(\theta_b/2)]^{-\frac{1}{4}} [\epsilon - 2mgl \text{sen}^2(\theta_a/2)]^{-\frac{1}{4}} \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} \exp \left[\frac{inJ}{\hbar} \right] \right) \exp \left[\frac{iW(0)}{\hbar} \right]. \quad (8.e)$$

Usando (6.c) vemos que (8.e) tiene un polo en $J = J_n$, cuando

$$J_n = 2n\pi\hbar \quad (n = 0, \pm 1, \dots). \quad (8.f)$$

Los valores de n que nos interesan son los enteros positivos (por convención supondremos que n es positiva si el movimiento es en el sentido de las manecillas del reloj y negativa en caso contrario). Reuniendo la expresión para J dada por (8.d) con (8.f) encontramos una ecuación trascendental para la energía:

$$\frac{\sqrt{\beta}}{\pi\lambda} E(\lambda) = n. \quad (8.g)$$

Esta misma expresión fue obtenida por Khare [12] y Kesarwani [13], aunque este último tiene un error, ya que en su fórmula el lado izquierdo de (8.g) tiene un factor de 2 adicional.

En el caso límite cuando $\epsilon \gg 2mgl$ el péndulo se convierte en un rotor rígido libre y la expresión (8.g) se convierte en

$$\epsilon_n = \frac{n^2\hbar^2}{2ml^2},$$

como era de esperarse.

Para calcular las eigenfunciones de la energía hay que calcular el residuo de $G(\theta_b, \theta_a, \epsilon)$ en el polo ϵ_n , entonces usamos primero la fórmula (7.a) para calcular el primer término del desarrollo de Laurent, teniendo en cuenta que $dJ/d\epsilon$ es

$$\frac{dJ}{d\epsilon} = \frac{2\sqrt{\beta}}{\lambda\epsilon} F(\lambda),$$

Ahora usamos la Ec. (7.c) e igualando esta expresión con $i\hbar\psi_k(\theta_b)\psi_k^*(\theta_a)$, se obtiene una ecuación que debe de satisfacer la función de onda

$$\begin{aligned} \psi_k(\theta_b)\psi_k^*(\theta_a) &= \sqrt{\frac{mgl^2}{2}} [\epsilon_n - 2mgl \sin^2(\theta_b/2)]^{-\frac{1}{4}} [\epsilon_n - 2mgl \sin^2(\theta_a/2)]^{-\frac{1}{4}} \\ &\times \left[\frac{2\sqrt{\beta}}{\lambda_n\epsilon_n} F(\lambda_n) \right] \exp \frac{i}{\hbar} [w(\theta_b, \epsilon_n) - w(\theta_a, \epsilon_n)]. \end{aligned} \quad (8.h)$$

4. CONCLUSIONES

Las ecuaciones de eigenvalores (6.g) para el caso $k^2 < 1$ y (8.g) para $k^2 > 1$ son exactamente las mismas que se obtienen al emplear el método WKB, pero para el caso $k^2 = 1$ no puede derivarse una ecuación de eigenvalores mediante el WKB ni mediante integrales

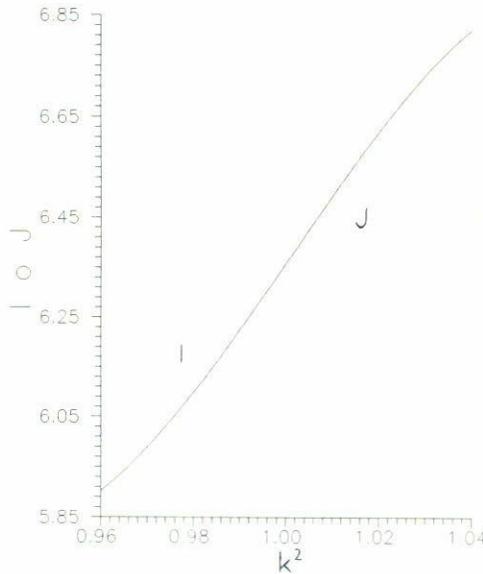


FIGURA 3. I y J como funciones de k^2 , para $\beta = 100$ (obsérvese que existe un cambio en la curvatura en $k^2 = 1$, además $I(k^2 \rightarrow 1) = J(1/k^2 \rightarrow 1)$).

de trayectoria, pero podríamos esperar que usando (6.g) o (8.g) en el límite $k^2 \rightarrow 1$ pudiéramos calcular los eigenvalores correspondientes.

Numéricamente los eigenvalores de la energía k^* pueden obtenerse a partir de las Ecs. (6.g) y (8.g), respectivamente. Este cálculo lo realizó Kesarwani [13] y encontró que para k^2 muy cercana a 1, no es posible determinar la energía correspondiente a partir de (6.g) o (8.g) para ciertas combinaciones de n y β , por ejemplo, las combinaciones de (n, β) siguientes: (1, 3.6), (2, 12.2), (3, 26), (4, 44.5) y (5, 6), para cada n siempre existe un intervalo de valores de β para los cuales esto sucede. La razón de esta situación, explica Kesarwani puede entenderse fácilmente viendo la Fig. 3, en la cual se ha graficado el lado izquierdo de (6.g), que llamaremos I (para $k^2 < 1$), y el lado izquierdo de (8.g), que lo llamaremos J (para $k^2 > 1$), contra k^2 para el caso $\beta = 100$. Entonces, un eigenvalor para el caso $n = 6$ se podría obtener de (6.g) si I en algún momento fuera igual a 6.5, pero de la gráfica se observa que I siempre es menor a este valor. De la misma manera un eigenvalor para $n = 6$ se podría obtener de (8.g) si en algún momento J fuera igual a 6, pero resulta que el valor de J siempre es mayor que 6, por lo tanto tampoco en este caso hay eigenvalor. Así que para encontrar estos eigenvalores es necesario introducir correcciones de orden superior en el marco del WKB (recuerde que (6.g) y (8.g) son las mismas expresiones que se obtienen a primer orden en el WKB). Kesarwani [13] introdujo correcciones calculando los primeros cuatro términos diferentes de cero en la aproximación WKB y pudo calcular satisfactoriamente los eigenvalores de la energía cuando k^2 es muy cercana a 1.

Aunque con este método no siempre se pueden obtener eigenvalores de alta precisión, la verdadera potencia del método basado en las integrales de trayectoria se revela en el estudio de aquellos problemas cuánticos cuyas contrapartes clásicas presentan *caos*. En

el caso de problemas integrables las órbitas periódicas se pueden identificar rápidamente y la suma que consiste de todas las trayectorias clásicas que unen a dos puntos puede realizarse con cierta facilidad, mientras que en los sistemas clásicos no integrables esta tarea no es sencilla en general y es necesario incluir miles o cientos de miles de órbitas primitivas para lograr una precisión aceptable en los eigenvalores [15].

REFERENCIAS

1. E.U. Condon, *Phys. Rev.* **31** (1928) 891.
2. T. Pradhan and Khare, *Am. J. Phys.* **41** (1973) 59.
3. A. Khare, *Lett. Nuovo Cimento* **18** (1977) 346.
4. G. Casati, *Chaotic Behavior in Quantum Systems Theory and Applications*, NATO ASI Series B: Physics Vol. 120.
5. M.C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, New York (1990).
6. M.C. Gutzwiller, *J. Math. Phys.* **8** (1967) 1979; M.C. Gutzwiller, *J. Math. Phys.* **10** (1969) 1004; M.C. Gutzwiller, *J. Math. Phys.* **11** (1970) 1791.
7. L.S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration*, Wiley, New York (1981).
8. C.S.S. Avila and J.B. Keller, *Comm. Pure Appl. Math.* **16** (1963) 363.
9. D. Ludwig, *Comm. Pure Appl. Math.* **19** (1966) 215.
10. J.H. Van Vleck, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **14** (1928) 178.
11. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, MA. (1980).
12. A. Khare, *Lettere al Nuovo Cimento*, **18** (1977) 346.
13. R.N. Kesarwani and Y.P. Varshni, *J. Math. Phys.* **23** (1982) 92.
14. J.B. Seaborn, *Hypergeometric functions and their applications*, Springer-Verlag, New York (1991), p. 33.
15. M. Sieber and F. Steiner, *Physics D* **44** (1990) 248.