Procesos y distribuciones de probabilidad subyacentes en la ley de radiación de Planck

VÍCTOR GRANADOS GARCÍA*
Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional
Edificio 9, Unidad Profesional Zacatenco, 07738 México, D.F., México

Recibido el 1 de abril de 1993; aceptado el 1 de julio de 1993

RESUMEN. Se estudian los procesos estocásticos y las funciones de distribución subyacentes en la obtención de la ley de radiación de Planck (segunda teoría) y en la de los coeficientes A y B de Einstein. Basándose en la ecuación maestra de Pauli se analizan las implicaciones físicas de los principios de reversibilidad microscópica y balance detallado, así como la importancia del coeficiente A de Einstein en el alcance del equilibrio termodinámico.

ABSTRACT. The stochastic processes and the distribution functions underlying for obteining both the second theory of Planck radiation law, and the Einstein A and B coefficients are studied. Based on Pauli master equation, the physical implications of the principles of microscopic reversibility and the detailed balance are analyzed. The role of Einstein A coefficient in the reaching of thermodynamic equilibrium is also studied.

PACS: 03.65.Bz; 05.40.+j

1. INTRODUCCIÓN

Planck, en la obtención de la ley de radiación de cuerpo negro mediante su segunda teoría [1,2], necesitó dar una condición inicial para que las poblaciones de osciladores comprendidas entre dos anillos elípticos en el espacio fase se mantuvieran en equilibrio termodinámico. Esto le permitió obtener una distribución de probabilidad para calcular la entropía de Boltzmann [4] y de ahí las propiedades termodinámicas de la radiación. Einstein [3], en la obtención de la ley de radiación con la introducción de los coeficientes A y B, también hizo una consideración de balance detallado en el intercambio de energía entre dos niveles. Sin embargo, en ningún caso consideró una ecuación cinética o proceso dependiente del tiempo para obtener la condición de equilibrio termodinámico. Van Kampen [5] obtuvo la ley de radiación como solución de equilibrio de una ecuación de un proceso estocástico de nacimiento y muerte, haciendo uso de los coeficientes A y B de Einstein. En el presente trabajo, a partir de la ecuación maestra de Pauli, se plantea la ecuación para los procesos de nacimiento y muerte, su solución estacionaria, así como las implicaciones físicas de los principios de balance detallado y reversibilidad microscópica en relación con la ley de radiación de Planck. También se analiza el tipo de proceso estocástico y la distribución de probabilidad subyacente en la obtención de

*Area de Física, CBI, UAM-AZC. México, D.F.

la ley de radiación de Planck. Para esto en la Sec. 2 se presenta la obtención de la ley de radiación en la segunda teoría de Planck [1,2]; en la Sec. 3 se estudian las soluciones estacionarias de los procesos de nacimiento y muerte, así como los principios de balance detallado y de reversibilidad microscópica, y el alcance del equilibrio termodinámico. En la Sec. 4, se deduce la ley de radiación de Planck, a partir del balance detallado de la Sec. 3 y se identifica el coeficiente A de Einstein con la constante que determina el alcance del equilibrio termodinámico, y en la Sec. 5 se dan las conclusiones obtenidas.

2. Segunda teoría de Planck

En la segunda teoría de la radiación del cuerpo negro, Planck [1,2] asumió que la absorción se comporta de acuerdo a la teoría clásica y que la emisión de radiación ocurre discretamente. Consideró, también, que un oscilador puede radiar sólo después de absorber continuamente energía. Él imaginó que como consecuenica de la absorción, la energía del oscilador es $nh\nu$ de tal forma que hay N_n osciladores en el anillo del espacio fase limitado por las elipses con energías $U = (n-1)h\nu$. Así, cuando los osciladores absorben energía, se desplazan a través del anillo hasta su frontera en la elipse exterior; en la cual $N_n p$ de ellos perderán su energía al emitir, siendo p la probabilidad de emisión. Por lo tanto, $N_n(1-p)$ osciladores que no radían pasarán al anillo siguiente, es decir, $(1-p)$ es la probabilidad de absorción sin emisión. Si el tiempo empleado en pasar todos los anillos es el mismo, el proceso de emisión y absorción puede alcanzar el equilibrio termodinámico cuando se satisfaga la condición

$$N_n(1-p) = N_{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

El número total de osciladores en el campo de radiación en condiciones estacionarias en todos los anillos está dado por la serie geométrica

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} N_n = N_1(1 + (1-p) + (-p)^2 + \cdots) = \frac{N_1}{p}, \tag{2}$$

donde N_1 es el número de osciladores en el estado base. Hay entonces $N_1 = Np$ osciladores en la elipse central, $N_n = Np(1-p)^{n-1}$ en el anillo entre las elipses con energías $nh\nu$ y $(n-1)h\nu$ y $P_n = N_n/N$ es la fracción de osciladores en tal anillo, de un total de N. Por lo tanto las poblaciones N_n están dadas por la distribución de probabilidad geométrica

$$P_n = p(1-p)^{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

que puede usarse para calcular la entropía de los osciladores. De acuerdo con Boltzmann [4], la entropía se puede expresar de acuerdo a la Ec. (3) como

$$\begin{aligned} S &= -kN \sum_{n=1}^{\infty} P_n \ln P_n \\ &= kN \left[\frac{(\ln p)}{p} + \left(\frac{1}{p} - 1\right) \ln \left(\frac{1}{p} - 1\right) \right]. \end{aligned} \tag{4}$$

La energía promedio u de los osciladores se puede calcular con la distribución geométrica de la Ec. (3). Para esto Planck supone que todas las energías comprendidas entre $(n-1)h\nu$ y $nh\nu$ son igualmente probables, por lo que la energía media de los osciladores en un anillo es

$$\tfrac{1}{2}(nh\nu + (n-1)h\nu) = \left(n - \tfrac{1}{2}\right)h\nu.$$

La energía promedio u de cada oscilador es, por lo tanto,

$$\begin{aligned} u = \sum_{n=1}^{\infty}\left(n - \tfrac{1}{2}\right)h\nu P_n &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(n - \tfrac{1}{2}\right)h\nu p(1-p)^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)h\nu. \end{aligned} \tag{5}$$

Despejando p de esta ecuación, y substituyendo en la Ec. (4), para la entropía se obtiene

$$S = Nk\left[\left(\frac{u}{h\nu} + \frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{u}{h\nu} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{u}{h\nu} + \frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{u}{h\nu} - \frac{1}{2}\right)\right]. \tag{6}$$

Usando la relación termodinámica $\partial S_N/\partial U = 1/T$ para $S_N = S/N$, Planck obtuvo finalmente, con $\beta = 1/kT$,

$$u = \frac{h\nu}{2}\frac{e^{h\nu\beta} + 1}{e^{h\nu}} = \frac{h\nu}{e^{h\nu\beta} - 1} + h\frac{\nu}{2}. \tag{7}$$

De esta forma, apareció por primera vez el término de energía de radiación de punto cero $h\nu/2$.

Para obtener la densidad espectral $\rho(\nu, T)$, Planck supuso que la razón de la probabilidad de que el oscilador no emita $(1-p)$ (es decir que absorba) a la probabilidad de emisión p, es proporcional a $\rho(\nu, T)$:

$$d\frac{1-p}{p} = \rho(\nu, T), \tag{8}$$

donde d es una constante que no depende de T, de la cual se obtiene

$$\rho(\nu, T) = \frac{d}{\rho^{h\nu\beta} - 1}. \tag{9}$$

El valor de d se determina tomando el límite clásico, en el cual la ley de Raleygh-Jeans se aplica, así $d = 8\pi h\nu\beta/C^2$, por lo tanto

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3/C^3}{e^{h\nu\beta} - 1}. \tag{10}$$

Planck [2] presentó otro método para calcular la probabilidad P_n sin partir de la condición estacionaria de la Ec. (1). La energía total E de los N osciladores se puede escribir de la Ec. (5) como

$$E = uN = N \sum_{n=1}^{\infty} (n - \tfrac{1}{2}) P_n, \tag{11}$$

con la condición de conservación

$$\delta E = 0 = N \sum_{n=1}^{\infty} (n - \tfrac{1}{2}) \delta P_n. \tag{12}$$

La normalización de la distribución impone la restricción,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \delta P_n = 0. \tag{13}$$

De la primera expresión para la entropía [dada por la Ec. (4)] y ya que en equilibrio ésta es máxima, se tiene

$$\delta S = \sum_{n=1}^{\infty} (\ln P_n + 1) P_n = 0. \tag{14}$$

Sumándole a esta ecuación las restricciones expresadas por las Ecs. (12) y (13) con um multiplicador b se llega a

$$\ln P_n + b + \text{const.} = 0, \tag{15}$$

que tiene como solución

$$P_n = \alpha \gamma^n. \tag{16}$$

Las constantes α y γ se determinan sustituyendo (16) en las Ecs. (11) y (13), las cuales dan

$$\alpha = \frac{2h\nu}{2u - h\nu}, \tag{17}$$

$$\gamma = \frac{2u - h\nu}{2u + h\nu}. \tag{18}$$

Sustituyendo las Ecs. (16), (17) y (18) en la Ec. (4) para la entropía en equilibrio, en función de P_n, Planck obtuvo nuevamente la expresión para la entropía

$$S = kN \left[\left(\frac{u}{h\nu} + \frac{1}{2} \right) \ln \left(\frac{u}{h\nu} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{u}{h\nu} - \frac{1}{2} \right) \ln \left(\frac{u}{h\nu} - \frac{1}{2} \right) \right],$$

que es la misma Ec. (6) para la entropía obtenida a partir de la Ec. (1). Otra vez de esta ecuación se puede obtener la densidad espectral de la misma forma vista antes. De las Ecs. (7), (17) y (18) se encuentran los valores de α y γ:

$$\alpha = e^{h\nu\beta} - 1, \tag{19}$$

$$\gamma = e^{-h\nu\beta}. \tag{20}$$

Por lo tanto, la distribución de probabilidad toma la forma

$$P_n = \left(e^{h\nu\beta} - 1\right)e^{-h\nu\beta n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{21}$$

y los números de las poblaciones en los niveles de los osciladores son

$$\begin{aligned} N_n &= N\left(e^{h\nu\beta} - 1\right)e^{-h\nu\beta n} \\ &= g_n e^{-h\nu\beta n}, \end{aligned} \tag{22}$$

en la cual el peso estadístico $g_n = N\left(e^{h\nu\beta} - 1\right)$ es independiente del índice n de la población N_n, pero depende de la temperatura.

Comparando las Ecs. (3) y (21) para P_n se obtienen las expresiones para las probabilidades de emisión y absorción:

$$\begin{aligned} p &= \alpha\gamma = \left(1 - e^{-h\nu\beta}\right), \\ 1 - p &= \gamma = e^{-h\nu\beta}, \end{aligned} \tag{23}$$

que son las mismas que se obtienen de las Ecs. (5) y (7). La condición de equilibrio de la Ec. (1), teniendo en cuenta la Ec. (22), se expresa ahora como

$$N_{n+1} = N_n\rho^{-h\nu\beta} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{24}$$

La razón de las probabilidades de la Ec. (8) queda expresada ahora por

$$\frac{1-p}{p} = \frac{1}{e^{h\nu\beta} - 1} = \bar{n}, \tag{25}$$

en la que $\bar{n}$ es el número promedio de osciladores en el nivel n; cambiando n por $n - 1 = 0, 1, 2, \ldots$, se tiene

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{\infty} np(1-p)^n \\ &= \frac{1-p}{p}. \end{aligned} \tag{26}$$

Esto justifica la proporcionalidad entre esta razón, igual al número promedio y la densidad espectral, siendo por lo tanto la constante de proporcionalidad igual al número de modos normales de radiación en una cavidad por la energía $h\nu$ de cada modo. La Ec. (26) permitió a Planck [2] expresar P_n como función de $\bar{n}$ en la forma

$$P_n = \frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{27}$$

3. Procesos estocásticos de creación y aniquilación

Se considera un sistema descrito por los estados con energías $E^0, E^1, \ldots, E^n, \ldots$ Las poblaciones de los estados evolucionan de tal forma que la probabilidad $P_n(t)$ de que el sistema esté en el estado n en el tiempo t, está determinada por la ecuación maestra de Pauli [6]

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} \big(W_{nm}P_m(t) - W_{mn}P_n(t)\big) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{28}$$

donde W_{mn} es la probabilidad de transición por unidad de tiempo del estado n al m, y no depende de t. Las probabilidades de transición entre estados con $n - m > 1$ se suponen mucho menores que las de un sólo salto con $n - m = 1$. En este caso las probabilidades de transición se designan con $C_n = W_{n,n+1}$ y $d_n = W_{n+1,n}$. La ecuación maestra de Pauli se reduce, para procesos de un salto, al sistema de ecuaciones

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -C_0P_0(t) + d_1P_1(t) \qquad (n = 0) \tag{29}$$

y

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(C_n + d_n)P_n(t) + C_{n-1}P_{n-1}(t) + d_{n+1}P_{n+1}(t) \qquad (n \geq 1). \tag{30}$$

La Ec. (29) tiene una forma anómala en relación a la Ec. (30), debido a la existencia de un estado base, con energía E^0, de mínima energía que acota por la izquierda el espectro de energía de los estados accesibles. Por lo tanto, sólo puede saltarse de este estado al E^1 y recíprocamente. Las probabilidades de transición C_n y d_n son también independientes de t y de cómo el sistema llegue a cualquier estado, es decir, el proceso es de Markov. El proceso estocástico determinado por las Ecs. (29) y (30) es conocido como un proceso de nacimiento y muerte [5,7], o de creación y aniquilación como se le designará aquí. Definiendo

$$H(t) = \sum_n P_n(t) \ln P_n(t), \tag{31}$$

se tiene

$$\frac{dH(t)}{dt} = \sum_n \frac{dP_n(t)}{dt}(\ln P_n(t) + 1). \tag{32}$$

Sustituyendo en ésta $dP(t)/dt$ de la Ec. (28) de Pauli y usando el principio de reversibilidad microscópica

$$W_{mn} = W_{nm}, \tag{33}$$

el cual se justifica de los principios de la mecánica cuántica [6], se tiene

$$\frac{dH(t)}{dt} = \frac{1}{2}\sum_{m,n}\big(W_{mn}(P_n(t) - P_m(t))\big)\big(\ln P_n(t) - \ln P_m(t)\big). \tag{34}$$

Ya que $W_{mn} \geq 0$ y los sumandos de esta expresión son de la forma $(x-y)(\ln x - \ln y)$ con $x > 0$ y $y > 0$, se sigue, por lo tanto, que

$$\frac{dH}{dt} \leq 0. \tag{35}$$

De esta ecuación y del hecho de que la ecuación maestra de Pauli sea de primer orden respecto al tiempo, se sigue que el sistema que describe evolucionará hacia el equilibrio cuando $t \to \infty$, y se obtendrán soluciones estacionarias para la probabilidad $P_n(t)$, que no dependerán del tiempo y que se denotan por P_n. La cantidad H de la Ec. (31) se identifica entonces con la entropía en equilibrio del sistema cuanto $t \to \infty$.

Haciendo las derivadas temporales iguales a cero y poniendo P_n en lugar de $P_n(t)$ para obtener la solución de equilibrio estacionaria en las Ecs. (24) y (30) se tiene

$$-C_0P_0 + d_1P_1 = 0 \tag{36}$$

y

$$-(C_n + d_n)P_n + C_{n-1}P_{n-1} + d_{n+1}P_{n+1} = 0. \tag{37}$$

Realizando el cambio

$$Z_k = -C_nP_n + d_{n+1}P_{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{38}$$

las Ecs. (24) y (30) toman la forma

$$Z_0 = 0, \qquad Z_{n-1} - Z_n = 0. \tag{39}$$

Por lo tanto, la solución para todo n es

$$Z_n = 0, \tag{40}$$

que de acuerdo con la Ec. (38) se puede expresar como

$$P_n = \frac{C_{n-1}}{d_n} P_{n-1} = \prod_{i=1}^{n} \frac{C_{i-1}}{d_i} P_0, \tag{41}$$

en la que la P_0 se determina de la condición de normalización $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1$. Por lo tanto

$$P_0^{-1} = S = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i-1}^{n} \frac{C_{i-1}}{d_i} \right]. \tag{42}$$

Las Ecs. (41) y (42) determinan una solución de equilibrio de una distribución de probabilidad si y sólo si la cantidad S es finita [7]; así que cuando S diverge no existe una solución de equilibrio.

Es plausible entonces que exista una solución de equilibrio para la distribución de probabilidad P_n para procesos de un salto cuando la probabilidad de transición por unidad de tiempo a niveles más bajos d_i sea mayor que la de transición a niveles más altos C_{i-1}, es decir, cuando la razón de transición $r_i = C_{i-1}/d_i$ satisfaga

$$r_i = \frac{W_{i-1,i}}{W_{i+1,i}} = \frac{C_{i-1}}{d_i} < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{43}$$

Matemáticamente esto significa que la sumatoria S de la Ec. (42) converge, lo cual da como resultado que P_0 no se anule y que P_n sea finita. Físicamente significa que la probabilidad de transición por unidad de tiempo del nivel $i-1$ al i por absorción, es menor que la probabilidad de transición del nivel $i+1$ al i con emisión de radiación cuando se trate de un sistema de osciladores en equilibrio con radiación. Asimismo, de la Ec. (41) se sigue que la población del nivel n es menor que la del $n-1$ como consecuencia de que la probabilidad de emisión d_n es mayor que la de absorción C_{n-1} entre esos niveles.

Se pueden ahora tratar [5] varias posibilidades respecto a la dependencia en n de los coeficientes C_n y d_n. Si se toman iguales a las constantes a, b independientes de n,

$$C_n = a, \qquad d_n = b, \tag{44}$$

tendrán que ser iguales de acuerdo con el principio de reversibilidad microscópica de la Ec. (33) y no proporcionarán una solución de equilibrio al violar la condición de la Ec. (43), ya que $r_i = 1$. Una posibilidad físicamente aceptable [5] es la siguiente:

$$C_n = (n+1)b, \tag{45}$$

$$d_n = na, \tag{46}$$

con a y b constantes; con razón de transición

$$r_i = \frac{b}{a} = r < 1. \tag{47}$$

Sustituyendo ésta en la Ec. (42) se obtiene que la suma S es una serie geométrica con razón r y la distribución de equilibrio P_n de la Ec. (41) es por lo tanto la geométrica

$$P_n = r^{n-1}(1-r) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{48}$$

Tomando los estados de energía del sistema como los estados de un sistema de osciladores en equilibrio termodinámico con radiación térmica, se puede usar la distribución geométrica P_n para calcular la entropía y determinar la razón de transición r sin suponer de antemano su dependencia con la temperatura, o la de a y b [8]. Procediendo en forma similar como se llegó de la Ec. (16) a la (21) y (23), se tiene ahora con $n = 1, 2, 3, \ldots$ que

$$\begin{aligned} P_n &= (1-r)r^{n-1} \\ &= \left(e^{h\nu\beta} - 1\right)e^{-h\nu\beta n}. \end{aligned} \tag{49}$$

Por lo tanto la razón de transición como función de la temperatura es

$$r = e^{-h\nu\beta}. \tag{50}$$

La solución de equilibrio termodinámico de la Ec. (41), expresa entonces el principio de balance detallado [6] entre los estados n y $n-1$

$$P_n = P_{n-1}e^{-h\nu\beta} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{51}$$

que no es más que la expresión de equilibrio de Planck de las Ecs. (1) y (24), y por lo tanto, ésta es una forma implícita del principio de balance detallado. La Ec. (33) del principio de reversibilidad microscópica, junto con las Ecs. (45) y (46) para las probabilidades de transición, determinan n en equilibrio, igual al valor promedio de n:

$$n = \bar{n} = \frac{1}{r^{-1} - 1} = \frac{1}{e^{h\nu\beta} - 1}. \tag{52}$$

La sumatoria S de la solución de equilibrio de la Ec. (42) es por lo tanto la función de partición Z [9] para el sistema de osciladores

$$\begin{aligned} S = Z &= (1-r)^{-1} \\ &= \left(1 - e^{-\beta h\nu}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{53}$$

El valor promedio de $\bar{n}$ como función del tiempo se obtiene resolviendo la ecuación

$$\frac{d\bar{n}(t)}{dt} + (a-b)\bar{n}(t) = b, \tag{54}$$

que se obtiene multiplicando la Ec. (30) por n y usando las Ecs. (45) y (46); así, con la condición inicial $n(0) = 0$, $c = a - b > 0$, su solución es

$$\bar{n}(t) = \frac{e^{-ct}}{1 - r^{-1}} + \frac{1}{r^{-1} - 1}. \tag{55}$$

De esta expresión para el número promedio como función del tiempo, se tiene que pueden existir radiación o fotones fuera del estado de equilibrio, pero que esta radiación alcanzará el equilibrio termodinámico cuanto $t \to \infty$, de tal forma que

$$\bar{n}(\infty) = \frac{1}{r^{-1} - 1} = \frac{1}{e^{h\nu\beta} - 1} = \bar{n}. \tag{56}$$

Esto sucede debido a que el término e^{-ct} de la Ec. (56) con $c > 0$, decae a cero cuando $t \to \infty$, lo cual no sería posible si no se satisface $a/b > 1$, que, como se vio, es una condición necesaria y suficiente para que existan soluciones de equilibrio. En caso contrario, si $c < 0$, $n(\infty)$ diverge, dando lugar a una catástrofe.

La solución de la ecuación maestra (30), con la condición inicial de que no haya fotones o radiación ($n(0) = 0$) [10], es, con $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$P_n(t) = \frac{c}{a - b\exp[-ct]} \left[\frac{b(1 - \exp[-ct])}{a - b\exp[-ct]}\right]^n. \tag{57}$$

Cuando $t \to \infty$, esta solución conduce a la del alcance del equilibrio expresada en la Ec. (48), con $r = b/a$:

$$P_n(\infty) = (1 - r)r^n. \tag{58}$$

Por lo tanto, se puede proponer que el significado físico de la constante c^{-1}, es el de tiempo de vida media del decaimiento espontáneo de las poblaciones en estados excitados, semejante al de Wigner y Weisskopf [11] en física atómica. Aun cuando existen otras soluciones [12,13] para la razón de transición, no se consideran aquí por caer fuera del contexto de la radiación de cuerpo negro.

4. Coeficientes A y B de Einstein

Para la obtención de la ley de radiación de Planck, Einstein [3] introdujo algunas hipótesis acerca de los procesos de emisión y absorción de radiación de los osciladores. Supuso que los niveles de energía tienen valores discretos. Si N_n y N_m son las poblaciones de los niveles E_n y E_m, con $E_n < E_m$, el cambio temporal dN_n/dt debido a la absorción de radiación debe ser proporcional a N_n y a la densidad espectral de energía $\rho(\omega)$, con frecuencia $\omega = (E_m - E_n)/\hbar$:

$$\frac{dN_n}{dt} = B_n^m N_n \rho(\omega), \tag{59}$$

donde el coeficiente B_n^m es la probabilidad de transición por unidad de tiempo del estado n al m. Propuso también dos tipos de procesos de emisión del estado E_n al E_m. Uno fue el de emisión espontánea, que puede ocurrir aun en ausencia de radiación, descrito por el coeficiente A_m^n de probabilidad por unidad de tiempo de emisión espontánea, con lo cual

$$\frac{dN_m}{dt} = A_m^n N_m. \tag{60}$$

El otro fue el de emisión inducida, descrita por el coeficiente B_m^n de probabilidad por unidad de tiempo de emisión, con dN_m/dt proporcional a la población N_m y a la densidad espectral:

$$\frac{dN_m}{dt} = B_m^n N_m \rho(\omega). \tag{61}$$

Finalmente, consideró que para determinar $\rho(\omega)$ por intercambio de energía entre la radiación y los osciladores descrita por los procesos de las Ecs. (59), (60) y (61) entre los niveles E_m y E_n, es necesario y suficiente que se satisfaga la condición de balance

$$g_n e^{-h\nu n\beta} B_n^m \rho(\omega) = g_m e^{-h\nu m\beta} (B_m^n \rho(\omega) + A_m^n), \tag{62}$$

en la cual se ha usado la Ec. (22) para las poblaciones N_n en equilibrio termodinámico. Como $\rho(\omega)$ tiende a infinito cuando $T \to \infty$, se tiene la relación entre los coeficientes B_n^m y B_m^n

$$g_n B_n^m = g_m B_m^n, \tag{63}$$

de la cual se obtiene como condición de equilibrio termodinámico

$$\rho(\omega) = \frac{A_m^n / B_n^m}{e^{-(E_n - E_m)B} - 1}. \tag{64}$$

De la ley de Wien del desplazamiento se sigue que

$$\frac{A_m^n}{B_n^m} = \alpha \nu^3$$

y

$$E_m - E_n = h\nu,$$

donde α es una constante. De las Ecs. (22) se tiene que los pesos estadísticos g_n y g_m son iguales, por lo cual, de la Ec. (63) se tiene

$$B_n^m = B_m^n; \tag{65}$$

igualdad que se considera consecuencia o equivalencia del principio de reversibilidad microscópica. A esta obtención de la ley de Planck hecha por Einstein se le ha objetado que la Ec. (63), obtenida cuando T tiende a infinito, no se puede usar para todo el intervalo de temperaturas [12,13]. Asimismo, se podría objetar que al asumir el equilibrio dinámico entre los estados n y m expresado por la Ec. (62), no se consideran los procesos entre tres niveles consecutivos como lo expresa la Ec. (30), para procesos de un salto, descritos por la ecuación maestra de Pauli. Sin embargo, el equilibrio dinámico considerado por Einstein no es más que el principio de balance detallado expresado por la Ec. (41), como solución de equilibrio termodinámico de la ecuación maestra entre los niveles E_n y E_{n-1}. En efecto, de las Ecs. (41, (45), (46) y (50) para la solución de equilibrio se tiene

$$e^{-h\nu\beta} = \frac{b}{a}, \tag{66}$$

que se puede expresar usando la Ec. (52) para el número promedio $\bar{n}$ como

$$e^{-h\nu\beta} = \frac{b}{a} = \frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}. \tag{67}$$

Recordando la relación entre el número promedio $\bar{n}$ y la densidad espectral $\rho = d\bar{n}$ de la Ec. (9), ésta se escribe

$$e^{-h\nu\beta} = \frac{b}{a} = \frac{\rho}{\rho + d}. \tag{68}$$

Esta ecuación permite determinar las constantes a y b, utilizando los coeficientes B y $A = dB$ que no dependen de la temperatura, mediante

$$b = B\rho \tag{69}$$

$$a = B\rho + A. \tag{70}$$

Relaciones de este tipo se han propuesto [5] para obtener a partir de la Ec. (66) la densidad espectral con tres coeficientes A, B y C, pero aquí se están deduciendo a partir del balance detallado.

Se tiene entonces de las Ecs. (68), (69) y (70) para la densidad espectral

$$\rho(\omega) = \frac{d}{e^{h\nu\beta} - 1} = \frac{A/B}{e^{h\nu\beta} - 1}. \tag{71}$$

Por lo tanto, los coeficientes A y B se pueden identificar con los coeficientes A_n^m y B_m^n de Einstein. En esta deducción sólo se han introducido los dos coeficientes A y B, debido a que implícitamente se usa el principio de reversibilidad microscópica, razón por la cual los dos coeficientes B_n^m y B_m^n de Einstein son iguales, no siendo necesario usar el argumento antes mencionado cuanto T tiende a infinito.

Las expresiones para a y b de las Ecs. (69) y (70) permiten identificar la constante c, que determina el alcance del equilibrio termodinámico, con el coeficiente A de Einstein:

$$c = a - b = A. \tag{72}$$

Por lo tanto, se concluye que el coeficiente A desempeña un papel determinante en el alcance del equilibrio termodinámico de un gas de radiación térmica.

5. CONCLUSIONES

Se ha demostrado que las condiciones de equilibrio o balance usadas por Planck y Einstein en la obtención de la ley de radiación de cuerpo negro, son las de balance detallado de un proceso estocástico de creación y de destrucción. Se ha demostrado también, que usando la entropía de Boltzmann no es necesario de antemano dar una dependencia en la temperatura en los coeficientes de probabilidad de transición de la ecuación maestra de Pauli. Se ha probado que el alcance del equilibrio de la radiación de cuerpo negro está determinado por el coeficiente A de Einstein.

REFERENCIAS

1. M. Planck, *Ann. Phys.* **37** (1912) 642.
2. M. Planck, *The Theory of Heat Radiation*, Dover, New York (1959).
3. A. Einstein, *Phys. Z.* **18** (1917) 121.
4. L. Boltzmann, *Lectures on Gas Theory*, Berkeley U.P. California (1967).
5. N.G. Van Kampen, *Stochastic processes in Physics and Chemistry*, North Holland (1981).
6. R.C. Tolman, *The Principles of Statistical Mechanics*, Dover, New York (1979).
7. B. Gnedenko, *The Theory of Probability*, Edit. Mir. Moscú (1973).
8. A. Castellanos M., *Rev. Mex. Fís.* **38** (1992) 215.
9. K. Huang, *Statistical Mechanics*, John Wiley, New York (1987).
10. E. Pike, "Photon Statistics", en *Quantum Optics*, S.M. Kay y A. Maitland Eds., Academic Press, New York (1970).
11. V. Weisskopf y E. Wigner, *Z. Phys.* **63** (1930) 54.
12. B.H. Lavenda, *Int. J. Theot. Phys.* **27** (1988) 1371.
13. B.H. Lavenda, *Statistical Mechanics*, John Wiley, New York (1991).