

## Teoría de superficies aleatorias en el enrejado

JOSÉ L. SORIA

*Centro de Graduados e Investigación del Instituto Tecnológico de Tijuana  
Apartado postal 1166, 22000 Tijuana, B.C., México*

*y  
Department of Chemistry 0340, University of California  
San Diego, La Jolla, CA 92093 USA \*\**

Recibido el 7 de diciembre de 1992; aceptado el 31 de agosto de 1993

**RESUMEN.** En este artículo veremos cómo las teorías de superficies aleatorias en el enrejado representan una generalización natural de las teorías de caminos aleatorios tratados en un artículo previo [2]. Aquí introduciremos algunos de los conceptos, resultados y problemas más relevantes que se han presentado recientemente en las teorías de superficies aleatorias en el enrejado desde un punto de vista riguroso.

**ABSTRACT.** In this paper we show how the random surfaces theories in the lattice represent a natural generalization of the random walk theories introduced in a previous paper [2]. Here, we introduce some of the most relevant concepts, results and problems that have been presented in the theories of random surfaces on the lattice from a rigorous point of view.

PACS: 64.10.+h

### INTRODUCCIÓN A MODELOS DE SUPERFICIES ALEATORIAS

Existen varios artículos introductorios excelentes al tema de superficies aleatorias (SA) [3,4,5] y una gran variedad de ellos con gran detalle en los diferentes tópicos de la teoría de SA [6,7,8,9,10]. Lo que presentaremos en este trabajo es una recopilación de conceptos introductorios, resultados y problemas que consideramos de mayor relevancia desde el punto de vista riguroso en la teoría de SA en el enrejado.

Los modelos de SA pueden considerarse como una generalización fiel de modelos de caminos aleatorios (CA). En la Ref. [2] vimos que el análisis de sistemas de espines es igual al análisis de teorías escalares de campo en el enrejado basadas sobre la representación de caminos aleatorios. La idea básica detrás del análisis fue considerar los sistemas de espín como un sistema perturbado de caminos aleatorios. Un hecho interesante es que este esquema es válido aun si consideramos los fenómenos críticos y sus límites de reescalamiento. Es decir, el límite de reescalamiento del sistema de espines puede ser considerado como un sistema perturbado de caminos aleatorios en el espacio continuo. Comparando

---

\*Apoyo parcial para la realización de este trabajo provino de CONACYT y COSNET, proyectos 1812-E9211 y 068-93-D respectivamente. Parte de este manuscrito fue extraído de las notas del curso-taller de Físico-Matemáticas presentado por el autor en el Centro de Graduados e Investigación del ITT en agosto de 1991 [1].

\*\*Correo electrónico: jsoria@chem.ucsd.edu.

esta situación con el análisis de superficies aleatorias, uno concluye que todavía no se sabe cuáles son los sistemas relevantes de superficies aleatorias no-perturbados. Por lo cual, para construir diagramas para los sistemas de superficies aleatorias en el enrejado, se necesitarían resolver los siguientes dos problemas: 1) definir un sistema geométrico estocástico para superficies aleatorias no-perturbadas; y 2) construir su límite continuo de escalamiento.

El estudio de SA puede conducirnos a la solución de una gran cantidad de problemas tanto en estado sólido como en teorías de campos cuánticos. Como ejemplos de estos tenemos:

- Las propiedades estadísticas de las interfaces y dominio de paredes separando diferentes fases de un sistema físico, las cuales aparecen en los sistemas de espines tridimensionales en la fase de bajas temperaturas.
- Construcción de medidas funcionales para las teorías de campos de cuerdas, aproximación discreta a las teorías de cuerdas: modelo de Nambu-Goto, modelo de Polyakov.
- El movimiento estocástico de patrones unidimensionales, tales como polímeros y los vórtices en los sistemas de espines  $XY$  y de sistemas dipolares.
- Representación de SA en las teorías de norma en el enrejado.
- Gravedad cuántica de dos dimensiones.

Una forma de definir un modelo de SA en el enrejado  $\mathbb{Z}^d$  es seleccionar una familia de ensembles contable  $\mathcal{E}$  de superficies aleatoria en  $\mathbb{Z}^d$ ; este conjunto aleatorio será el espacio de configuración del modelo.<sup>1</sup> Ejemplos de tales ensembles tenemos:

- i) Todas la SA que contribuyen a la representación de SA de una teoría de normas en el enrejado tal como modelos de  $\mathbb{Z}_2$ ,  $U(1)$  o  $SU(2)$  en el confinamiento de fase.
- ii) SA auto-repelentes (SAAR) (éstas aparecen en teorías de norma en el enrejado  $U(n) \times U(m)$  para valores fijos de  $m, n$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ ; en las teorías de norma en el enrejado  $\mathbb{Z}_2$ ).
- iii) SA de género 0 (es decir sin agarraderas) conexas, orientables. Estas son llamadas SA planas.

A continuación uno asigna para cada SA  $S \in \mathcal{E}$  un peso estadístico,  $\rho(S)$ . Uno de los ejemplos de peso estadístico más interesante inspirado por la acción de Nambu-Goto está definido por

$$\rho(S) = \begin{cases} e^{-\beta|S|}, & S \in \mathcal{E}, \\ 0, & S \notin \mathcal{E}, \end{cases} \quad (1.1)$$

<sup>1</sup>Una SA conexas es por definición un complejo de celda conexas bidimensional, de la cual cada  $p$ -celda ( $p = 0, 1, 2$ ) corresponde a una copia de una  $p$ -celda elemental en  $\mathbb{Z}^d$ . Las 0-celdas en  $\mathbb{Z}^d$  son sitios de  $\mathbb{Z}^d$ , las 1-celdas son lazos y las 2-celdas son copias de un lazo en  $\mathbb{Z}^d$ .

donde  $|S|$  indica el número de plaquetas<sup>2</sup> que forman la superficie  $S$  y  $\mathcal{E}$  es algún ensemble de superficie que contribuye al modelo.

Las cantidades básicas en tales modelos son, entre otras:

$$(i) \quad n_{\mathcal{L}}(A) = \#\{S \in \mathcal{E} : |S| = A, \partial S = \mathcal{E}\},$$

donde  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \dots \cup \mathcal{L}_n$  es una unión de lazos de enrejados. Para los ensembles definidos anteriormente se tiene

$$n_{\mathcal{L}}(A) = \exp[\beta_0 A + o(A)],$$

para alguna constante positiva finita  $\beta_0$  independiente de  $\mathcal{L}$ . Cuando  $\mathcal{L} = \partial p$ , los resultados numéricos sugieren que

$$n_{\partial p}(A) \sim A^\epsilon e^{\beta_0 A}, \tag{1.2}$$

con  $\epsilon \simeq -1.5$ , dentro de un 12%, para  $d = 3$ . Además, (1.2) se da con  $\epsilon = -1.5$  en la teoría del campo medio (para  $d$  grande) [7,10].

(ii) Sea  $B_R$  una bola<sup>3</sup> de radio  $R$  en  $\mathbb{Z}^d$  centrada en alguna plaqueta  $p_0$ . Llamando  $S_R \equiv S \cap B_R$ ,  $S \in \mathcal{E}$ , definimos la dimensión de Hausdorff,  $\delta_H$ , de una SA infinitamente extendida como

$$\delta_H = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{n_{\partial p_0}(A)} \sum_{\substack{S \in \mathcal{E} \\ \partial S = \partial p_0 \\ |S| = A}} \left( \frac{\log |S_R|}{\log R} \right). \tag{1.3}$$

Hay una segunda noción de dimensión de Hausdorff,  $\delta(\beta)$ , para ser distinguida de  $\delta_H$ . Es decir, sea  $S_0(\mathcal{L}_{L \times T})$  la clase de todas las SA en  $\mathcal{E}$  con la propiedad de que  $\partial S = \mathcal{L}_{L \times T}$  = un rectángulo en un plano coordenado, centrado en el cero, con lados de longitud  $L$  y  $T$  y  $0 \in p_0 \in S$ . Sea

$$Z_\beta(L, T) = \sum_{S \in S_0(\mathcal{L}_{L \times T})} Z_\beta(S).$$

Definimos

$$\delta(\beta) = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{L, T \rightarrow \infty} Z_\beta(L, T)^{-1} \sum_{S \in S_0(\mathcal{L}_{L \times T})} \left( \frac{\log |S_R|}{\log R} \right). \tag{1.4}$$

<sup>2</sup>Una plaqueta es un conjunto orientado  $p = (b_1, b_2, b_3, b_4)$  de cuatro ligamentos, donde  $b_1, \dots, b_4$  forman un lazo cerrado.

<sup>3</sup>Lo más correcto sería llamarla hiperesfera, sin embargo por simplicidad le llamaremos bola en  $\mathbb{Z}^d$ .

Las funciones de Green de los modelos de SA son generalizaciones de las funciones de Green de los modelos de CA en la cual los puntos son reemplazados por lazos. Las funciones de Green de  $n$ -lazos (o correlación de  $n$ -lazos) se definen como

$$G(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n) = \sum_{\substack{S \in \mathcal{E} \\ S \text{ conexo} \\ \partial S = \mathcal{L}_1 \cup \dots \cup \mathcal{L}_n}} \rho(S), \tag{1.5}$$

donde  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n$  son lazos en el enrejado;  $\partial S$  denota la frontera de  $S$ . Todas las propiedades relevantes del modelo son expresadas en términos de esas funciones de Green. Por ejemplo, si  $L \times T$  es un lazo rectangular con lados de longitud  $L$  y  $T$ , el potencial de la cuerda  $V(L)$  está definido por

$$V(L) = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{T} \log G(L \times T), \tag{1.6}$$

y la tensión de cuerda  $\alpha$  por

$$\alpha = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} V(L). \tag{1.7}$$

El inverso de la longitud de correlación está definido por

$$m = \lim_{a \rightarrow \infty} -\frac{1}{a} \log G(\partial p, \partial p_a), \tag{1.8}$$

donde  $p$  es una plaqueta y  $\partial p_a$  es una copia de  $\partial p$  trasladado por  $a$  unidades en el enrejado. La susceptibilidad está definida por

$$\chi = \sum_{p'} G(\partial p, \partial p'). \tag{1.9}$$

Otras nociones son introducidas por analogía a los modelos de CA. Decimos que  $\beta_c$  es un punto crítico si

$$m(\beta) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \beta \rightarrow \beta_c.$$

En este caso, podemos introducir exponentes críticos  $\nu, \gamma_s, \eta, \mu, \dots$  como sigue:

$$m(\beta) \approx (\beta - \beta_c)^\nu, \tag{1.10a}$$

$$\chi(\beta) \approx (\beta - \beta_c)^{-\gamma_s}, \tag{1.10b}$$

$$G_\beta(\partial p, \partial p_a) \approx a^{-(d-2+\eta)}, \text{ para } 1 \ll a \ll m(\beta)^{-1}, \tag{1.10c}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \approx (\beta - \beta_c)^{\mu-1}, \quad \text{etc.} \tag{1.10d}$$

Para definir rigurosamente objetos con las propiedades esperadas de las funciones formales de Green, se considera el límite continuo de los modelos de SA, definidos por reescalamiento de las funciones de Green en una manera similar a la tratada previamente en los modelos para espines.

## 2. MODELOS DE SA LIBRES

Haciendo referencia a los sistemas de CA, los cuales fueron definidos en la Ref. [2] vía la función de dos puntos

$$G(\beta; x, y) = \sum_{\omega: x \rightarrow y} e^{-\beta|\omega|}, \quad \beta \lesssim \ln 2d, \tag{2.1}$$

donde los CA  $\omega: (\omega_0, \dots, \omega_n)$  forman una colección de los sitios del enrejado que satisfacen  $\omega_0 = x, \omega_n = y$ , y  $|\omega_i - \omega_{i+1}| = 1; |\omega| = n$  denota el número de enlaces en el camino, y la suma corre sobre todos los posibles CA.

De (2.1) es natural definir nuestro sistema de SA libre (SAL), por el valor esperado para una colección de lazos  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \dots \cup \mathcal{L}_n$ :

$$G^{\text{SAL}}(\beta; \mathcal{L}) = \sum_{\partial S = \mathcal{L}} e^{-\beta|S|}. \tag{2.2}$$

Es fácil ver que (2.2) es divergente para todos los valores de  $\beta$ , así que el sistema por sí mismo no tiene sentido. Este hecho se puede mostrar investigando la entropía (o número) de SA en  $\mathcal{E}$ . Un bosquejo de la prueba es la siguiente:

Primero consideraremos los caminos aleatorios. Definiendo una cantidad

$$N^{xy}(l) = \#\{\omega: x \rightarrow y \mid |\omega| = l\},$$

donde un camino aleatorio viaja de un sitio a su vecino más próximo, fácilmente obtenemos la siguiente cota superior para  $N^{xy}(l)$ :

$$N^{xy}(l) \leq (2d)^l.$$

Sustituyendo en (2.1), observamos que

$$G(\beta; x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} N^{xy}(l)e^{-\beta l} \leq \sum_{l=0}^{\infty} (2de^{-\beta})^l.$$

El lado derecho es de hecho finito para  $b < \ln 2d$ . A continuación uno define la cantidad correspondiente  $N^{\mathcal{L}}(A)$  para las superficies aleatorias por

$$N^{\mathcal{L}}(A) = \#\{S \in \mathcal{E} \mid \partial S = \mathcal{L}, |S| = A\},$$

donde  $\mathcal{L}$  es una colección de lazos y  $A$  es un entero positivo. Posteriormente se utiliza una cota inferior (véase la Ref. [11] para una prueba de ella) para  $N^{\mathcal{L}}(A)$ :

$$N^{\mathcal{L}}(A) \geq |\mathcal{L}|(A - |\mathcal{L}| + 1)!, \quad \text{si } A - |\mathcal{L}| > 0 \text{ es par,}$$

donde  $|\mathcal{L}|$  es el área de la superficie conexa mínima que genera  $\mathcal{L}$ . Así, para valores grandes de  $A$ , el número de crecimiento del número de caminos aleatorios es  $A!$ . Esto en gran contraste con el crecimiento del número de caminos aleatorios de la forma  $(\text{const.})^l$ . Sustituyendo la cota inferior anterior en (2.2), observamos que

$$\begin{aligned} G^{\text{SAL}}(\beta; \mathcal{L}) &= \sum_{A=0}^{\infty} N^{\mathcal{L}}(A)e^{-\beta A} \geq \sum_{k=0}^{\infty} N^{\mathcal{L}}(|\mathcal{L}| + 2k + 2)e^{-\beta(|\mathcal{L}|+2k+2)} \\ &\geq \frac{|\mathcal{L}|}{2} e^{-\beta|\mathcal{L}|-2\beta} \sum_{k=0}^{\infty} (2k)!e^{-2\beta k}, \end{aligned}$$

donde la sumatoria  $\sum_{k=0}^{\infty} (2k)!e^{-2\beta k}$  es siempre divergente.

En consecuencia, construir sistemas de SAL de  $\mathcal{E}$  es imposible. Sin embargo, desde el punto de vista de la física de cuerdas cuantizadas, el sistema (2.2) se interpreta como una teoría de cuerdas interactuantes en vez de una teoría libre. Esto es esencialmente debido a que las superficies  $S \in \mathcal{E}$  poseen una topología compleja (por ejemplo, con agarraderas), las cuales pueden ser consideradas como una consecuencia de las pegaduras y rompimientos de las cuerdas.

### 3. TEORÍAS DE CAMPO MEDIO PARA MODELOS DE SA

Una de las ideas básicas de la teoría del campo medio de modelos de SA es la de que para dimensiones grandes, la mayor parte de la entropía reside en superficies que son de *tipo árbol* [5]. Por lo tanto, para construir una teoría de campo medio se considera el ensemble  $\mathcal{E}$  de superficies formado por la pegadura de elementos cilíndricos, los cuales consisten de dos plaquetas pegadas y sobrepuestas a lo largo de algunas de las esquinas opuestas, es decir, pegadas a lo largo de las tres esquinas cuando forman el extremo de una rama, a lo largo de dos esquinas cuando forman un segmento intermedio de la rama y a lo largo de una o ninguna esquina cuando forman una conexión en forma de T entre las ramas.

Considérese  $n$  lazos  $b_1, \dots, b_n$  en  $\mathbb{Z}^d$  vistos como lazos degenerados; esto es, cada  $b_i$  consiste de dos copias de un lazo pegadas en sus puntos extremos. Los  $b_i$ 's son los dobles lazos. Sea  $G_\beta(b_1, \dots, b_n)$  la función  $n$ -ésima de Green definida en (1.5). Cuando  $d \rightarrow \infty$ ,

$$G(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n) = \sum_{S \in \mathbb{T}_{\mathcal{E}}(b_1, \dots, b_n)} \mathcal{Z}_\beta(S), \tag{3.1}$$

donde  $\mathbb{T}_{\mathcal{E}}(b_1, \dots, b_n)$  es la clase de todas las superficies  $S$  en un ensemble  $\mathcal{E}$  que son tipo árbol, y para los cuales  $\partial S = b_1 \cup \dots \cup b_n$ . Ahora, si  $G$  es una gráfica, sea  $V(G)$  el conjunto

de todos los vértices de  $G$  y  $L(G)$  el conjunto de líneas de  $G$ . Vemos a los dobles enlaces,  $b$ , como vértices de una gráfica  $G$  y pares de dobles enlaces,  $(b, b')$ , como líneas de  $G$ . Es fácil derivar de (3.1) que

$$G(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n) = \sum_{\substack{G: \text{Ges una gráfica de árbol} \\ \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq V(G)}} \prod_{(bb') \in L(G)} G_\beta(b, b'), \quad (3.2)$$

es decir,  $G_\beta(b_1, \dots, b_n)$  está dado como una suma de diagramas de árboles con propagadores dados por  $G_\beta(b, b')$ . Si las superficies  $S$  que contribuyen en (3.1) son todas conexas, entonces todas las gráficas de árboles que contribuyen en (3.2) son conexas. Si  $S \in \mathbb{T}_\varepsilon(b, b')$ , entonces  $S$  puede ser descrito como una unión de un camino único,  $\omega$ , hecho de elementos cilíndricos descritos anteriormente, empezando en  $b$  y finalizando en  $b'$ , y de árboles basados en lazos o plaquetas en  $\omega$ . Para  $d$  grande, esos árboles no tienen intersección mutua ni auto-intersección con  $\omega$ . Cuando queramos calcular

$$G(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n) = \sum_{S \in \mathbb{T}_\varepsilon(b, b')} \mathcal{Z}_\beta(S),$$

podemos primero sumar sobre todos los árboles establecidos en  $\omega$  y, subsecuentemente, sumar sobre todos los caminos  $\omega$  que unen  $b$  y  $b'$ . Para  $\mathcal{Z}_\beta(S) = e^{-\beta|S|}$ , la suma de todos los árboles sobre  $\omega$  da origen al peso del camino

$$\mathcal{Z}_\beta(\omega) = e^{-\beta'|\omega|}, \quad (3.3)$$

donde  $\beta' = \beta'(b) < \beta$  es alguna función calculable de  $\beta$  y  $|\omega|$  es el número de brincos elementales de  $\omega$ . En el modelo de SA plano,

$$\beta' = \beta - 2 \log(1 + G_\beta(b)), \quad (3.4)$$

así que

$$G_\beta(b, b') = \sum_{\omega: b \rightarrow b'} e^{-\beta'|\omega|} = (-\Delta + m^2(\beta))_{b, b'}^{-1}, \quad (3.5)$$

donde  $\Delta$  es el laplaciano de diferencias finitas, y  $m^2(\beta)$  es la solución de la ecuación

$$(2d + m^2)^{-1} = e^{-\beta'}.$$

De (3.5) se concluye que el exponente  $\eta$  de  $G_\beta(b, b')$ , tiene el valor de  $\eta = 0$ .

El exponente  $\gamma$  de la susceptibilidad  $\chi(\beta)$ , se puede calcular suponiendo que  $\mathcal{Z}_\beta(\omega) = e^{-\beta|\omega|}$ :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial G_\beta(b)}{\partial \beta} &\approx \chi(\beta) \approx \sum_{b' \subseteq \mathbb{Z}^d} G_\beta(b, b') \\ &\underset{d \text{ grande}}{\approx} \sum_{S \in \mathbb{T}_\varepsilon(b, b')} e^{-\beta|S|}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Calculando  $\partial_\chi(\beta)/\partial\beta$  uno encuentra

$$\frac{\partial_\chi(\beta)}{\partial\beta} \approx -\chi(\beta)^3.$$

Integrando en  $\beta$  resulta

$$\chi(\beta) \approx (\beta - \beta_0)^{-1/2}, \quad \text{i.e.,} \quad \gamma = 1/2,$$

y esto produce

$$G_{\beta_0}(b) - G_\beta(b) \approx (\beta - \beta_0)^{1/2}.$$

Esto con (3.4) nos da

$$m(\beta) \approx (\beta - \beta_0)^{1/4}, \quad \text{i.e.,} \quad \nu = 1/4.$$

De  $\nu = D_H^{-1}$ , obtenemos  $D_H = 4$ .

Como último punto, calcularemos la tensión de la cuerda,  $\alpha(\beta)$ , cerca de  $\beta_0$ . Para esto consideremos el modelo SA plano con  $\mathcal{Z}_\beta(\omega) = e^{-\beta|\omega|}$ . De la definición

$$\begin{aligned} \alpha(\beta) &= \lim_{L \rightarrow \infty} -\frac{1}{L^2} \log G_\beta(L \times L) \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} -\frac{1}{L^2} \log \sum_{\substack{S \in \mathcal{E} \\ \partial S = L \times L}} e^{-\beta|S|}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Definimos la superficie de esqueleto  $R$ , con  $\partial R = L \times L$ , como una superficie  $S \in \mathcal{E}$ , con  $\partial S = L \times L$ , que no decae en dos piezas por un corte a lo largo de cualquier doble enlace. Entonces

$$\alpha(\beta) = \lim_{L \rightarrow \infty} -\frac{1}{L^2} \log \left\{ (1 + G_\beta(b))^{2L} \sum_{\substack{\text{esqueleto, } R \\ \partial R = L \times L}} e^{-\beta|R|} \right\}, \tag{3.8}$$

donde  $\beta'$  está dada por (3.4). Así que  $\alpha(\beta) = \alpha^S(\beta')$ , donde  $\alpha^S$  es la tensión de cuerda de la teoría de esqueleto. Para  $d$ ,  $\alpha^S(\beta') \approx \beta'$  grande, y  $\beta'$  permaneciendo positivo, cuando  $\beta \searrow \beta_0$ . De aquí

$$\alpha(\beta) \searrow \alpha^* > 0, \quad \text{cuando} \quad \beta \searrow \beta_0,$$

con  $\alpha^* = \alpha^S(\beta'(\beta))$ . Sin embargo, de (3.4) y (3.6)

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}(\beta) \approx (\beta - \beta_0)^{-\gamma}, \quad \text{i.e.,} \quad \mu = 1 - \gamma = \frac{1}{2} = 2\nu.$$

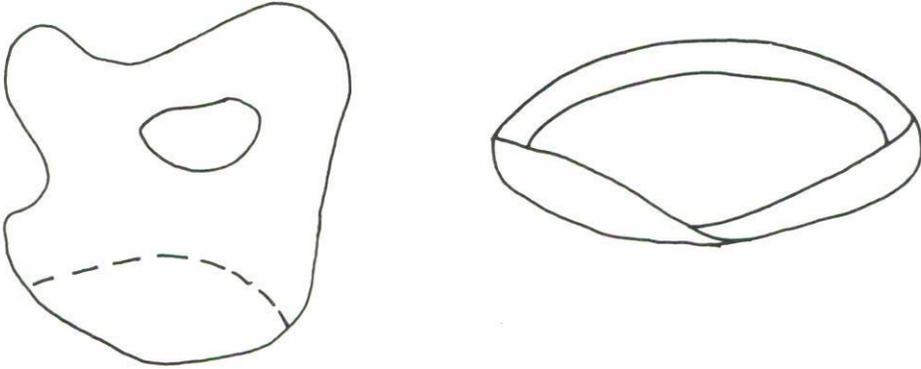


FIGURA 1. Ejemplos de superficies aleatorias planas.

4. MODELOS DE SA PLANOS

El hecho básico de que las trayectorias de cuerdas en el espacio-tiempo son superficies implica que su estudio debe tratarse como una teoría de superficies. Además, para un tiempo imaginario, los pesos estadísticos de esas superficies son positivos y proporcionales a  $e^{\beta \text{Area}}$ . Durhuus, *et al.* [6,7] estudiaron en gran detalle el comportamiento crítico y el límite continuo de los modelos de SA planos (SAP) y encontraron que el límite continuo de los modelos de SAP no describe un sistema de SA continuas (SAC), sino que describe un sistema libre de ramas de polímeros, cuando el sistema se aproxima a su punto crítico.

Ellos seleccionaron un ensemble en el enrejado de SA de la clase  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{SAP}}$  de todos los complejos conexos,  $S$ , construidos pegando los pares de plaquetas adyacentes de  $\mathbb{Z}^d$  a lo largo de sus ejes comunes, los cuales son orientables y tienen la topología de la 2-esfera con un número arbitrario  $n$  de pequeños discos removidos. Las fronteras de esos discos corresponden a una componente conexa de la frontera,  $\partial S$ , de un complejo  $S \in \mathcal{E}_{\text{SAP}}$ . Fijando  $\partial S$  para que consista de una unión de lazos  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n$  de  $\mathbb{Z}^d$ . Como peso estadístico de una superficie  $S$  se toma

$$Z_{\beta}(S) = e^{-\beta|S|}.$$

Un concepto que necesitaremos para establecer un resultado de gran importancia es el siguiente:

DEFINICIÓN. Decimos que un modelo SAP posee la propiedad de autosimilitud débil si

$$\chi(\beta) \equiv \chi^{(0)}(\beta) \nearrow \infty, \quad \text{cuando } \beta \searrow \beta_0,$$

entonces

$$\chi^{(2j)}(\beta) \nearrow \infty, \quad \text{cuando } \beta \searrow \beta_{2j}, \quad \text{para todo } j > 0.$$

El resultado de mayor importancia de esta sección se resume en el siguiente teorema:

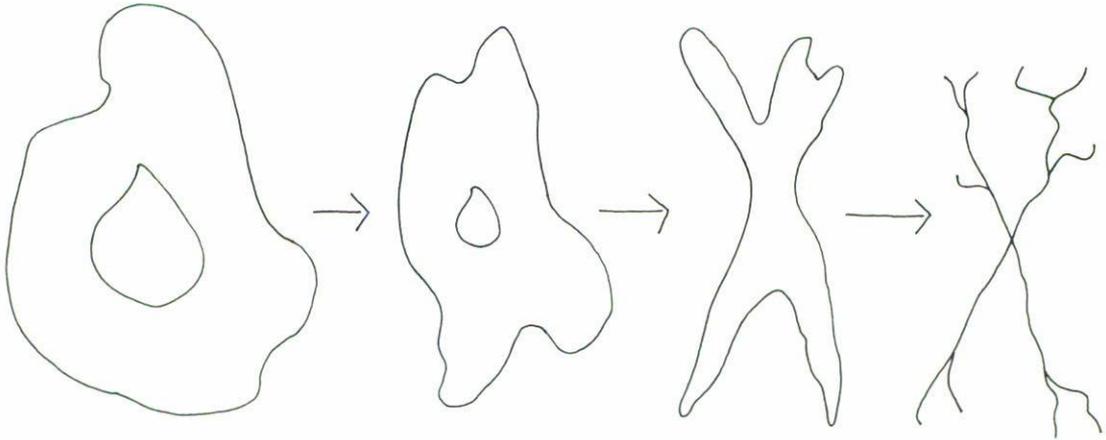


FIGURA 2. Colapso de SAP en estructuras tipo ramas de polímeros.

TEOREMA [7]. Suponga que  $\chi(\beta) \nearrow \infty$  cuando  $\beta \searrow \beta_0$ , y suponga que el modelo SAP tiene propiedad de autosimilitud débil, entonces la teoría de campo medio nos da una descripción exacta de la aproximación al punto crítico  $\beta \searrow \beta_0$ . En particular, los exponentes críticos tienen los valores

$$\gamma = \mu = \frac{1}{2}; \quad \nu = D_H^{-1} = \frac{1}{4}; \quad G_\beta(b, b') \approx \text{dist}(b, b')^{-(d-2)}, \quad (4.1)$$

si

$$0 \ll \text{dist}(b, b') \ll m(\beta)^{-1}, \quad \text{i.e.,} \quad \eta = 0. \quad (4.2)$$

Además,

$$\alpha(\beta) \searrow \alpha^* > 0, \quad \text{cuando} \quad \beta \searrow \beta_0. \quad (4.3)$$

*Observación:* Este teorema señala que en el límite continuo las superficies de modelo SAP decaen a estructuras tipo-árbol, y de aquí que todas sus propiedades críticas son idénticas a las propiedades críticas de polímeros de ramas no interactuantes.

5. MODELOS DE SA ALEATORIAMENTE TRIANGULADAS

Como se ha visto en la sección anterior, los modelos de SAP tienden a dar los resultados de campo medio en el límite continuo. Aquí veremos otra familia de modelos introducida para regularizar una teoría basada sobre la acción de Polyakov, es decir para darle sentido a las funciones de Green de cuerdas [8]. Estos modelos están basados en sumas sobre triangulaciones, las cuales representan a grosso modo los grados de libertad gravitacionales del modelo de Polyakov.

Se selecciona una superficie orientable  $R_H$  de género  $H$ , y  $n$  pequeños discos cuyas fronteras se denotan por  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ . La superficie resultante es  $R_H^{(n)}$ . Entonces consideramos triangulaciones de  $R_H^{(n)}$ , es decir, simpliciales complejos bidimensionales; en particular esto significa que

$$\#(\text{triángulos}) - \#(\text{esquinas}) + \#(\text{vértices}) = 2 - 2H - n,$$

que se conoce como la fórmula de Euler. Además se requiere que las triangulaciones sean libres de lazos, es decir, que no debe haber esquinas que puedan coincidir en sus puntos finales y que dos triángulos no puedan tener más de un lado en común. Dada una triangulación,  $\mathcal{T}$ , denotamos  $\mathcal{F}(\mathcal{T})$  al conjunto de caras (triángulos) de  $\mathcal{T}$ , por  $\mathcal{E}(\mathcal{T})$  al conjunto de esquinas por  $\mathcal{V}(\mathcal{T})$  y al conjunto de vértices por  $\mathcal{T}$ . Para cada triangulación  $\mathcal{T}$  sobre  $R_H^{(n)}$ , consideramos mapeos  $X$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{T})$  en el espacio euclidiano  $E^d$ . Dos puntos imágenes  $X_i, X_j$  en  $E^d$  son considerados a ser unidos por una esquina si  $i$  y  $j$  son dos triángulos adyacentes de  $\mathcal{T}$ . Los puntos  $\{X_j: j \in \mathcal{F}(\mathcal{T})\}$  son, por lo tanto, identificados con los centros de los triángulos de una superficie puntualmente triangulada lineal  $S = S(X; \mathcal{T})$  inmersa en  $E^d$ . Se supone que todos los triángulos  $j$  adyacentes a una componente  $\gamma_i$  de la frontera de  $R_H^{(n)}$  están mapeados a puntos  $X_j \in E^d$ , los cuales pertenecen a algún lazo fijo  $\mathcal{L}_i$  en  $E^d$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Esta condición se expresa como

$$\text{bd}_{\mathcal{T}}(S(X; \mathcal{T})) \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{L}_i. \tag{5.1}$$

Para que la construcción permanezca invariante bajo parametrizaciones, necesitamos que dos triangulaciones de  $R_H^{(n)}$  sean consideradas equivalentes si determinan la misma estructura combinatoria. En consecuencia, se consideran isomorfismos de clases de triangulaciones; equivalentemente, se pesa cada triangulación  $\mathcal{T}$  con un factor  $C(\mathcal{T})$ , donde

$$C(\mathcal{T}) = \#\{\text{triangulaciones isomórficas a } \mathcal{T}\}$$

es del orden del grupo de simetrías de la triangulación de  $\mathcal{T}$ . Dada una acción  $\mathcal{A}(S)$  de una superficie  $S$ , definimos las funciones de Green

$$G_H(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n) = \sum_{\substack{\mathcal{T} \\ H(\mathcal{T})=H}} \frac{W(\mathcal{T})}{C(\mathcal{T})} \int_{\text{bd}_{\mathcal{T}}(S) \subset \mathcal{L}_1 \cup \dots \cup \mathcal{L}_n} e^{-\mathcal{A}(S(X; \mathcal{T}))} \prod_{j \in \mathcal{F}(\mathcal{T})} d^d X_j, \tag{5.2}$$

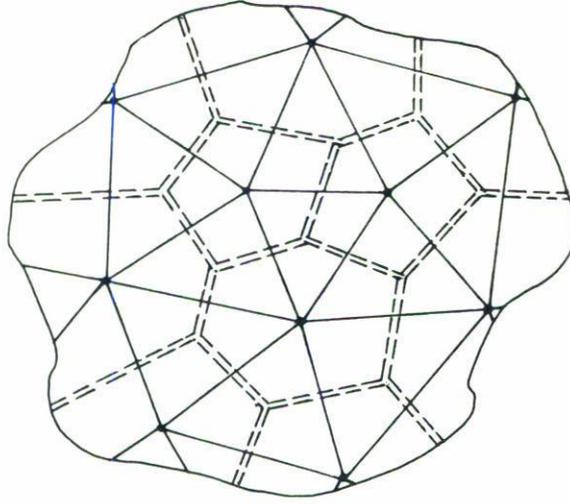


FIGURA 3. Triangulación con su gráfica dual correspondiente.

donde la suma corre sobre todas las triangulaciones de  $R_H^{(n)}$ .

*Observación:* Esta expresión trata de ser una regularización de la función de Green de cuerdas con la suma sobre triangulaciones correspondiendo a la integración sobre métricas.

La más importante selección de la acción  $\mathcal{A}(S)$  es la discretización de la acción de Polyakov, es decir,

$$\mathcal{A}_P^0(S(X; T)) = \frac{\beta}{2} \sum_{(i,j) \in E(T)} |X_i - X_j|^2, \tag{5.3}$$

donde la suma corre sobre todos los pares  $(i, j)$  de triángulos adyacentes. Otros modelos estudiados son los modelos de Potts sobre un enrejado aleatorio. En esos modelos los campos  $X_i$  se reemplazan por espines  $\sigma_i = 1, \dots, q$ , y la acción por el hamiltoniano usual de Potts:

$$\mathcal{A}_{\text{Potts}}(S(\sigma; T)) = \frac{\beta}{2} \sum_{(i,j) \in E(T)} (1 - \delta_{\sigma_i, \sigma_j}) + h \sum_i (1 - \delta_{1, \sigma_i}). \tag{5.4}$$

Aquí, como anteriormente, los espines se localizan en los centros de los triángulos. Sólo discutiremos la discretización de la acción de Polyakov. Con la acción (5.3) la integración sobre  $X$  en (5.2) puede hacerse explícitamente, ya que está dada por una integral gaussiana. De hecho la acción (5.3) puede escribirse como

$$\mathcal{A}_P^0(S(X; T)) = \beta \sum_{i,j \in F(T)} X_i D_{ij}(T) X_j, \tag{5.5}$$

con

$$D_{ij}(\mathcal{T}) = \begin{cases} -1, & \text{si } (i, j)^* \in E(\mathcal{T}); \\ N_i, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{de cualquier otra forma,} \end{cases} \quad (5.6)$$

donde  $N_i$  representa el número de triángulos adyacentes al  $i$ -ésimo triángulo. La acción (5.5) tiene un modo cero debido a invariancias traslacionales. Para las funciones de Green este modo se remueve por las condiciones de frontera. Sin embargo, para la función de partición este modo debe eliminarse a mano para evitar divergencias en la integral. Esto se logra, por ejemplo, fijando la posición de uno de los triángulos, digamos  $X_0 = 0$ . La función de partición resultante es

$$\begin{aligned} E_H &= \sum_{\mathcal{T}:H(\mathcal{T})=H} \frac{W(\mathcal{T})}{C(\mathcal{T})} \int e^{-A_p^0(S(X;\mathcal{T}))} \delta(X_0) \prod_{\substack{j \in F(\mathcal{T}) \\ j \neq 0}} d^d X_j, \\ &= \sum_{\mathcal{T}:H(\mathcal{T})=H} \frac{W(\mathcal{T})}{C(\mathcal{T})} \left[ \frac{\pi^{|F(\mathcal{T})|-1}}{\beta^{|F(\mathcal{T})|} \det \tilde{D}(\mathcal{T})} \right]^{d/2}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde  $\tilde{D}$  es la matriz obtenida de  $D$  por la eliminación de renglones y columnas correspondiendo a  $i = 0$ . Vemos que la dimensión especial  $d$  aparece aquí como un parámetro, por lo que puede continuarse a valores no enteros. El caso  $d = 0$  corresponde a gravedad pura, es decir a la teoría sin los campos de materia  $X$ . Por otra parte, cuando  $d \rightarrow \infty$  las triangulaciones dominantes son las que minimizan el  $\det \tilde{D}$ , mientras que para  $d \rightarrow -\infty$  solamente sobreviven las triangulaciones que maximizan el  $\det \tilde{D}$ . En particular, para la acción (5.3) con pesos

$$W(\mathcal{T}) \approx \exp(-\mu|F(\mathcal{T})|), \quad (5.8)$$

puede mostrarse que existe una  $\beta_c$ , tal que  $G(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n)$  es finita para  $\beta > \beta_c$  e infinita para  $\beta < \beta_c$ , para toda  $n$  y todos los lazos  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n$ , aun cuando los lazos degeneren en un punto simple [8]. Se sabe que el punto crítico  $\beta_c$  es independiente del género  $H$ .

Las observables de principal interés son el intervalo de masa y la susceptibilidad. El intervalo de masa (*mass gap*) está definido a través del decaimiento exponencial de las funciones de correlación de dos lazos  $G(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ , en la distancia entre los lazos. Puede comprobarse que para los pesos (5.3), este decaimiento es independiente de la forma de los lazos, así que los lazos  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  pueden contraerse a un punto simple  $x_1, x_2$ ; en tal situación la correlación se denota por  $G(x_1, x_2)$ . De aquí que la masa esté definida como

$$m = - \lim_{|x_1 - x_2| \rightarrow \infty} \log \frac{G(x_1, x_2)}{|x_1 - x_2|}. \quad (5.9)$$

La susceptibilidad es entonces  $\chi = \int dx G(x_0, x)$  y, con los pesos (5.8), no es difícil ver que

$$\chi \approx -\frac{1}{E_H} \frac{dE_H}{d\mu} = \langle |F(\mathcal{T})| \rangle. \tag{5.10}$$

Para las aplicaciones en gravedad cuántica o teoría de cuerdas, uno se interesa en un límite continuo en donde las triangulaciones más finas convergen a la variedad triangulada  $R_H^{(n)}$ . En particular, el número de triángulos  $|F(\mathcal{T})|$  debe tender a infinito y además el promedio  $\langle |F(\mathcal{T})| \rangle$  debe diverger. Por la fórmula anterior, esto significa que en el límite continuo uno debe alcanzar un modelo crítico, que está en  $\beta \rightarrow \beta_c$  y además  $\chi$  debe diverger cuando  $\beta \rightarrow \beta_c$ , lo cual requiere  $\gamma_{str} \geq 0$ .

### 6. MODELOS ALEATORIOS MATRICIALES

El modelo de Polyakov descrito en la sección anterior se puede poner en correspondencia con una teoría de campos de matrices [5]. Esta correspondencia es un tanto análoga a la correspondencia de modelos de CA y teorías de campo vectoriales, pero con la diferencia de que la teoría de modelos de CA se da esencialmente de las expansiones de altas temperaturas de la teoría de campos vectoriales, la cual es una expansión convergente en el enrejado, mientras que la teoría de modelos de SA se origina de las expansiones de la constante de acoplamiento de la teoría de campos matriciales, la cual es divergente.

Consideremos campos de matrices  $\{\varphi(x)\}$ , donde  $x$  corre sobre alguna variedad  $d$ -dimensional  $M$ , y cada  $\varphi(x)$  es una matriz hermitiana  $N \times N$ . Una teoría matricial euclidiana de campos está definida por la asignación de una medida formal al espacio de configuración  $\varphi(x)$ :

$$e^{-\frac{1}{\hbar} \text{tr} U(\{\varphi(x)\})} \prod_x d\varphi(x), \tag{6.1}$$

donde  $U$  es una funcional de  $\{\varphi(x)\}$ , y la medida sobre el espacio de  $N \times N$  matrices hermitianas está dada por

$$d\varphi(x) = \prod_{1 \leq i \leq n} d\varphi_{ii}(x) \prod_{1 \leq i < j \leq n} d \text{Re} \varphi_{ij}(x) \prod_{1 \leq i < j \leq n} d \text{Im} \varphi_{ij}(x). \tag{6.2}$$

Aquí se usará  $\hbar$  como un parámetro de ajuste. Cabe hacer notar que al igual que la teoría de  $\lambda\varphi^4$ , la medida (6.1) no está bien definida debido a las divergencias ultravioletas, por lo que es necesario recurrir a un cierto tipo de proceso límite para obtener expresiones con significado. El proceso de regularización utilizado aquí consistirá en considerar aproximaciones en el enrejado con una versión de  $U$  discretizada. Sobre un enrejado finito de  $q$  sitios, la discretización de  $U$  típica toma la forma

$$U(\varphi(1), \dots, \varphi(q)) = \sum_{r,s=1}^q A_{rs} \varphi(r) \varphi(s) + \sum_{r=1}^q V_r(\varphi(r)), \tag{6.3}$$

donde  $\{A_{rs}\}$  es positiva definida y  $V$  es un potencial de polinomio:

$$V_r(\varphi(r)) = \sum_{p=3}^{p_{\max}} u_p(r) \varphi^p,$$

por lo que uno está interesado en calcular integrales con respecto a la medida

$$e^{-\frac{1}{\hbar} \text{tr} U(\{\varphi(1), \dots, \varphi(q)\})} \prod_{i=1}^q d\varphi(i). \quad (6.4)$$

Para obtener una teoría de campo euclidiano, primero deben calcularse las observables a  $q$  finita y después dejar  $q \rightarrow \infty$ , ajustando al mismo tiempo  $\{A_{rs}\}$  y  $\{u_p\}$  como una función de  $q$  (el límite de volumen infinito y el límite continuo para la teoría de campos matriciales). Lo interesante de la situación es que la  $q$ -teoría matricial de campos tiene problemas no triviales para valores finitos de  $q$ . Por ejemplo: 1) La bien conocida expansión perturbativa en potencias de los coeficientes  $u_p$  ( $p \geq 3$ ) es divergente. Este hecho nos obliga simplemente a no tomar un punto de vista perturbativo. El problema grave es que virtualmente en todas las situaciones de interés en teoría de SA la integral (6.4) es divergente, porque el potencial  $V$  no está acotado por abajo para valores impares de  $p_{\max}$ , o bien porque  $U_{p_{\max}}(r)$  es negativo para  $p_{\max}$  pares. Además la expansión de perturbación no es Borel-sumable. La correspondencia entre modelos aleatorios matriciales y los modelos de gravedad cuántica bidimensional se hace al nivel de series de potencias formales. Por ejemplo, las series que representan la contribución correspondiente a una potencia fija  $1/N$  son geoméricamente convergentes y pueden ser sumadas usando el método de polinomios ortogonales. Por otra parte, las series que expresan la contribución de potencias arbitrarias de  $1/N$ , es decir sumando sobre todos los géneros, pueden ser relacionadas en un cierto límite (llamado límite de doble escala) a soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales (KdV). Esas ecuaciones pueden de nuevo ser derivadas del método de polinomios ortogonales en el contexto de matrices integrales. Es decir, los modelos matriciales nos sugieren soluciones no-perturbativas a modelos de gravedad cuántica bidimensionales.

## 7. CONCLUSIONES

Como hemos podido notar, las teorías de SA en el enrejado representan una generalización natural de las teorías de CA. Sin embargo, es clara la mayor riqueza y complejidad de estructura de las teorías de SA, esencialmente debido a su complejidad topológica. La riqueza de estas teorías ha dado una esperanza a los físicos teóricos de una posible teoría de unificación de todas las interacciones actualmente conocida como teoría de supercuerdas, que no es más que una teoría de SA en el continuo.

## REFERENCIAS

1. J.L. Soria, Notas sin publicar de un curso-taller dado en el Centro de Graduados del ITT en agosto de 1991.

2. J.L. Soria *Rev. Mex. Fís.* **38** (1992) 643.
3. J. Fröhlich, *Quantum Field Theory, Random Walks and Surfaces: Progress in Gauge Field Theory*, Plenum Press, New York, London (1983) p. 169.
4. R. Fernández, J. Fröhlich, and A. Sokal, *Random Walks, Critical Phenomena and Triviality in Quantum Field Theory*, Springer-Verlag, New York, Berlin (1992).
5. J. Fröhlich, "The Statistical Mechanics of Surfaces", en *Applications of Field Theory to Statistical Mechanics (Sitges, 1984)*, L. Garrido (edit.), Lecture Notes in Physics # 216, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1984).
6. B. Durhuus, J. Fröhlich and T. Jonsson, *Nucl. Phys.* **B225** (1983) 185.
7. B. Durhuus, J. Fröhlich and T. Jonsson, *Nucl. Phys.* **B240** (1984) 453.
8. J. Ambjorn, B. Durhuus and J. Fröhlich, *Nucl. Phys.* **B257** (1985) 433.
9. J. Ambjorn, B. Durhuus, J. Fröhlich and T. Jonsson, *Nucl. Phys.* **B290** (1987) 480.
10. J. Ambjorn, B. Durhuus, J. Fröhlich and T. Jonsson, A Renormalization Group Analysis of Lattice Models of Two-Dimensional Membranes, *JSP* **55** No. 1/2 (1989) 29.
11. Hal Tasaki, Ph.D. (sin publicar), Departamento de Física, Universidad de Tokio, mayo de 1986.