

Rotaciones y espinores

G.F. TORRES DEL CASTILLO

*Departamento de Física Matemática, Instituto de Ciencias
Universidad Autónoma de Puebla, 72000 Puebla, Pue., México*

Recibido el 30 de julio de 1993; aceptado el 7 de octubre de 1993

RESUMEN. Usando la proyección estereográfica de la esfera sobre el plano complejo se muestra que las rotaciones en tres dimensiones pueden ser representadas por matrices 2×2 complejas y se obtiene su forma explícita. El efecto de una rotación arbitraria se expresa en términos de espinores y se muestra que una rotación puede ser representada por un espinor.

ABSTRACT. By using the stereographic projection from the sphere to the complex plane it is shown that the rotations in three dimensions can be represented by complex 2×2 matrices and their explicit form is obtained. The effect of an arbitrary rotation is expressed in terms of spinors and it is shown that a rotation can be represented by a spinor.

PACS: 02.20.Qs; 02.30.Gp; 02.10.-v

1. INTRODUCCIÓN

Es un hecho conocido el que las rotaciones en tres dimensiones pueden representarse mediante matrices 2×2 complejas y que esta representación está relacionada con la proyección estereográfica de los números complejos (véanse, por ejemplo, las Refs. [1-3]). Sin embargo, la forma en que usualmente se establecen estos resultados es un tanto indirecta, por lo que es difícil apreciar la naturalidad de estas relaciones que tienen un origen geométrico (véanse también las Refs. [4,5]).

En este artículo se utiliza la correspondencia entre puntos de la esfera y del plano complejo para mostrar que las rotaciones en tres dimensiones pueden ser representadas por cierta clase de funciones de variable compleja y por matrices 2×2 complejas, las cuales están relacionadas con los espinores. En la Sec. 2 se muestra que el sistema de ecuaciones diferenciales que determina el cambio de un vector bajo rotaciones se puede transformar, mediante la proyección estereográfica, en una sola ecuación diferencial que se resuelve por separación de variables. Se muestra entonces que la solución de dicha ecuación se puede representar por matrices unitarias 2×2 y se obtiene la matriz que corresponde a una rotación alrededor de un eje dado por un ángulo arbitrario. En la Sec. 3 se introducen los espinores y se establece la relación entre los resultados de la Sec. 2 y el tratamiento dado en otros trabajos (especialmente las Refs. [4,6-8]). Se muestra que cada punto del espacio puede representarse mediante un espinor y que un espinor también representa una terna de vectores de igual magnitud ortogonales entre sí. Se obtienen las propiedades de las matrices 3×3 reales que representan rotaciones, así como su forma explícita. En la Sec. 4 se presenta la relación entre la representación de las rotaciones mediante matrices unitarias 2×2 y los cuaterniones.

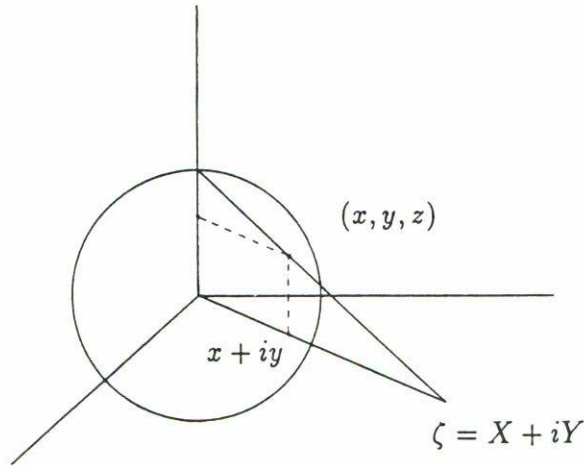


FIGURA 1. Proyección estereográfica de la esfera sobre el plano complejo.

2. REPRESENTACIÓN DE LAS ROTACIONES

La proyección estereográfica establece una correspondencia entre los puntos de la esfera $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y los del plano complejo en la siguiente forma. La línea recta que une el “polo norte” de la esfera, representado por $(0, 0, 1)$, con un punto arbitrario (x, y, z) de la esfera intersecta el plano xy en algún punto con coordenadas (X, Y) o en $X + iY$, considerando el plano xy como el plano complejo (véase la Fig. 1). Al punto (x, y, z) de la esfera se le asocia entonces el número complejo $\zeta \equiv X + iY$. Es fácil ver que ζ es un múltiplo real positivo del número complejo $x + iy$ o, en otras palabras, que ζ y $x + iy$ tienen la misma fase; por lo tanto $\frac{\zeta}{x + iy} = \frac{|\zeta|}{|x + iy|}$. De la Fig. 1, usando semejanza de triángulos, se obtiene la igualdad $\frac{|\zeta|}{|x + iy|} = \frac{1}{1 - z}$, así que $\frac{\zeta}{x + iy} = \frac{1}{1 - z}$ o, equivalentemente,

$$\zeta = \frac{x + iy}{1 - z}. \tag{1}$$

Luego, $\zeta \bar{\zeta} = \frac{x^2 + y^2}{(1 - z)^2} = \frac{1 - z^2}{(1 - z)^2} = \frac{1 + z}{1 - z}$, de donde resulta que $z = \frac{\zeta \bar{\zeta} - 1}{\zeta \bar{\zeta} + 1}$ y de la Ec. (1) se tiene entonces, $x + iy = \frac{2\zeta}{\zeta \bar{\zeta} + 1}$. Así, la relación inversa a la Ec. (1) está dada por

$$x = \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{\zeta \bar{\zeta} + 1}, \quad y = \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{i(\zeta \bar{\zeta} + 1)}, \quad z = \frac{\zeta \bar{\zeta} - 1}{\zeta \bar{\zeta} + 1}. \tag{2}$$

En términos de las coordenadas esféricas, $(x, y, z) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, y de la Ec. (1) se tiene la expresión equivalente

$$\zeta = \cot \frac{\theta}{2} e^{i\phi}. \tag{3}$$

Al efectuar cualquier rotación alrededor del origen, cada punto de la esfera es enviado a otro punto de la misma esfera y dado que, por medio de la proyección estereográfica,

existe una relación uno a uno entre puntos de la esfera y puntos del plano complejo, dicha rotación determina una transformación del plano complejo sobre sí mismo. Como se muestra enseguida, tal transformación puede obtenerse fácilmente para cualquier rotación.

Bajo rotaciones alrededor de un eje \hat{n} , el vector de posición \mathbf{r} de cualquier punto del espacio cambia de acuerdo con la ecuación

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\alpha} = \hat{n} \times \mathbf{r}, \quad (4)$$

donde α mide el ángulo rotado alrededor de \hat{n} , en el sentido dado por la regla de la mano derecha. La Ec. (4) constituye un sistema de tres ecuaciones diferenciales lineales que, de hecho, puede integrarse directamente (por ejemplo, escribiendo el lado derecho de la Ec. (4) en forma matricial y haciendo uso de la exponencial); sin embargo, la Ec. (4) puede transformarse en una ecuación más sencilla mediante las Ecs. (1) y (2), mostrando varias conexiones con otras estructuras.

Al efectuar rotaciones alrededor del eje \hat{n} , el número complejo ζ , correspondiente a un punto $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ de la esfera S , se desplaza de acuerdo con [Ecs. (1) y (4)]

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{d\alpha} &= \frac{1}{1-z} \left(\frac{dx}{d\alpha} + i \frac{dy}{d\alpha} \right) + \frac{x+iy}{(1-z)^2} \frac{dz}{d\alpha} \\ &= \frac{1}{1-z} [n_2 z - n_3 y + i(n_3 x - n_1 z)] + \frac{x+iy}{(1-z)^2} (n_1 y - n_2 x), \end{aligned}$$

donde $\hat{n} = (n_1, n_2, n_3)$, por lo que usando las Ecs. (1) y (2) resulta

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{d\alpha} &= -\frac{i}{2}(n_1 - in_2) \left[\zeta^2 - \frac{2n_3}{n_1 - in_2} \zeta - \frac{n_1 + in_2}{n_1 - in_2} \right] \\ &= -\frac{i}{2}(n_1 - in_2)(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2), \end{aligned} \quad (5)$$

donde

$$\zeta_1 \equiv \frac{n_3 + 1}{n_1 - in_2}, \quad \zeta_2 \equiv \frac{n_3 - 1}{n_1 - in_2}. \quad (6)$$

El hecho de que $\bar{\zeta}$ no aparezca en la Ec. (5) significa que la función del plano complejo sobre sí mismo que representa una rotación arbitraria es una función analítica.

A diferencia de la Ec. (4), la Ec. (5) puede integrarse en forma elemental; de hecho, usando las Ecs. (5) y (6), separando variables y descomponiendo en fracciones parciales se halla que

$$-i \int_0^\alpha d\alpha = \frac{2}{n_1 - in_2} \int_\zeta^{\zeta'} \frac{d\zeta}{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)} = \int_\zeta^{\zeta'} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_1} - \int_\zeta^{\zeta'} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_2},$$

donde ζ' denota la imagen de ζ después de haber efectuado una rotación alrededor de \hat{n} por un ángulo α . Luego,

$$\ln \left[\frac{\zeta' - \zeta_1}{\zeta - \zeta_1} \frac{\zeta - \zeta_2}{\zeta' - \zeta_2} \right] = -i\alpha,$$

de donde sigue que

$$\zeta' = \frac{e^{-i\alpha}\zeta_2(\zeta - \zeta_1) - \zeta_1(\zeta - \zeta_2)}{e^{-i\alpha}(\zeta - \zeta_1) - (\zeta - \zeta_2)},$$

y sustituyendo las expresiones (6) se llega a que

$$\zeta' = \frac{(\cos \frac{\alpha}{2} + in_3 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2})\zeta + (in_1 - n_2) \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{((in_1 + n_2) \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2})\zeta + \cos \frac{\alpha}{2} - in_3 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}. \quad (7)$$

En lugar de la variable ζ conviene utilizar

$$\xi \equiv \bar{\zeta} = \frac{x - iy}{1 - z} = \cot \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}. \quad (8)$$

A diferencia de ζ , la variable ξ define una orientación en el plano complejo que coincide con la inducida por la orientación de la esfera bajo la proyección estereográfica (esto equivale a que el jacobiano $\frac{\partial(\operatorname{Re} \xi, \operatorname{Im} \xi)}{\partial(\theta, \phi)}$ sea positivo en todos los puntos de la esfera). De las Ecs. (7) y (8) se tiene entonces,

$$\xi' = \frac{(\cos \frac{\alpha}{2} - in_3 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2})\xi - (in_1 + n_2) \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{((-in_1 + n_2) \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2})\xi + \cos \frac{\alpha}{2} + in_3 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}. \quad (9)$$

La Ec. (9) tiene la forma

$$\xi' = \frac{\beta\xi + \gamma}{\delta\xi + \epsilon}, \quad (10)$$

donde β, γ, δ y ϵ son números complejos y a esta transformación se le puede asociar la matriz compleja 2×2 formada por estos coeficientes:

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \delta & \epsilon \end{pmatrix}. \quad (11)$$

(Las funciones de la forma (10) se conocen como transformaciones de Möbius (véanse, por ejemplo, las Refs. [2,9]).) Si se efectúa una segunda rotación a continuación de la dada por la Ec. (10), ésta se representará por una expresión de la forma

$$\xi'' = \frac{\eta\xi' + \kappa}{\mu\xi' + \nu}, \quad (12)$$

donde η , κ , μ y ν son números complejos, la cual corresponde a la matriz

$$\begin{pmatrix} \eta & \kappa \\ \mu & \nu \end{pmatrix}.$$

El efecto de la composición de estas dos rotaciones se obtiene entonces sustituyendo la Ec. (10) en la Ec. (12), para obtener ξ'' en términos de ξ ,

$$\xi'' = \frac{\eta \frac{\beta\xi + \gamma}{\delta\xi + \epsilon} + \kappa}{\mu \frac{\beta\xi + \gamma}{\delta\xi + \epsilon} + \nu} = \frac{(\eta\beta + \kappa\delta)\xi + (\eta\gamma + \kappa\epsilon)}{(\mu\beta + \nu\delta)\xi + (\mu\gamma + \nu\epsilon)},$$

que corresponde a la matriz

$$\begin{pmatrix} \eta\beta + \kappa\delta & \eta\gamma + \kappa\epsilon \\ \mu\beta + \nu\delta & \mu\gamma + \nu\epsilon \end{pmatrix},$$

la cual es simplemente el producto matricial usual

$$\begin{pmatrix} \eta & \kappa \\ \mu & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \delta & \epsilon \end{pmatrix}.$$

Lo anterior significa que cada transformación de la forma (10) puede representarse por la matriz (11), de tal manera que la composición de transformaciones corresponde al producto matricial. Sin embargo, existe cierta indeterminación en la matriz que se asocia a la transformación (10), ya que ésta puede escribirse también como

$$\xi' = \frac{\lambda\beta\xi + \lambda\gamma}{\lambda\delta\xi + \lambda\epsilon},$$

para cualquier número complejo $\lambda \neq 0$; por lo que todas las matrices $\begin{pmatrix} \lambda\beta & \lambda\gamma \\ \lambda\delta & \lambda\epsilon \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \delta & \epsilon \end{pmatrix}$ deben considerarse equivalentes a $\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \delta & \epsilon \end{pmatrix}$. Para reducir esta indeterminación se impone la condición de que el determinante de $\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \delta & \epsilon \end{pmatrix}$ sea igual a 1; de esta manera sólo dos matrices corresponderán a la transformación (10) (siendo una de estas matrices la negativa de la otra). En lo que sigue se supondrá que las matrices (11) tienen determinante igual a 1.

La matriz

$$Q \equiv \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} - in_3 \sin \frac{\alpha}{2} & -(in_1 + n_2) \sin \frac{\alpha}{2} \\ (-in_1 + n_2) \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} + in_3 \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

formada por los coeficientes que aparecen en la Ec. (9), además de tener determinante igual a 1 es unitaria, es decir,

$$QQ^\dagger = I, \quad (14)$$

donde Q^\dagger es la traspuesta conjugada de Q e I denota la matriz identidad 2×2 . Esto significa que Q^\dagger es la matriz inversa de Q ; de hecho, la inversa de Q debe obtenerse cambiando α por $-\alpha$ en la Ec. (13), lo cual coincide con trasponer y conjugar Q . Así, las matrices (13), que representan rotaciones en el espacio, pertenecen al grupo $SU(2)$ formado por las matrices complejas 2×2 unitarias con determinante igual a 1. De la Ec. (13) se deduce que el ángulo de rotación α está relacionado con la traza de Q por medio de la expresión

$$\text{tr } Q = 2 \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (15)$$

La Ec. (13) equivale a

$$Q = \cos \frac{\alpha}{2} I - i \sin \frac{\alpha}{2} (n_1 \sigma_1 + n_2 \sigma_2 + n_3 \sigma_3), \quad (16)$$

donde

$$\sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

son las matrices de Pauli, las cuales satisfacen las relaciones

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} I + i \epsilon_{jkm} \sigma_m, \quad (18)$$

ϵ_{jkm} es el símbolo de Levi-Civita y, al igual que en lo sucesivo, hay suma implícita sobre índices repetidos. De las Ecs. (16) y (18) se tiene que

$$\begin{aligned} Q \sigma_k &= \left[\cos \frac{\alpha}{2} I - i \sin \frac{\alpha}{2} n_j \sigma_j \right] \sigma_k \\ &= \cos \frac{\alpha}{2} \sigma_k - i \sin \frac{\alpha}{2} n_k I + \sin \frac{\alpha}{2} \epsilon_{jkm} n_j \sigma_m, \end{aligned}$$

y tomando en cuenta que las matrices de Pauli tienen traza cero mientras que $\text{tr } I = 2$,

$$\text{tr } Q \sigma_k = -2i \sin \frac{\alpha}{2} n_k. \quad (19)$$

Por lo tanto, dada una matriz Q perteneciente a $SU(2)$, las Ecs. (15) y (19) permiten determinar el ángulo y el eje de la rotación representada por Q . De la Ec. (19) sigue que cualquier rotación en tres dimensiones es equivalente a una rotación alrededor de algún eje (véase también la Ec. (36)).

3. ESPINORES

Expresando ξ como el cociente de dos cantidades complejas

$$\xi = \frac{u}{v} \quad (20)$$

y, similarmente, $\xi' = u'/v'$, la transformación (10) puede escribirse en la forma

$$\frac{u'}{v'} = \frac{\beta(u/v) + \gamma}{\delta(u/v) + \epsilon} = \frac{\beta u + \gamma v}{\delta u + \epsilon v},$$

la cual se cumple si se satisfacen las ecuaciones $u' = \beta u + \gamma v$, $v' = \delta u + \epsilon v$, que en forma matricial equivalen a

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \delta & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Los números complejos u y v pueden considerarse como las componentes de cierto vector complejo ψ que bajo rotaciones se transforma de acuerdo con la Ec. (21); tales vectores complejos reciben el nombre de espinores. Escribiendo $\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ y análogamente $\psi' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$, la "ley de transformación" (21) puede abreviarse como

$$\psi' = Q\psi. \quad (22)$$

El que las matrices Q sean unitarias [Ec. (14)] implica que $\psi^\dagger\psi$ es invariante bajo rotaciones puesto que $(\psi')^\dagger\psi' = (Q\psi)^\dagger Q\psi = \psi^\dagger Q^\dagger Q\psi = \psi^\dagger\psi$.

De acuerdo con lo establecido hasta aquí, cada punto de la esfera S corresponde a un número complejo ζ o ξ y este último puede asociarse con un espinor ψ de dos componentes. Bajo rotaciones alrededor del origen, ξ se transforma mediante la función fraccional lineal (10), mientras que el espinor ψ lo hace mediante la transformación lineal (21). Los espinores, además de que pueden representar puntos del espacio, tienen otras aplicaciones; su uso más frecuente se halla en la descripción de partículas con espín 1/2. A partir de los espinores definidos arriba se forman espinores de rango superior con los que se construye un formalismo alternativo al análisis tensorial en tres dimensiones (véanse, por ejemplo, las Refs. [8,10]).

La matriz unitaria Q que representa una rotación arbitraria [Ec. (13)] tiene la peculiaridad de que al incrementar el ángulo de rotación por 2π radianes, en lugar de obtener nuevamente la matriz Q , se llega a $-Q$. Esto significa que al rotar un espinor 2π radianes alrededor de cualquier eje, el espinor cambia de signo y sólo después de una rotación por 4π radianes el espinor regresa a su expresión original; en cambio, como debe ser, las matrices Q y $-Q$ definen la misma rotación de los puntos del espacio (véanse, *e.g.*, las Ecs. (9) y (20)). (Una discusión acerca de la relación entre este comportamiento de los espinores y el principio de exclusión de Pauli puede hallarse en la Ref. [11].)

De las Ecs. (8) y (20) sigue que las componentes de un espinor ψ , correspondiente a un punto de la esfera, están dadas por

$$u = \lambda \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2}, \quad v = \lambda \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi/2}, \quad (23)$$

donde λ es un número complejo distinto de cero arbitrario. Con el propósito de representar puntos en el espacio que no necesariamente pertenezcan a S , es conveniente imponer sobre

el factor indeterminado λ la condición $|\lambda|^2 = r$, donde $r \equiv (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ es la coordenada radial usual. De esta manera el invariante $\psi^\dagger \psi = |u|^2 + |v|^2$ es igual a $|\lambda|^2 = r$, que es también invariante bajo rotaciones. Al igual que con el módulo de λ , a la fase de λ se le puede dar un significado geométrico por lo que, por el momento, se dejará sin especificar. Luego $\lambda = \sqrt{r} e^{-i\chi/2}$, donde χ es algún número real (el factor $-1/2$ se introduce por conveniencia), y de la Ec. (23) se tiene

$$\psi = \sqrt{r} e^{-i\chi/2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2} \\ \text{sen} \frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Escribiendo ψ' en forma análoga a la expresión (24) con χ', θ', ϕ' en lugar de χ, θ, ϕ y usando las Ecs. (13) y (22) se obtienen las coordenadas esféricas de cualquier punto después de efectuar una rotación alrededor de \hat{n} por un ángulo α . Alternativamente, la rotación puede darse en términos de las coordenadas cartesianas en la siguiente forma. A cada punto del espacio le corresponde un espinor (24), donde (r, θ, ϕ) son las coordenadas esféricas de dicho punto y χ es arbitrario; con este espinor se forma la matriz hermitiana 2×2 , con traza cero,

$$P \equiv 2\psi\psi^\dagger - (\psi^\dagger\psi)I, \tag{25}$$

(nótese que $\text{tr} \psi\psi^\dagger = \psi^\dagger\psi$). Usando las Ecs. (25), (22) y (14) se ve que la matriz P' correspondiente al punto que se obtiene después de hacer una rotación es

$$\begin{aligned} P' &= 2Q\psi(Q\psi)^\dagger - [(Q\psi)^\dagger Q\psi]I \\ &= 2Q\psi\psi^\dagger Q^\dagger - (\psi^\dagger Q^\dagger Q\psi)I \\ &= 2Q\psi\psi^\dagger Q^\dagger - (\psi^\dagger\psi)I \\ &= Q[2\psi\psi^\dagger - (\psi^\dagger\psi)I]Q^\dagger = QPQ^\dagger. \end{aligned} \tag{26}$$

Sustituyendo la forma explícita (24) en la Ec. (25) se halla que

$$P = \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \text{sen} \theta e^{-i\phi} \\ r \text{sen} \theta e^{i\phi} & -r \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}, \tag{27}$$

(nótese que χ no aparece en la matriz P). Escribiendo P' en forma análoga a la Ec. (27) con (x', y', z') en lugar de (x, y, z) y usando la Ec. (26) se pueden obtener las coordenadas cartesianas de un punto después de efectuar cualquier rotación (cf. Ref. [4]).

La relación entre (x', y', z') y (x, y, z) puede darse en una forma más explícita notando que la Ec. (27) equivale a

$$P = x_j \sigma_j, \tag{28}$$

donde $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$ por lo que $P' = x'_j \sigma_j$ y de la Ec. (26) se tiene

$$x'_j \sigma_j = Q(x_k \sigma_k) Q^\dagger = x_k Q \sigma_k Q^\dagger. \quad (29)$$

Usando las Ecs. (16) y (18), mediante un cálculo directo se halla que

$$Q \sigma_k Q^\dagger = \cos \alpha \sigma_k + (1 - \cos \alpha) n_k n_j \sigma_j - \operatorname{sen} \alpha \epsilon_{kmj} n_m \sigma_j, \quad (30)$$

lo cual puede escribirse como

$$Q \sigma_k Q^\dagger = a_{jk} \sigma_j \quad (31)$$

con

$$a_{jk} = \cos \alpha \delta_{jk} + (1 - \cos \alpha) n_j n_k - \operatorname{sen} \alpha \epsilon_{jkm} n_m. \quad (32)$$

Sustituyendo la Ec. (31) en la Ec. (29) se halla que $x'_j \sigma_j = x_k a_{jk} \sigma_j$, de donde sigue que

$$x'_j = a_{jk} x_k. \quad (33)$$

Así, $A \equiv (a_{jk})$ es una matriz 3×3 real que representa una rotación alrededor del eje \hat{n} por un ángulo α . La Ec. (33) da directamente la relación buscada entre (x', y', z') y (x, y, z) . Por un cálculo directo se comprueba que las Ecs. (33) y (32) constituyen la solución de la Ec. (4) (es decir, $dx'_j/d\alpha = \epsilon_{jkm} n_k x'_m$).

Los elementos de la matriz inversa de A deben obtenerse cambiando α por $-\alpha$ en la Ec. (32) y, como se ve fácilmente, el efecto de esta sustitución equivale a intercambiar los índices j y k , por lo que

$$A^{-1} = A^t, \quad (34)$$

donde el superíndice t denota transposición; esto significa que A es una matriz ortogonal. De la Ec. (32) se deduce también que

$$\operatorname{tr} A = 1 + 2 \cos \alpha, \quad (35)$$

y

$$a_{jk} \epsilon_{jkm} = -2 \operatorname{sen} \alpha n_m. \quad (36)$$

Dada una matriz ortogonal A (con determinante positivo), las Ecs. (35) y (36) permiten determinar el ángulo y el eje de la rotación representada por A , excepto si la rotación es por 0 o π radianes (cf. Ecs. (15) y (19)).

La Ec. (36) puede escribirse en una forma casi idéntica a la de la Ec. (19) definiendo las 3 matrices 3×3 , S_k , cuyos elementos están dados por $(S_k)_{lm} \equiv -i\epsilon_{klm}$. Explícitamente,

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las matrices S_k satisfacen las mismas relaciones de conmutación que las matrices $\frac{1}{2}\sigma_k$ (a saber, $[S_j, S_k] = i\epsilon_{jkm}S_m$) y, al igual que las matrices de Pauli, las matrices S_k son hermitianas y tienen traza cero. La Ec. (36) equivale entonces a

$$\text{tr } AS_k = -2i \text{ sen } \alpha n_k$$

(cf. Ec. (19)). Puede notarse que la Ec. (4) equivale a $dx_i/d\alpha = -i(n_k S_k)_{ij}x_j$.

De las Ecs. (18) y (28) sigue que $P\sigma_k = x_j\sigma_j\sigma_k = x_k I + i\epsilon_{jkm}x_j\sigma_m$, luego, $\text{tr } P\sigma_k = 2x_k$. Por otra parte, usando la Ec. (25) y la linealidad de la traza, $\text{tr } P\sigma_k = \text{tr}[2\psi\psi^\dagger\sigma_k - (\psi^\dagger\psi)\sigma_k] = 2 \text{tr } \psi\psi^\dagger\sigma_k = 2\psi^\dagger\sigma_k\psi$, por consiguiente

$$x_k = \psi^\dagger\sigma_k\psi, \tag{37}$$

(cf. Refs. [6,8]).

A partir del espinor (24) se puede construir un segundo vector, \mathbf{M} , con componentes [6-8]

$$M_j \equiv \psi^t \epsilon \sigma_j \psi, \tag{38}$$

donde

$$\epsilon \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Como consecuencia de la fórmula general

$$Q^{-1} = -\frac{1}{\det Q} \epsilon Q^t \epsilon,$$

válida para cualquier matriz 2×2 invertible y de que $\epsilon^2 = -I$, las matrices (13) satisfacen el que $Q^t \epsilon = \epsilon Q^{-1} = \epsilon Q^\dagger$. Por consiguiente, bajo una rotación las componentes de \mathbf{M} se transforman en

$$M'_j = (Q\psi)^t \epsilon \sigma_j Q\psi = \psi^t Q^t \epsilon \sigma_j Q\psi = \psi^t \epsilon Q^\dagger \sigma_j Q\psi,$$

y, puesto que Q es unitaria, $Q^\dagger \sigma_j Q = Q^{-1} \sigma_j (Q^{-1})^\dagger$, lo cual, de acuerdo con las Ecs. (31) y (34), es igual a $a_{jk} \sigma_k$. Por lo tanto,

$$M'_j = \psi^t \epsilon a_{jk} \sigma_k \psi = a_{jk} M_k, \tag{40}$$

como corresponde a cualquier vector (cf. Ec. (33)). Sustituyendo las Ecs. (17), (24) y (39) en la Ec. (38) se halla que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= r e^{-i\chi} [(\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) + i(-\sin \phi, \cos \phi, 0)] \\
 &= r e^{-i\chi} (\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi) \\
 &= r [(\cos \chi \hat{e}_\theta + \sin \chi \hat{e}_\phi) + i(-\sin \chi \hat{e}_\theta + \cos \chi \hat{e}_\phi)], \tag{41}
 \end{aligned}$$

donde \hat{e}_θ y \hat{e}_ϕ forman parte de la base ortonormal inducida por las coordenadas esféricas. De la expresión anterior se comprueba fácilmente que $\{\text{Re } \mathbf{M}, \text{Im } \mathbf{M}, \mathbf{r}\}$ es un conjunto ortogonal tal que $|\text{Re } \mathbf{M}| = |\text{Im } \mathbf{M}| = |\mathbf{r}| = r = \psi^\dagger \psi$.

En particular, si ψ es tal que $\psi^\dagger \psi = 1$ entonces $\{\text{Re } \mathbf{M}, \text{Im } \mathbf{M}, \mathbf{r}\}$ es una base ortonormal cuya orientación respecto a la base $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ está dada por los ángulos de Euler ϕ, θ, χ (en la "convención y", de acuerdo con la terminología empleada en la Ref. [4]), siendo ϕ, θ, χ las variables que aparecen en la Ec. (24). Para demostrar lo anterior puede notarse que si $Q_{\hat{n}}(\alpha)$ denota la matriz que representa una rotación por un ángulo α alrededor de \hat{n} [Ec. (13)], entonces la matriz $Q(\phi, \theta, \chi)$ que representa la rotación con ángulos de Euler ϕ, θ, χ equivale a $Q_{\hat{c}}(\chi)Q_{\hat{b}}(\theta)Q_{\hat{a}}(\phi)$, donde $\hat{a} = (0, 0, 1) = \hat{k}$, \hat{b} es la imagen de $\hat{j} = (0, 1, 0)$ bajo la rotación $Q_{\hat{a}}(\phi)$ y \hat{c} es la imagen de $(0, 0, 1)$ bajo la rotación $Q_{\hat{b}}(\theta)Q_{\hat{a}}(\phi)$. De la Ec. (29) sigue que $b_j \sigma_j = Q_{\hat{a}}(\phi) \sigma_2 [Q_{\hat{a}}(\phi)]^\dagger$, puesto que \hat{b} es la imagen del vector $(0, 1, 0)$ bajo la rotación representada por $Q_{\hat{a}}(\phi)$; luego, usando las Ecs. (16) y (14),

$$\begin{aligned}
 Q_{\hat{b}}(\theta) &= \cos \frac{\theta}{2} I - i \sin \frac{\theta}{2} Q_{\hat{a}}(\phi) \sigma_2 [Q_{\hat{a}}(\phi)]^\dagger \\
 &= Q_{\hat{a}}(\phi) \left(\cos \frac{\theta}{2} I - i \sin \frac{\theta}{2} \sigma_2 \right) [Q_{\hat{a}}(\phi)]^\dagger = Q_{\hat{a}}(\phi) Q_j(\theta) [Q_{\hat{a}}(\phi)]^\dagger,
 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$Q_{\hat{b}}(\theta) Q_{\hat{a}}(\phi) = Q_{\hat{a}}(\phi) Q_j(\theta) = Q_{\hat{k}}(\phi) Q_j(\theta).$$

Similarmente, $c_j \sigma_j = Q_{\hat{b}}(\theta) Q_{\hat{a}}(\phi) \sigma_3 [Q_{\hat{b}}(\theta) Q_{\hat{a}}(\phi)]^\dagger$, así que de la Ec. (16)

$$\begin{aligned}
 Q_{\hat{c}}(\chi) &= \cos \frac{\chi}{2} I - i \sin \frac{\chi}{2} Q_{\hat{b}}(\theta) Q_{\hat{a}}(\phi) \sigma_3 [Q_{\hat{b}}(\theta) Q_{\hat{a}}(\phi)]^\dagger \\
 &= Q_{\hat{b}}(\theta) Q_{\hat{a}}(\phi) \left(\cos \frac{\chi}{2} I - i \sin \frac{\chi}{2} \sigma_3 \right) [Q_{\hat{b}}(\theta) Q_{\hat{a}}(\phi)]^\dagger \\
 &= Q_{\hat{b}}(\theta) Q_{\hat{a}}(\phi) Q_{\hat{k}}(\chi) [Q_{\hat{b}}(\theta) Q_{\hat{a}}(\phi)]^\dagger.
 \end{aligned}$$

Por consiguiente, usando las relaciones anteriores y la Ec. (14), se obtiene

$$\begin{aligned}
 Q(\phi, \theta, \chi) &= Q_{\hat{c}}(\chi) Q_{\hat{b}}(\theta) Q_{\hat{a}}(\phi) = Q_{\hat{b}}(\theta) Q_{\hat{a}}(\phi) Q_{\hat{k}}(\chi) \\
 &= Q_{\hat{k}}(\phi) Q_j(\theta) Q_{\hat{k}}(\chi)
 \end{aligned}$$

o en forma explícita, usando la Ec. (13),

$$Q(\phi, \theta, \chi) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i(\phi+\chi)/2} & -\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} e^{-i(\phi-\chi)/2} \\ \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} e^{i(\phi-\chi)/2} & \cos \frac{\theta}{2} e^{i(\phi+\chi)/2} \end{pmatrix}. \quad (42)$$

De esta última expresión se ve que el espinor (24) está dado por

$$\psi = Q(\phi, \theta, \chi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Por otra parte, sustituyendo el espinor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en las Ecs. (37) y (38) se halla que $\{\operatorname{Re} \mathbf{M}, \operatorname{Im} \mathbf{M}, \mathbf{r}\} = \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$. Por lo tanto, de las Ecs. (33), (40) y (43) se concluye que, efectivamente, la base ortonormal $\{\operatorname{Re} \mathbf{M}, \operatorname{Im} \mathbf{M}, \mathbf{r}\}$ definida por ψ se obtiene de $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ por la rotación representada por $Q(\phi, \theta, \chi)$.

Para un espinor normalizado ψ , existe una única matriz unitaria Q con determinante igual a 1 que cumple la Ec. (43). De hecho, si $\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, con $|u|^2 + |v|^2 = 1$, la matriz $Q \in \text{SU}(2)$ que satisface la Ec. (43) es $\begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix}$. Por consiguiente, la Ec. (43) establece una relación uno a uno entre espinores normalizados y matrices de $\text{SU}(2)$, así que cada espinor normalizado representa una rotación (aunque esta relación es dos a uno ya que los espinores ψ y $-\psi$ representan una misma rotación).

4. RELACIÓN CON LOS CUATERNIONES

Un cuaternión puede ser definido como un número “hipercomplejo” de la forma $a + bi + cj + dk$, donde a, b, c y d son números reales y las unidades i, j, k satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1, \\ ij &= k = -ji, \\ jk &= i = -kj, \\ ki &= j = -ik. \end{aligned} \quad (44)$$

Al igual que el producto matricial, el producto de cuaterniones es asociativo, es distributivo sobre la suma y no es conmutativo. El cuaternión conjugado de $q = a + bi + cj + dk$ se define como $\bar{q} = a - bi - cj - dk$. Es fácil comprobar que, en virtud de las relaciones (18), las matrices $I, -i\sigma_1, -i\sigma_2, -i\sigma_3$ satisfacen las mismas reglas de multiplicación que $1, i, j, k$, por lo que un cuaternión arbitrario $a + bi + cj + dk$ puede representarse por la matriz $aI - ib\sigma_1 - ic\sigma_2 - id\sigma_3 = \begin{pmatrix} a-id & -c-ib \\ c-ib & a+id \end{pmatrix}$. De esta manera, la matriz Q dada en la Ec. (13) está asociada con el cuaternión

$$q = \cos \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} (n_1 i + n_2 j + n_3 k), \quad (45)$$

mientras que Q^\dagger está asociada con \bar{q} . La condición $QQ^\dagger = I$ [Ec. (14)] equivale a $q\bar{q} = 1$.

A cualquier punto (x, y, z) del espacio se le puede asociar el cuaternión puro o cuaternión vectorial

$$p \equiv xi + yj + zk$$

(cf. Ec. (28)). De los resultados de la Sec. 3 se deduce que

$$p' = qp\bar{q}$$

(cf. Ec. (26)), que resulta ser también un cuaternión puro, corresponde entonces a la imagen de (x, y, z) bajo la rotación representada por q (véanse también las Refs. [1,2,5]). (De hecho, los cuaterniones fueron introducidos por W.R. Hamilton en 1843 para describir rotaciones en tres dimensiones.)

5. CONCLUSIONES

El empleo de la proyección estereográfica de los números complejos lleva, en una forma natural, al establecimiento de múltiples conexiones entre estructuras aparentemente no relacionadas. El procedimiento seguido en la Sec. 2 muestra, en una forma directa, que cualquier rotación en tres dimensiones puede ser representada por una matriz 2×2 unitaria con determinante igual a 1, sin tener que recurrir a conocimientos de la teoría de grupos.

REFERENCIAS

1. R. Penrose and W. Rindler, *Spinors and space-time*, Vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge (1984).
2. R.P. Burn, *Groups: a path to geometry*, Cambridge University Press, Cambridge (1985).
3. D.H. Sattinger and O.L. Weaver, *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics*, Springer-Verlag, New York (1986).
4. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd Ed., Addison-Wesley, Reading, Mass. (1980), Cap. 4.
5. C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, San Francisco (1973), Cap. 41.
6. W.T. Payne, *Am. J. Phys.* **20** (1952) 253.
7. G.F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 123.
8. G.F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **36** (1990) 446.
9. K. Knopp, *Elements of the Theory of Functions*, Dover, New York (1952).
10. G.F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **38** (1992) 863.
11. R.P. Feynman and S. Weinberg, *Elementary Particles and the Laws of Physics*, Cambridge University Press, Cambridge (1987).