Estructura simpléctica de la fase de Berry-Hannay para estados coherentes SO(3)

VÍCTOR GRANADOS GARCÍA*
Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas
Edificio 9, U.P. A. López Mateos, Zacatenco
07738 México, D.F., México

Recibido el 18 de agosto de 1993; aceptado el 10 de diciembre de 1993

RESUMEN. Se estudia la estructura simpléctica de la fase de Berry con estados coherentes del grupo SO(3). Considerando los estados coherentes como los más cercanos a una descripción clásica, se obtiene una expresión canónica para la fase de Hannay y la dinámica de Lie generalizada. En el límite clásico esas formulaciones canónicas son identificadas con la fase y dinámica de un cuerpo rígido libre.

ABSTRACT. The symplectic structure of the Berry's phase with SO(3) group coherent states is studied. Assuming the coherent states so close to a classical description, a cannonical expression for Hannay's phase and the generalized Lie's dynamics is obtained. In the classical limit those cannonical formulations are identified with the phase and dynamics of a free rigid body.

PACS: 03.65.Bz; 02.20.+b; 02.40.+m

1. INTRODUCCIÓN

La fase de la función de estado introducida por Berry [1] en un proceso cíclico adiabático de un sistema cuántico y el ángulo o fase de Hannay [2] en la evolución de un sistema clásico, han sido tratados desde diferentes puntos de vista y condiciones [3]. Así se ha podido determinar que la fase de Berry se presenta cuando la evolución no es adiabática [4] o aun cíclica [5]. Se ha observado [6] que la fase de Berry es consecuencia de la anholonomía de la variedad diferenciable con curvatura no nula, definida por los parámetros o coordenadas de la función de estado. Esto ha quedado de manifiesto en experimentos de resonancia magnética nuclear [7], en la fase de Pancharatnam [8] en interferencia con luz polarizada [9] y en el giro del vector del campo electromagnético en un haz propagado en una fibra óptica curvada [10].

El caso más simple tratado por Berry [1] fue un hamiltoniano de la forma $H = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r}/2$, donde $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ es el vector matricial de Pauli y $\mathbf{r}$ es el vector unitario de posición sobre la 2–esfera S^2, sumergida en el espacio euclidiano 3–dimensional. Las funciones de estado propias de este hamiltoniano resultan ser estados coherentes del grupo SO(3) con $j = 1/2$, definidos sobre la esfera $S^2 = \mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2)$. La fase de Berry para estados coherentes SO(3) de espín con $j = 1/2, 1, 3/2, \ldots$ ha sido calculada [15], sin embargo no se ha considerado la estructura simpléctica [12] relacionada con la variedad S^2 en la cual

*Área de Física-CBI, Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco.

están definidos los estados coherentes de espín [13], ni la dinámica determinada sobre esta variedad y su relación con la fase de Hannay. La estructura simpléctica de la fase de Berry de forma general, sin considerar estados coherentes, ha sido ya estudiada [14], y para estados coherentes definidos en grupos ha sido calculada [15], sin embargo no se han considerado la estructura simpléctica y la dinámica, así como la relación con la fase de Hannay, teniendo presente que los estados coherentes de espín, son la descripción cuántica, más cercana a la clásica ya que son de mínima incertidumbre [11]. El objetivo del presente artículo es precisamente estudiar la estructura simpléctica, la dinámica de Lie [17] y la fase de Berry-Hannay con estados coherentes de espín del grupo SO(3), definidos sobre la esfera S^2 cuyo grupo de holonomía [16] es el grupo SO(2), al cual pertenece la exponencial de la fase de Berry. Así en la Sec. 2, a partir de un principio variacional para la ecuación de Schrödinger, se relaciona la fase de Berry con el término cinemático de la lagrangiana. Con esta función se determina la estructura simpléctica, caracterizada por la evolución de los parámetros o coordenadas de la función de estado; obteniéndose ecuaciones de movimiento generalizadas y una expresión para la fase de Berry-Hannay en función de las coordenadas y momentos canónicos. En la Sec. 3 se decriben las propiedades más importantes de los estados coherentes de espín del grupo SO(3) y se aplican a los conceptos tratados en la Sec. 2, como caso particular. Se obtienen paréntesis de Lie para la dinámica del grupo SO(3) para un cuerpo rígido libre y se presenta la fase de Berry-Hannay como una 2-forma en la esfera S^2 y se relaciona con el límite clásico. Por último se dan las conclusiones obtenidas en la Sec. 4. En cuanto a la notación el producto exterior de 1-formas se denota con $\wedge$, al pasar de una integral de trayectoria cerrada, a una integral sobre un área mediante el teorema de Stokes o al obtener la diferencial de una 1-forma.

2. ESTRUCTURA SIMPLÉCTICA

La fase de Berry se puede determinar como consecuencia de la evolución temporal de la función de estado de acuerdo a

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)\,|\psi(t)\rangle\,, \tag{1}$$

donde H es el hamiltoniano y $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 1$.

Expresando $|\psi(t)\rangle = C(t)|\phi(t)\rangle$, donde la función compleja $C(t)$ es de módulo uno y substituyendo en la Ec. (1), se tiene

$$i\hbar\left(\frac{d}{dt} + \left\langle \phi(t)\left|\frac{d}{dt}\right|\phi(t)\right\rangle\right)C(t) = \langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle\, C(t). \tag{2}$$

Esta ecuación se puede integrar inmediatamente [5], con el resultado

$$C(t) = \exp\left(-\int_D \langle\phi|d\phi\rangle - \frac{i}{\hbar}\int_0^t \langle\psi|H|\psi\rangle\, dt'\right)C(0), \tag{3}$$

en donde $|d\phi\rangle = d|\phi\rangle$ es la diferencial de la función $|\phi\rangle$ y el subíndice D en la integral indica una trayectoria en el espacio de parámetros o coordenadas de la función $|\phi\rangle$. La fase real de la Ec. (3),

$$\beta = i \int_D \langle\phi|d\phi\rangle = i \int_S \langle d\phi| \wedge |d\phi\rangle, \tag{4}$$

es la fase geométrica de Berry [1], en la cual D es una trayectoria cerrada, que limita a la superficie S y $B = \langle d\phi| \wedge |d\phi\rangle$, es la 2-forma diferencial de Berry [1]. La Ec. (1) de Schrödinger puede obtenerse a partir del principio variacional

$$I = \int \left(\left\langle \psi \middle| i\hbar \frac{d\psi}{dt} \right\rangle - \langle\psi|H|\psi\rangle \right) dt. \tag{5}$$

El primer término en esta integral se conoce como la forma cinemática, la cual tomada sobre una trayectoria D puede relacionarse con la fase de Berry. El segundo término es conocido como la forma dinámica, e igualmente se relaciona con la llamada fase dinámica de la Ec. (3). Si los estados $\psi(t)$ están definidos sobre una variedad diferenciable V, o la determinan al evolucionar sus coordenadas o parámetros, las propiedades geométricas de esta variedad, como curvatura gaussiana, 2-forma, transporte paralelo y grupo de holonomía se manifiestan en la fase de Berry. Los estados también determinan sobre esta variedad V una estructura simpléctica y una dinámica canónica de Lie [12]. Se considera que la dependencia temporal de las funciones de estado se puede expresar a través de sus coordenadas o parámetros $x_i(t)$, cuya naturaleza o significado dependerá del problema físico particular que se trate. Por lo tanto, se puede escribir

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))\rangle. \tag{6}$$

La variación de las coordenadas $x_i(t)$ define un parche coordenado [16] de la variedad V. La acción de la funcional de la Ec. (5) se vuelve entonces función de este parche coordenado y determina la función lagrangiana

$$L = \dot{x}_j p_j - H(x_i), \tag{7}$$

en la cual el momento canónico p_j está determinado por la cantidad real

$$p_j = i \left\langle \psi(x_i) \middle| \frac{\partial\psi(x_i)}{\partial x_j} \right\rangle = -i \left\langle \frac{\partial\psi}{\partial x_j}(x_i) \middle| \psi(x_i) \right\rangle. \tag{8}$$

La velocidad generalizada es $\dot{x}_i = dx_i/dt$ y la función hamiltoniana se expresa como

$$H(x_i) = \langle\psi(x_i)|H|\psi(x_i)\rangle. \tag{9}$$

Las ecuaciones canónicas de movimiento con la lagrangiana de la Ec. (7) y usando el principio variacional de la Ec. (5) son, por lo tanto,

$$N^{ij}(x_i)\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial x_i}, \tag{10}$$

donde el tensor antisimétrico $N^{ij}(x_i)$ toma la forma

$$N^{ij}(x_i) = \frac{\partial p_j}{\partial x_i} - \frac{\partial p_i}{\partial x_j}. \tag{11}$$

Este tensor depende sólo de la estructura de la variedad V y determina los aspectos cinemáticos del movimiento [12], mientras que $H(x_i)$ depende del hamiltoniano y determina la dinámica. Con este tensor antisimétrico $N^{ij}(x_i)$ definido sobre la variedad V, ésta se vuelve simpléctica [12]. Cuando este tensor no es degenerado su inverso N_{ij},

$$N^{ik}N_{kj} = \delta^i_j, \tag{12}$$

determina un paréntesis generalizado de Lie [17] mediante el cual se pueden escribir ecuaciones canónicas generalizadas que toman la forma

$$\dot{x}_i = \{x_i, H(x_i)\} \equiv N_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j}(x_i). \tag{13}$$

También es posible definir un tensor métrico g_{ij} en la variedad V, mediante una función de estado que pertenece a un espacio de Hilbert [18]. A partir de una función de estado definida en dos coordenadas cercanas $|\psi(x_i)\rangle$ y $|\psi(x_i + dx_i)\rangle$, una métrica se puede determinar por

$$|\psi(x_i + dx_i) - \psi(x_i)|^2 = \langle\psi(x_i + dx_i) - \psi(x_i)|\psi(x_i + dx_i) - \psi(x_i)\rangle, \tag{14}$$

la cual hasta segundo orden se puede escribir

$$|\psi(x_i + dx_i) - \psi(x_i)|^2 = \langle\partial_i\psi(x_i)|\partial_j\psi(x_i)\rangle\, dx_i\, dx_j = T_{ij}\, dx_i\, dx_j \tag{15}$$

donde $\partial_i\psi(x_i) = \partial\psi(x_i)/\partial x_i$.

Consecuentemente con el producto hermitiano se determina un tensor cuántico-geométrico T_{ij} [19], el cual se puede separar en sus partes real e imaginaria como sigue:

$$g_{ij} = g_{ji} = \tfrac{1}{2}\big(\langle\partial_i\psi(x_i)|\partial_j\psi(x_i)\rangle + \langle\partial_j\psi(x_i)|\partial_i\psi(x_i)\rangle\big), \tag{16}$$

$$iV_{ij} = -iV_{ji} = \tfrac{1}{2}\big(\langle\partial_i\psi(x_i)|\partial_j\psi(x_i)\rangle - \langle\partial_j\psi(x_i)|\partial_i\psi(x_i)\rangle\big). \tag{17}$$

La parte simétrica real g_{ij} del tensor cuántico proporciona, por lo tanto, un tensor métrico en la variedad V, y el antisimétrico V_{ij} una estructura simpléctica, ya que como se puede ver de las Ecs. (8), (11) y (17) los tensores V_{ij} y N^{ij}, salvo un factor, son iguales. Asimismo el tensor antisimétrico iV_{ij} se puede relacionar con la 2–forma diferencial de Berry:

$$B = \langle d\psi | \wedge | d\psi \rangle = \langle \partial_i \psi \, dx_i | \wedge | \partial_j \psi \, dx_j \rangle = iV_{ij} \, dx_i \wedge dx_j. \tag{18}$$

De la Ec. (8) que define el momento canónico se puede escribir también

$$p_j \, dx_j = i \left\langle \psi \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right. \right\rangle dx_j = i \langle \psi | d\psi \rangle. \tag{19}$$

Con lo cual la 2–forma de Berry se puede expresar como

$$B = -i \, d(p_j \, dx_j) = -i \, dp_j \wedge dx_j, \tag{20}$$

la cual satisface

$$dB = 0. \tag{21}$$

Por lo tanto, la 2–forma diferencial de Berry está determinada por las funciones de estado sobre la variedad V y se puede identificar con la 2–forma simpléctica definida en la misma variedad V. Finalmente, la fase de Berry se puede expresar entonces como

$$\beta = \int_D p_j \, dx_j = \int_S dp_j \wedge dx_j; \tag{22}$$

expresión, que de manera natural, manifiesta el límite clásico, en cuyo caso la fase es ahora la de Berry-Hannay [19]. En efecto, comparando con el límite clásico [5,19] de la fase de Berry,

$$\beta = \lim_{\hbar \to 0} \frac{1}{\hbar} \int \langle dp_j \wedge dx_j \rangle, \tag{22a}$$

en la que el paréntesis triangular denota promedio en el espacio fase, la Ec. (22) es el límite clásico ya que no depende de $\hbar$.

Las cantidades p_i y T_{ij} se pueden obtener [18] del producto escalar entre dos funciones de estado en la forma siguiente:

$$p_j = -i \frac{\partial}{\partial x'_j} \big\langle \psi(x_i) | \psi(x'_i) \big\rangle_{x'=x}, \tag{23}$$

$$T_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x'_j} \big\langle \psi(x_i) | \psi(x'_i) \big\rangle_{x'=x}. \tag{24}$$

3. ESTADOS COHERENTES SO(3) Y DINÁMICA GENERALIZADA

Los estados coherentes de espín están determinados [11] por las representaciones unitarias $T^j(g)$ del grupo SO(3), con $j = 1/2, 1, 3/2, \ldots$ y dimensión $2j+1$. Los estados del espacio de representación $|jm\rangle$ son estados propios de los operadores $\mathbf{J}_0$ y $\mathbf{J}^2$

$$\mathbf{J}_0 \, |jm\rangle = m \, |jm\rangle \quad (-j \leq m \leq j) \tag{25}$$

y

$$\mathbf{J}^2 \, |jm\rangle = j(j+1) \, |jm\rangle \, . \tag{26}$$

Si algún vector $|jm\rangle$ se toma como estado fundamental $|\psi_0\rangle$, el estado coherente está determinado por el vector unitario $\hat{n} = (\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \cos\theta)$, como

$$|\hat{n}\rangle = T^j(g_{\hat{n}}) \, |\psi_0\rangle \, . \tag{27}$$

Por lo tanto, los estados coherentes están definidos sobre la esfera de radio unitario dos dimensional $S^2 = \mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2) = \mathrm{SU}(2)/\mathrm{SU}(1)$, la cual es la órbita de la representación coadjunta del grupo SO(3) [11], y puede así, ser considerada como el espacio fase de un sistema dinámico clásico. Escogiendo el estado fundamental $|\psi_0\rangle$ igual a cualquiera de los estados $|j \pm j\rangle$, la dispersión del operador de Casimir es mínima y los estados coherentes definidos son los más cercanos a estados clásicos [11].

Escogiendo el estado $|j - j\rangle$, el cual corresponde al punto en el polo sur $\hat{n}_0 = (0, 0, -1)$ de la esfera S^2 y mediante los generadores infinitesimales $J_\pm = J_1 \pm J_2$, el estado coherente $|\hat{n}\rangle$ está relacionado al estado $|\hat{n}_0\rangle = |j - j\rangle$ por

$$|\hat{n}\rangle = \exp(zJ_- - \bar{z}J_+) \, |\hat{n}_0\rangle \, , \tag{28}$$

donde $z = -\tan\theta/2e^{-i\varphi}$ y $\bar{z}$ es su complejo conjugado.

Por medio de la descomposición gaussiana [11], la Ec. (28) se escribe como

$$|z\rangle = |n\rangle = \exp(\zeta J_+) \exp(\eta J_0) \exp(\zeta' J_-) |j - j\rangle, \tag{29}$$

donde

$$\zeta = -\tan\theta/2, \quad \eta = \ln(1 + |z|^2), \quad \zeta' = -\zeta. \tag{30}$$

Expandiendo finalmente las exponenciales de la Ec. (29), se obtiene la expansión del estado coherente $|z\rangle$, sobre la base de estados $|j\rangle$ como

$$|z\rangle = \sum_{m=-j}^{j} \left[\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!} \right]^{1/2} \left(1 + |z|^2\right)^{-1} z^{j+m} \, |jm\rangle \, , \tag{31}$$

o bien, expresado en variables angulares θ, φ:

$$|n\rangle = \sum_{m=-j}^{j} \left[\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}\right]^{1/2} \left(-\operatorname{sen}\theta/2\right)^{j+m} \left(\cos\theta/2\right)^{j-m} \exp\left(-i(j_m)\varphi\right) |jm\rangle . \tag{32}$$

La relación entre las variables angulares θ, φ sobre la esfera S^2 y el número complejo z de la Ec. (28), es el isomorfismo de la proyección estereográfica desde el polo sur. Efectivamente, este mapeo introduce coordenadas complejas para la esfera S^2 con el polo sur removido, pero no es posible que tales coordenadas describan S^2 totalmente debido a su estructura topológica. Sin embargo, la esfera S^2, así como cualquier órbita de un grupo de Lie compacto, es una variedad compleja compacta [11], de tal forma que puede ser descrita con una combinación de varios sistemas de coordenadas.

Se puede probar que el estado coherente de espín es un estado propio del operador $\hat{n}\cdot\mathbf{J}$. En efecto,

$$\hat{n}\cdot\mathbf{J}\,|\hat{n}\rangle = -j\,|\hat{n}\rangle\,, \tag{33}$$

y el valor esperado del operador $\mathbf{J}$ es

$$\langle\hat{n}|\mathbf{J}|\hat{n}\rangle = -j\,|\hat{n}\rangle\,. \tag{34}$$

Con las Ecs. (24), (31) y (32) para los estados coherentes, se tienen en coordenadas (θ, φ) y z, respectivamente, las métricas

$$ds^2 = j(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2), \tag{35}$$

$$ds^2 = j\frac{2\,dz\,d\bar{z}}{\left(1+|z|^2\right)^2}. \tag{36}$$

La primera es la métrica riemmaniana de la esfera S^2 y la segunda es la métrica de Kähler de la misma esfera, considerada como una variedad compleja, en cuyo caso la métrica es la de Fubini-Study [20].

Igualmente se pueden determinar las ecuaciones de movimiento, que en coordenadas complejas son, de acuerdo a las Ecs. (13), (24), (31) y (32), las siguientes:

$$\dot{z} = \frac{-i\left(1+|z|^2\right)^2}{2j\hbar}\frac{\partial H}{\partial z^*}, \tag{37}$$

$$\dot{z}^* = \frac{i\left(1+|z|^2\right)^2}{2j\hbar}\frac{\partial H}{\partial z}, \tag{38}$$

las que con el paréntesis de Lie definido por

$$\{A, B\} = i\frac{\left(1+|z|^2\right)^2}{2j\hbar}\left(\frac{\partial A}{\partial z^*}\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial B}{\partial z^*}\right) \tag{39}$$

se escriben

$$\dot{z} = \{z, H\}, \qquad \dot{z}^* = \{z, H\}. \tag{40}$$

Estas mismas ecuaciones en coordenadas angulares θ, φ son

$$\dot{\theta} = \{\theta, H\}, \qquad \dot{\varphi} = \{\varphi, H\}, \tag{41}$$

con el paréntesis de Lie,

$$\{A, B\} = \frac{1}{j \operatorname{sen}\theta} \left(\frac{\partial A}{\partial \varphi} \frac{\partial B}{\partial \theta} - \frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{\partial B}{\partial \varphi} \right). \tag{42}$$

El momento canónico p_φ de la Ec. (23) en coordenadas angulares es

$$p_\varphi = -j \cos\theta, \tag{43}$$

por lo que el paréntesis de Lie de la Ec. (42) se puede escribir como

$$\{A, B\} = \left(\frac{\partial A}{\partial \varphi} \frac{\partial B}{\partial p_\varphi} - \frac{\partial A}{\partial p_\varphi} \frac{\partial B}{\partial \varphi} \right). \tag{44}$$

Con el momento P_z se puede reescribir también el paréntesis de Lie, sin embargo en la forma canónica en coordenadas angulares este paréntesis se identifica con el paréntesis de Lie generalizado del grupo SO(3) [17,21], de acuerdo a los estados coherentes del grupo SO(3) con los que se ha calculado.

La 2–forma y la fase de Berry-Hannay de las Ecs. (20) y (22) se escriben así:

$$B = -ij \operatorname{sen}\theta \, d\theta \wedge d\varphi, \quad dB = 0, \tag{45}$$

$$\beta = -j \int_D \cos\theta \, d\varphi = j \int_S \operatorname{sen}\theta \, d\theta \wedge d\varphi. \tag{46}$$

De esta ecuación es claro que la fase de Berry-Hannay es igual a $j\Omega$, donde Ω es el ángulo sólido subtendido por la superficie S en la esfera S^2. Para $j = 1/2$, es decir para un sistema con dos niveles, se recupera el resultado original de Berry [1] y la fase de un monopolo magnético de Dirac [22]. Este tratamiento para $j = 1/2$ es de aplicación en la fase de Pancharatnam de luz polarizada [8] y en los ecos de espín en resonancia magnética nuclear, pero no se tratarán aquí.

El caso vectorial con $j = 1$ es de interés, porque en este caso el paréntesis de Lie de las Ecs. (42) o (44), se reduce al correspondiente del grupo SO(3) de un cuerpo rígido libre en mecánica clásica [21], en cuyo caso la fase de Berry-Hannay de la Ec. (46) coincide con la fase de Hannay calculada clásicamente [23,24], para la rotación del cuerpo rígido en un periodo.

4. Conclusiones

Se ha demostrado que para un sistema cuántico descrito por funciones de estado definidas en una variedad V, queda determinada una estructura simpléctica y una dinámica de Lie generalizada en esta variedad, las cuales se pueden usar para determinar la 2–forma B y la fase de Berry. Así, la fase de Berry para tales estados se expresa como la integral de acción independiente de $\hbar$ con el momento generalizado de la dinámica de Lie, por lo cual se puede identificar con la fase clásica de Hannay. Para el caso de los estados coherentes de espín del grupo SO(3), la dinámica de Lie se ve que es la del grupo SO(3). Con $j = 1$, la dinámica de Lie y la fase de Berry-Hannay corresponden a la de un cuerpo rígido libre. La igualdad de las fases de Berry con estados coherentes SO(3) y la de Hannay para un cuerpo rígido libre, se establece comparando las expresiones para estas fases. Sin embargo, pudiera darse el caso de la existencia de sistemas con estados de incertidumbre mínima, en los que la fase de Berry y el ángulo de Hannay son diferentes.

Agradecimientos

Se agradece al árbitro del artículo por las recomendaciones sugeridas, por las correcciones y por proporcionar la referencia [17].

Referencias

1. M. Berry, *Proc. Roy. Soc.* **A 392** (1984) 45.
2. J. H. Hannay, *J. Phys.* **A18** (1985) 221.
3. A. Shapere y F. Wilczek, *Geometric Phases in Physics*, World Scientific, Singapur (1989).
4. J. Samuel y R. Bhandari, *Phys. Rev. Letts.* **60** (1988) 2339.
5. J. Anadan, *Found. Phys.* **21** (1991) 1265.
6. B. Simon, *Phys. Rev. Lett.* **51**, (1983) 2167.
7. D. Suter, G. C. Chingas, R. A. Harris y A. Pines, *Mol. Phys.* **61** (1987) 1327.
8. S. Pancharatnam, *Proc. Indian Acad. Sci.* **5** (1956) 247.
9. M. Grether, E. López-Moreno y A. Góngora T., *Rev. Mex. Fís.* **39** (1993) 47.
10. A. Tomita y R. Chiao, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 937.
11. A. Perelemov, *Generalized Coherent States and their Applications*, Springer-Verlag, Berlín (1986).
12. S. Berceanu y A. Gheorghe, *J. Math. Phys.* **33** (1992) 998.
13. W. Zhang, D. Feng y R. Gilmore, *Rev. Mod. Phys.* **62** (1990) 867.
14. L. Boya, J. Cariñena y J. García-Bondía, *Phys. Lett.* **A161** (1992) 30.
15. S. Chatuverdi, M. S. Sriram y V. Srivinas, *J. Phys.* **A20** (1987).
16. W. Poor, *Differential Geometrical Structures*, McGraw-Hill, Nueva York (1984).
17. P. Kramer y M. Saraceno, *Geometry of the Time-Dependent Variational Principle in Quantum Mechanics*, Springer-Verlag (1981).
18. J. P. Provost y G. Valle, *Comm. Math. Phys.* **76** (1980) 289.
19. M. Berry, *The Quantum Phase, Five Years After*, en Ref. [3].
20. D.H. Page, *Phys. Rev.* **A36** (1987) 3479.
21. V. Granados, *Rev. Mex. Fís.* **37** (1991) 571.
22. V. Granados, *Rev. Mex. Fís.* **37** (1991) 230.
23. J. Marsden, R. Montgomery y T. Ratiu, *Mem. Am. Math. Soc.* **88** (1990).
24. R. Montgomery, *Am. J. Phys.* **59** (1991) 394.