

## Un método geométrico para enseñar colisiones (y jugar billar)

VIRGILIO BELTRÁN L.

*Instituto de Ciencias Nucleares*

*Universidad Nacional Autónoma de México*

*Apartado postal 70-543, 04510 México, D.F., México*

Recibido el 17 de agosto de 1993; aceptado el 16 noviembre de 1993

**RESUMEN.** Se presenta un método geométrico para enseñar colisiones que simplifica la obtención de los resultados y de los efectos principales. Se aplica a la colisión de dos esferas rígidas para obtener los ímpetus finales en términos del parámetro de impacto, y se demuestra que la colisión puede analizarse en términos de una colisión frontal que trasmite ímpetu y una tangencial que no trasmite ninguno. Se construyen diagramas simples del ímpetu final del proyectil en la colisión elástica de dos cuerpos y se relaciona ese ímpetu con el parámetro de impacto en la colisión de dos esferas rígidas. Se propone un billar con bolas de diseño especial para demostrar y medir los efectos principales de las colisiones entre cuerpos.

**ABSTRACT.** A geometrical method for teaching collisions which simplifies the derivation of the main results and effects is presented. It is applied to the collision of rigid spheres for obtaining the final momenta in terms of the impact parameter and to show that the collision may be analyzed in terms of a head-on collision which transmits momentum and a grazing collision which does not transmit any. Simple-to-read diagrams of the final momentum of the colliding body in an elastic collision are given and related with the impact parameter in the collision of two rigid spheres. A billiards game with especially designed balls is proposed to show and measure the main effects in the collisions between two bodies.

PACS: 01.50.Kw

### 1. INTRODUCCIÓN

El problema de determinar el estado mecánico de dos cuerpos después de que chocan es de los más interesantes e importantes en los cursos de mecánica. A nivel introductorio generalmente se trata en su forma más simple, la colisión de dos partículas que se mueven sobre una recta, porque esto es suficiente para ilustrar la aplicación al problema de los principios de conservación del ímpetu y de la energía sin complicarlo con las dificultades algebraicas y trigonométricas que resultan del movimiento en dos dimensiones [1,2,3]. Se pierde con esto la oportunidad de describir fenómenos interesantes que resultan de colisiones más generales entre cuerpos que después de chocar pueden moverse libremente. El propósito de este trabajo es mostrar los fenómenos principales de las colisiones de dos cuerpos por métodos geométricos sencillos.

Supondremos dos cuerpos de masas  $M_1$  y  $M_2$  que chocan con ímpetus iniciales  $\mathbf{P}_{i1}$  y  $\mathbf{P}_{i2}$ , ímpetu total  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{i1} + \mathbf{P}_{i2}$  y energía cinética inicial total  $E$  (Fig. 1). Después del choque los ímpetus son  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$ , y el ímpetu total  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$  es, desde luego, igual al

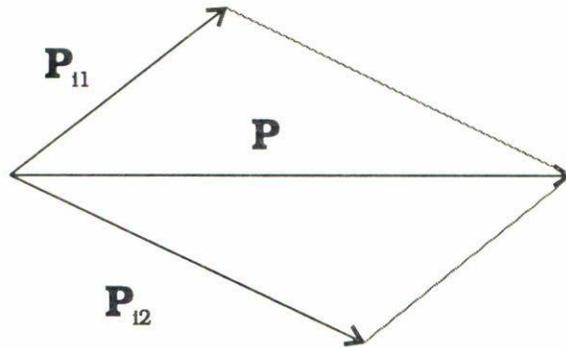


FIGURA 1. El ímpetu inicial total  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{i1} + \mathbf{P}_{i2}$  de un sistema de dos cuerpos se conserva estrictamente en cualquier choque entre ellos.

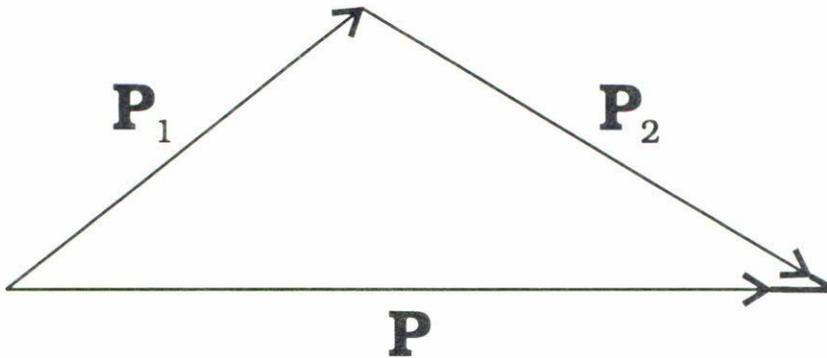


FIGURA 2. Los ímpetus finales de dos cuerpos después de chocar deben cerrar un triángulo con el ímpetu total  $\mathbf{P}$  que tenían antes de chocar.

anterior al choque. Supondremos que los cuerpos no se deforman, ni se convierte energía cinética a otra forma de energía durante la colisión; esto es, supondremos que la energía mecánica  $E$  es toda cinética y conserva su valor en el choque. Esta colisión se llama elástica.

Los ímpetus finales de los cuerpos  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  deben sumar  $\mathbf{P}$  vectorialmente, independientemente de los valores iniciales. Esto es, los vectores  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  y  $\mathbf{P}$  deben cerrar un triángulo (Fig. 2). Ésta es la única condición que resulta de la conservación del ímpetu y se satisface rigurosamente en todas las colisiones, sean elásticas o no. Una importante conclusión mecánica que se obtiene de esto es que los cuerpos se mueven en el mismo plano después de chocar, puesto que todos los triángulos de lados rectos son planos. Otra condición es que las magnitudes de los ímpetus satisfacen la llamada condición triangular

$$|P_1 - P_2| \leq P \leq P_1 + P_2. \tag{1}$$

La relación de este problema con la geometría es más clara, y la escritura más fácil, si en vez de los vectores de ímpetu  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  y  $\mathbf{P}$  empleamos los vectores  $\mathbf{X} = \mathbf{P}_1/P, \mathbf{Y} = \mathbf{P}_2/P$

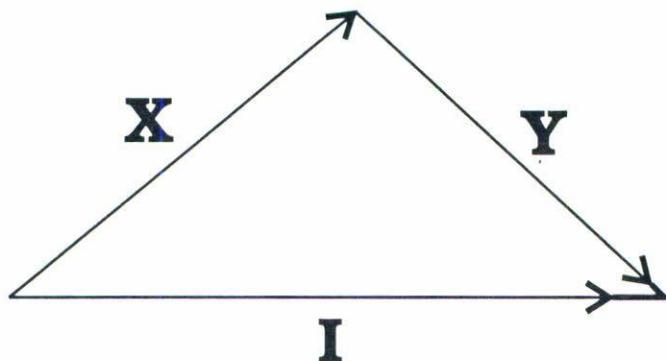


FIGURA 3. Los ímpetus reducidos de dos cuerpos después de chocar,  $\mathbf{X} = \mathbf{P}_1/P$  y  $\mathbf{Y} = \mathbf{P}_2/P$ , deben cerrar un triángulo con el vector unitario  $\mathbf{I} = \mathbf{P}/P$  en la dirección del ímpetu total.

e  $\mathbf{I} = \mathbf{P}/P$ . Éstos tienen las mismas direcciones que  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$  y  $\mathbf{P}$  y magnitudes  $X = P_1/P$ ,  $Y = P_2/P$  e  $I = P/P = 1$ , de las que se puede obtener fácilmente las de los vectores de ímpetu multiplicando por  $P$ . En términos de estos vectores la conservación del ímpetu en la colisión es que los vectores  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{I}$  cierren un triángulo (Fig. 3); o bien, que  $\mathbf{X}$ , y  $\mathbf{Y}$  formen un triángulo con el vector  $\mathbf{I}$  de magnitud uno.  $X$  y  $Y$ , por lo tanto, satisfacen la condición triangular

$$|X - Y| \leq 1 \leq X + Y. \quad (2)$$

Los ímpetus iniciales también suman  $\mathbf{P}$ . Si inicialmente el cuerpo 2, por ejemplo, se encuentra en reposo su ímpetu es cero y el ímpetu total es el del cuerpo 1. Esto ocurre en muchos sistemas interesantes, como el juego de billar, el frontón o las partículas atómicas que chocan contra un blanco en el laboratorio. Se satisface, desde luego, en un sistema anclado en el cuerpo 2, por lo que si los dos cuerpos están en movimiento se puede hacer una traslación de los ímpetus a ese sistema, analizar ahí la colisión y regresar los resultados al sistema del laboratorio. Podemos entonces tratar todos los problemas de colisiones suponiendo que el cuerpo 2 está en reposo y que el ímpetu y la energía total iniciales son los del cuerpo 1; esto es,  $\mathbf{P}_{i2} = 0$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{i1}$  y  $E = P^2/2M_1$ .

La conservación de la energía establece otra condición sobre las magnitudes de los ímpetus:

$$\frac{(P_1)^2}{2M_1} + \frac{(P_2)^2}{2M_2} = \frac{P^2}{2M_1}. \quad (3)$$

En términos de  $X$ , de  $Y$ , y de las relaciones  $r_1 = M_1/M$  y  $r_2 = M_2/M$  de las masas con la masa total  $M = M_1 + M_2$  la Ec. (3) queda en la forma

$$X^2 + \frac{r_1}{r_2} Y^2 = 1. \quad (4)$$

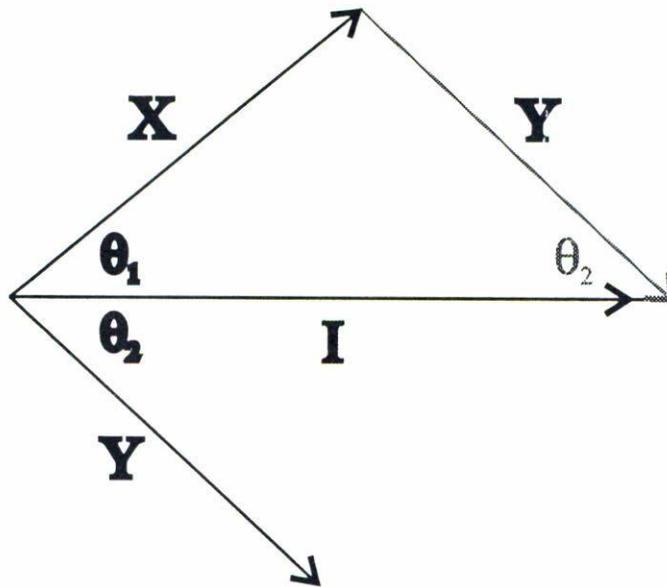


FIGURA 4. Los triángulos formados por los ímpetus **X**, **Y** e **I** de dos cuerpos en colisión elástica satisfacen la condición adicional  $X^2 + (r_1/r_2)Y^2 = 1$ , donde  $r_1 = M_1/M$ ,  $r_2 = M_2/M$  y  $M = M_1 + M_2$ .

La solución del problema de las colisiones elásticas de dos cuerpos, sin más restricción que la conservación del ímpetu total y de la energía total, se reduce simplemente a encontrar los triángulos de lados **X**, **Y** y **I** que satisfacen la Ec. (4).

Para encontrar esos triángulos, aplicando el teorema del coseno al triángulo **X**, **Y**, **I** (Fig. 4), se obtiene

$$X^2 = Y^2 + 1 - 2Y \cos \theta_2.$$

Y sustituyendo  $X^2$  de la Ec. (4),

$$Y = 2r_2 \cos \theta_2. \tag{5}$$

Esta ecuación da la magnitud  $Y$ , y la de  $P_2 = PY$ , en función del ángulo de deflexión del cuerpo 2; esto es, del ángulo al que se mueve el cuerpo 2 respecto a la dirección del cuerpo proyectil. Puesto que tanto  $Y$  como  $P_2$  son positivas, el ángulo de deflexión  $\theta_2$  de 2 está en el intervalo

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2};$$

o sea, que el cuerpo 2, el blanco, no puede salir “para atrás” como resultado de la colisión.

La Ec. (5) es la base para resolver todo el problema por métodos geométricos. El valor máximo de  $Y$  es  $2r_2$ , y el de  $P_2$  es  $2r_2P$ . Ocurre sólo si  $\theta_2 = 0$ ; esto es, en colisión frontal.

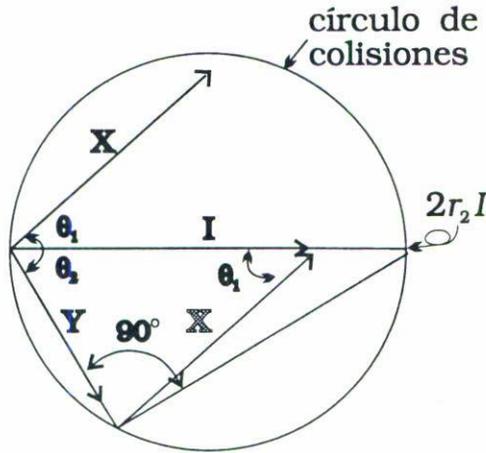


FIGURA 5. Los ímpetus finales posibles del cuerpo 2 son las secantes de un círculo de diámetro  $r_2I$ , el círculo de colisiones. El ímpetu final  $X$  del proyectil es el vector que cierra un triángulo con  $Y$  e  $I$ .

Recordando que un ángulo inscrito en una circunferencia mide la mitad del arco que intercepta, se ve también de esa ecuación que todos los valores posibles de  $Y$  se pueden obtener de las secantes de un círculo de diámetro  $2r_2$ , que llamaremos círculo de colisiones; los de  $P_2$  se obtienen de uno de diámetro  $2r_2P$  (Fig. 5).

El ímpetu del cuerpo proyectil, correspondiente al de  $Y$  al ángulo  $\theta_2$ , es simplemente el vector  $X$  que cierra el triángulo de lados  $Y, I$  al ángulo  $\theta_2$  (Fig. 5). Por el teorema del coseno se obtiene  $X^2 = Y^2 + 1 - 2Y \cos \theta_2$ , y sustituyendo aquí  $Y = 2r_2 \cos \theta_2$  de la Ec. (5) se tiene

$$X = \sqrt{1 - 4r_1r_2 \cos^2 \theta_2}, \tag{6}$$

que da la magnitud  $X$  del ímpetu del cuerpo 1 ( $P_1 = XP$ ) en términos del ángulo de deflexión  $\theta_2$  del cuerpo 2.

También del teorema del coseno,  $Y^2 = X^2 + 1 - 2X \cos \theta_1$ , y sustituyendo de la Ec. (4),  $Y^2 = (r_2/r_1)(1 - X^2)$ , se obtiene

$$X = r_1 \cos \theta_1 \pm \sqrt{r_2^2 - r_1^2 \sin^2 \theta_1}, \tag{7}$$

que da la magnitud  $X$  del ímpetu del proyectil, el cuerpo 1, en términos de su propio ángulo de deflexión  $\theta_1$  ( $P_1 = XP$ ).

Por último, del teorema de los senos,

$$X \sin \theta_1 = Y \sin \theta_2,$$

y sustituyendo aquí  $X$  y  $Y$  de las Ecs. (5) y (6),

$$\sin \theta_1 = \frac{r_2 \sin 2\theta_2}{\sqrt{1 - 4r_1r_2 \cos^2 \theta_2}}. \tag{8}$$

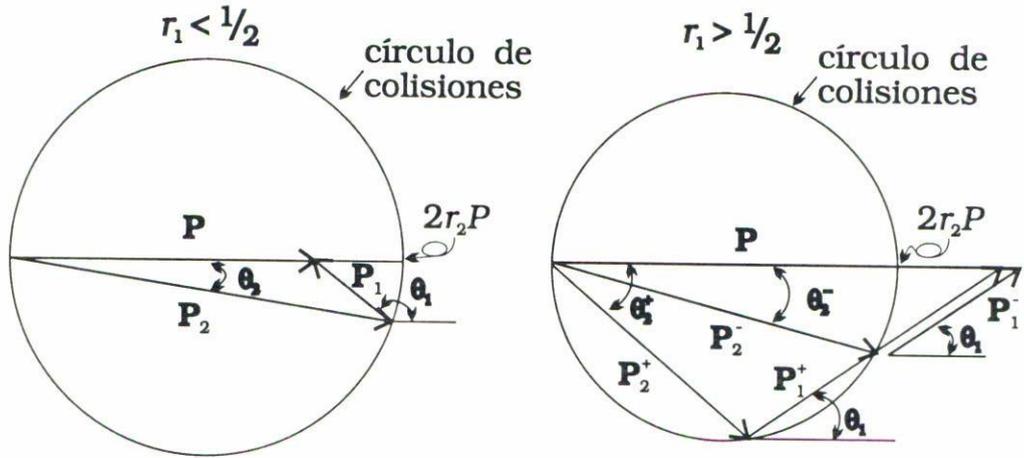


FIGURA 6.  $r_1 < 1/2$ . Si la masa del proyectil es menor que la del blanco sólo existe una solución para cada ángulo de desviación  $\theta_1$  del proyectil.  $r_1 > 1/2$ . Si la masa del proyectil es mayor que la del blanco existen dos soluciones para cada ángulo de desviación  $\theta_1$  del proyectil.

Las Ecs. (5), (6), (7) y (8) relacionan las cuatro variables dinámicas del problema,  $X$ ,  $Y$ ,  $\theta_1$  y  $\theta_2$  y parecería que existiera solución única al problema. Pero en realidad sólo tres de esas ecuaciones son independientes, cualquiera de ellas se puede deducir de las otras, de manera que asignando valor a una de las variables se encuentran los de las otras por tres de esas ecuaciones. Por ejemplo, si el cuerpo 2 es impulsado por la colisión al ángulo  $\theta_2 = 60^\circ$ , de la Ec. (5) se obtiene  $Y = r_2$ , de la Ec. (7) se obtiene  $X = \sqrt{1 - r_1 r_2}$  y de la Ec. (8)  $\sin \theta_1 = (\sqrt{3}/2)r_2/\sqrt{1 - r_1 r_2}$ . Estos valores, sustituidos en la Ec. (7), dan otra vez  $X = \sqrt{1 - r_1 r_2}$ .

El significado del problemático signo doble de la Ec. (7) se explica también fácilmente con el método geométrico (Fig. 6). De los diagramas y círculos de colisiones para  $r_1 < 1/2$  y para  $r_1 > 1/2$ , se encuentra que si  $r_1 < 1/2$ ,  $r_2 > 1/2$ ,  $2r_2 P > P$  y sólo es posible trazar un vector  $\mathbf{P}_1$  para cada ángulo de deflexión  $\theta_1$ ; mientras que si  $r_1 > 1/2$ , resulta  $2r_2 P < P$  y para cada valor del ángulo  $\theta_1$  se encuentran dos vectores  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_1^+$  y  $\mathbf{P}_1^-$ , y dos  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{P}_2^+$  y  $\mathbf{P}_2^-$ . Estos dos juegos de vectores corresponden al doble signo en la Ec. (7); es decir, si  $M_1 > M_2$  existen, en general, dos soluciones para cada valor del ángulo de deflexión del proyectil. Por ejemplo, si  $M_1 = 2M_2$ ,  $r_1 = 2/3$ ,  $r_2 = 1/3$ , y se encuentra  $X = P_1/P = \frac{1}{3}(2 \cos \theta_1 \pm \sqrt{\cos 2\theta_1})$ , que tiene dos valores reales en el intervalo  $-\pi/4 \leq \theta_1 \leq \pi/4$ .

Si las masas de los cuerpos son iguales, o sea, si  $M_1 = M_2 = m$ ,  $M = M_1 + M_2 = 2m$ ,  $r_1 = r_2 = 1/2$ , ocurre un caso particular interesante que también se resuelve muy fácilmente con el método geométrico. El diámetro del círculo de colisiones es ahora  $2r_2 = 1$  para el diagrama de  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{Y}$ , y  $P$  para el de  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$  como en la Fig. 7. El ímpetu total  $\mathbf{P}$  es igual al diámetro del círculo de colisiones y el ángulo inscrito por  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$  es de  $90^\circ$ . Los ímpetus de los cuerpos después de chocar hacen un ángulo recto. El billar es un ejemplo de este tipo de colisiones, si la línea de golpeo del taco pasa por el centro de la

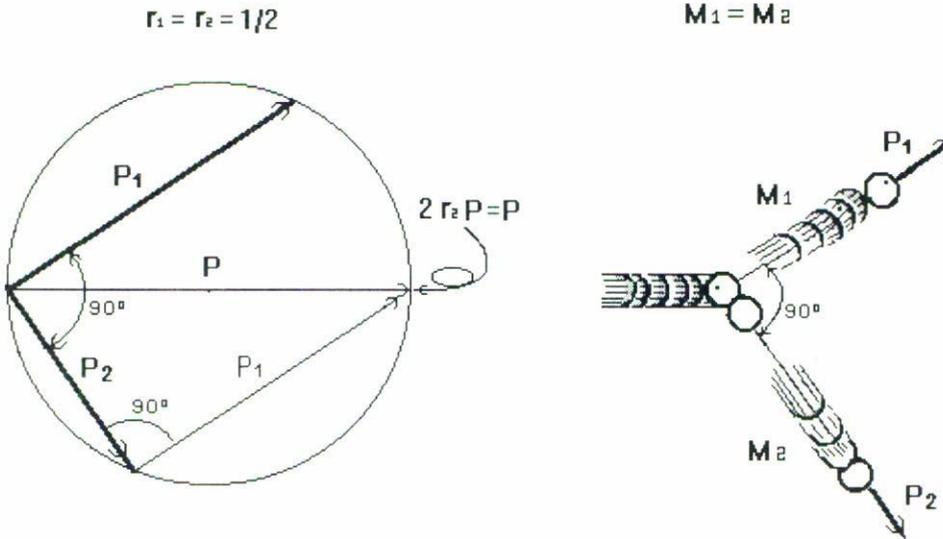


FIGURA 7. Si las masas de los cuerpos son iguales,  $r_1 = r_2 = 1/2$ , el diámetro del círculo de colisiones es  $P$  y el ángulo inscrito por  $P_1$  y  $P_2$  es de  $180^\circ$ , por lo que el ángulo entre los ímpetus  $P_1$  y  $P_2$  es de  $90^\circ$ . Los cuerpos se mueven a  $90^\circ$  uno del otro después del choque.

bola proyectil, es decir, si no se da “efecto” de rotación a la bola proyectil, ésta y la bola blanco rebotan a  $90^\circ$  después del choque.

Volviendo al caso general, dos colisiones son particularmente importantes: la colisión frontal, cuando el ángulo de deflexión del blanco es  $\theta_2 = 0$ ; y la colisión tangencial, cuando el ímpetu del proyectil no cambia por la colisión (Fig. 8). En la frontal, de la Ec. (6),  $X = \sqrt{1 - 4r_1r_2} = \sqrt{1 - 4r_1(1 - r_1)} = 1 - 2r_1 = r_2 - r_1$ , si  $r_1 < r_2$ ; o  $X = \sqrt{1 - 4r_1r_2} = \sqrt{1 - 4r_2(1 - r_2)} = 1 - 2r_2 = r_1 - r_2$ , si  $r_2 < r_1$  (Fig. 9). En la colisión tangencial  $X = 1$ , por lo que de la Ec. (7) se debe tener  $\cos \theta_2 = 0$  y  $\theta_2 = 90^\circ$  tanto para  $r_1 < r_2$  como para  $r_2 < r_1$ .

Estos valores se obtienen también fácilmente con los diagramas y círculos de colisiones. Llevando el vértice del ángulo inscrito por  $X$  y  $Y$  a los extremos del diámetro  $2r_2I$ , en el círculo de colisiones se encuentra que el ímpetu  $P_1$  del proyectil después de un choque frontal es  $X = (r_1 - r_2)I$ ; o bien,  $P_1 = (r_1 - r_2)P$ ; y el del blanco es  $Y = 2r_2I$ , o bien  $P_2 = 2r_2P$ .

Otro caso interesante es el choque frontal de dos cuerpos de masas iguales; esto es,  $M_1 = M_2$  y  $r_1 = r_2 = 1/2$ . El ímpetu final del proyectil es  $P_1 = 0$ , se queda quieto después de chocar, y el del blanco es  $P_2 = P$ ; se lleva todo el ímpetu. No es posible “rebotar” una bola de billar en otra porque tienen masas iguales; a menos, desde luego, que la bola proyectil lleve rotación inversa a su ímpetu inicial. El difícil golpe de *masser* en billar, sosteniendo el taco vertical al momento de impulsar la bola, tiene este propósito y no el de “llevarse el paño” con el taco, como frecuentemente pasa al intentar este golpe.

Las colisiones tangenciales, que en realidad no son colisiones porque el proyectil pasa “librando” apenas al blanco, se encuentran en el diagrama de colisiones en el límite de

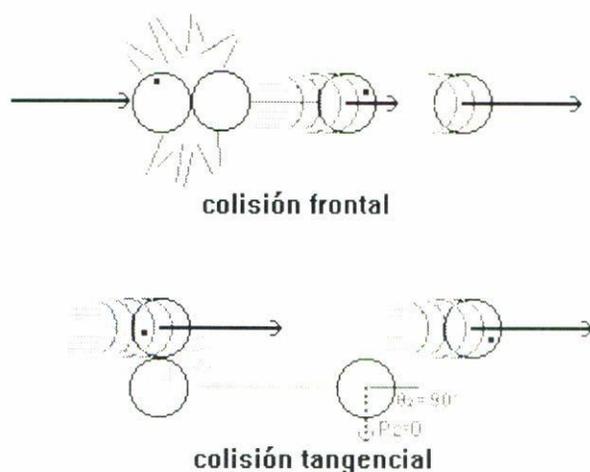


FIGURA 8. En una colisión frontal el blanco se mueve en la dirección de  $\mathbf{P}$ ;  $\theta_2 = 0$ . En una colisión tangencial el ímpetu  $\mathbf{P}_1$  del proyectil no cambia.

**colisiones frontales**

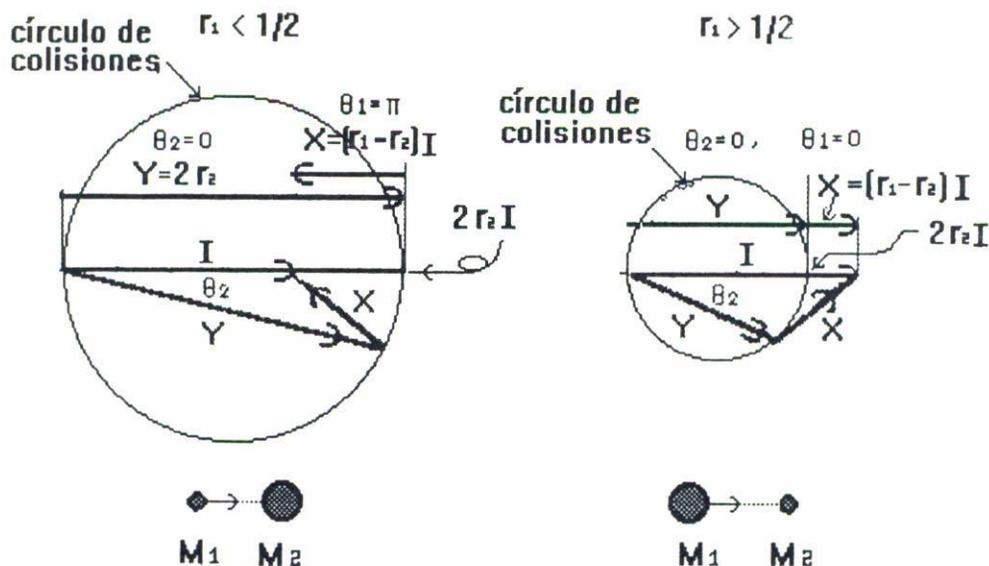


FIGURA 9. El ímpetu del proyectil en una colisión frontal es  $\mathbf{X} = (r_2 - r_1)\mathbf{I}$ ; o bien,  $\mathbf{P}_2 = (r_2 - r_1)\mathbf{P}$ , y el del blanco es  $\mathbf{Y} = r_2\mathbf{I}$  o bien,  $\mathbf{P}_2 = r_2\mathbf{P}$ .

acercamiento del vértice del ángulo inscrito por  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{Y}$  al origen de  $\mathbf{I}$ ; o bien del vértice del ángulo inscrito por  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$  al origen de  $\mathbf{P}$  (Fig. 10). El proyectil se lleva todo el ímpetu  $\mathbf{P}$ . El blanco no se lleva ímpetu, ni energía cinética; y aunque en principio es deflected a un ángulo de  $90^\circ$ , tiene velocidad nula y no se mueve. Este es otro golpe difícil en billar:

## colisiones tangenciales

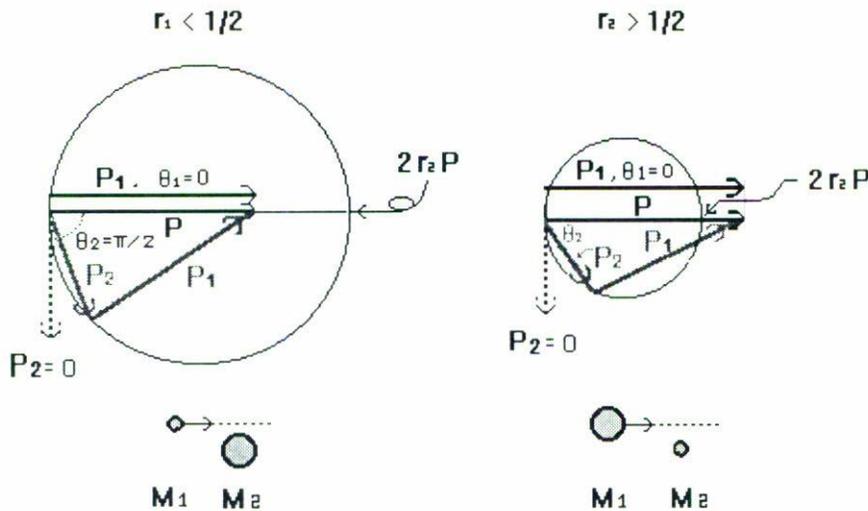


FIGURA 10. En una colisión tangencial el ímpetu del proyectil es  $P_1 = P$ . El del blanco es en dirección a  $90^\circ$  pero de magnitud cero.

desviar la bola blanco a  $90^\circ$  de la dirección del ímpetu inicial del proyectil. Se consigue aproximadamente tocando apenas al blanco, "tomando muy poca bola". Dando un poco de rotación, *efecto*, golpeando por afuera del centro del blanco se puede conseguir el ángulo recto completo.

## 2. ESFERAS RÍGIDAS

La conservación del ímpetu y de la energía cinética no son condiciones suficientes para predecir completamente el resultado de la colisión elástica de dos cuerpos, solamente limitan los ímpetus  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{Y}$  a los que cierran un triángulo con el ímpetu total  $\mathbf{I}$  en el círculo de colisiones de la Fig. 5, o, equivalentemente, limitan los valores de 3 de las cantidades  $X$ ,  $Y$ ,  $\theta_1$  y  $\theta_2$  a los que satisfacen 3 de las Ecs. (5) a (8). Para determinar completamente el resultado de la colisión elástica es necesaria una condición más sobre  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{Y}$ , o sobre las cantidades  $X$ ,  $Y$ ,  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . Si los cuerpos que chocan son esferas rígidas, esto es, que no se deforman en la colisión, esa otra condición se obtiene de que sólo la componente del ímpetu total  $\mathbf{I}$  perpendicular a la superficie de las esferas en su punto de contacto es efectiva para transmitir ímpetu a la esfera blanco si no hay fricción entre ellas; lo que es de esperarse en colisiones elásticas (Fig. 11). Como el radio por un punto de la esfera es normal a su superficie, se sigue que el ímpetu  $Y$  de la esfera blanco tiene

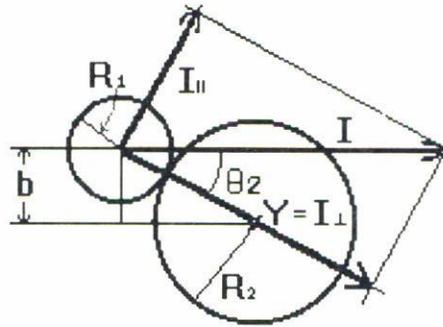


FIGURA 11. En la colisión elástica de dos esferas la componente del ímpetu normal a la superficie de contacto, única efectiva en transmitir ímpetu al blanco, está a lo largo de la línea de los centros. Ésta es también la dirección  $\theta_2$  del ímpetu del blanco.

la dirección de la línea que une los centros de las esferas. Esto es, determina el valor del ángulo  $\theta_2$ , el que, a su vez, determina totalmente a  $\mathbf{X}$ . El ángulo  $\theta_2$ , en términos de los radios  $R_1$  y  $R_2$  de las esferas y de la distancia  $b$  entre el ímpetu  $\mathbf{I}$  y el centro de la esfera blanco, está dado por

$$\text{sen } \theta_2 = \frac{b}{R_1 + R_2}. \tag{9}$$

La cantidad  $p = b/(R_1 + R_2)$  se llama parámetro de impacto. Ocurre un choque sólo si  $0 \leq p \leq 1$ . Las Ecs. (5), (6), (8) y (9), en términos de  $p$ , determinan por completo el resultado de la colisión. Esto es,

$$\text{sen } \theta_2 = p, \tag{10}$$

$$Y = 2r_2 \sqrt{1 - p^2}, \tag{11}$$

$$X = \sqrt{1 - 4r_1 r_2 (1 - p^2)}, \tag{12}$$

$$\text{sen } \theta_1 = \frac{2r_2 p \sqrt{1 - p^2}}{\sqrt{1 - 4r_1 r_2 (1 - p^2)}}. \tag{13}$$

2.1. Análisis de la colisión en componentes

Veremos ahora que el efecto de la colisión elástica resulta de los efectos separados que producen en el blanco las componentes tangencial y normal del ímpetu total a la superficie de contacto; y puesto que la componente tangencial no produce ningún efecto, la

colisión elástica depende totalmente del efecto de la colisión con la componente normal a la superficie de contacto.

La Ec. (9), junto con tres de las Ecs. (5), (6), (7) y (8) determinan por completo las cantidades  $X$ ,  $Y$ ,  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , que a su vez definen los ímpetus  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$ . Del diagrama y del círculo de colisiones se encuentra, como en la Ec. (5), que  $Y = 2r_2 \cos \theta_2$  y que las componentes de  $\mathbf{X}$ , paralela y perpendicular a la superficie en el punto de contacto, son de magnitudes  $X_{\parallel} = \sin \theta_2$  y  $X_{\perp} = (r_2 - r_1) \cos \theta_2$  (Fig. 12). La componente  $X_{\parallel}$  es el ímpetu que tendría si hubiera chocado tangencialmente con el ímpetu  $I \sin \theta_2 = \sin \theta_2$ , se lo habría llevado todo, y la componente  $X_{\perp}$  es el ímpetu que hubiera adquirido el proyectil si hubiera chocado en el blanco en colisión frontal con ímpetu  $I \cos \theta_2 = \cos \theta_2$ . Resulta, pues, que la colisión elástica de dos esferas se puede considerar compuesta de dos colisiones. Una tangencial con la componente  $P \sin \theta_2$ , del ímpetu total paralela a la superficie de contacto. De ésta no se trasmite nada a la bola blanco; la bola proyectil se lleva  $(P_1)_{\perp} = P \sin \theta_2$ . La otra, frontal con la componente del ímpetu total  $P \cos \theta_2$  perpendicular a la superficie de contacto. Como en cualquier colisión frontal (Fig. 9) de ésta se trasmite el ímpetu  $P_2 = 2r_2(P \cos \theta_2)$  a la bola blanco y  $(P_1)_{\parallel} = (r_2 - r_1)(P \cos \theta_2)$  al proyectil. El ímpetu total del blanco es, pues,  $P_2 = Pr_2 \cos \theta_2$ , de acuerdo con la Ec. (5) y el del proyectil es

$$\begin{aligned} P_1 &= \sqrt{(P \sin \theta_2)^2 + ((r_2 - r_1)P \cos \theta_2)^2} \\ &= P \sqrt{\sin^2 \theta_2 + (1 - 2r_1)^2 \cos^2 \theta_2} \\ &= P \sqrt{1 - 4r_1(1 - r_1) \cos^2 \theta_2} \\ &= P \sqrt{1 - 4r_1 r_2 \cos^2 \theta_2}; \end{aligned}$$

igual al de la Ec. (6).

### 3. ESFERAS RÍGIDAS DE MASAS DIFERENTES

El ímpetu  $\mathbf{X}$ , resultante para el proyectil en una colisión, se presenta de una manera muy útil invirtiendo los vectores en el círculo de colisiones de la Fig. 5. Esta operación no altera la relación triangular de los ímpetus (Figs. 2 y 3), ni la de la conservación de la energía [Ecs. (3) y (4)]. Haciendo esto, todos los posibles ímpetus resultantes para el proyectil tienen como origen el nuevo origen del ímpetu total  $\mathbf{I}$ , forman con este vector el ángulo  $\theta_1$  y terminan en el círculo de colisiones. La Fig. 13, construida de esta manera a partir de la Fig. 6 ( $r_1 < 1/2$ ), muestra el ímpetu  $\mathbf{X}$  del proyectil, resultante de la colisión de dos cuerpos con  $r_1 = 1/4$  y  $r_2 = 3/4$ . De la Fig. 5 se deduce que el radio del círculo es  $r_2$ , su centro está a la distancia  $r_1$  del nuevo origen de  $\mathbf{X}$  y en un sistema cartesiano de coordenadas su ecuación es

$$x^2 + (y - r_1)^2 = (r_2)^2. \quad (14)$$

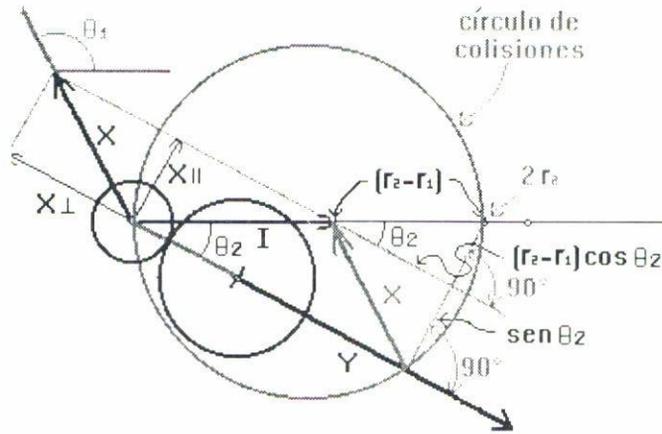


FIGURA 12. La colisión elástica de dos esferas puede considerarse compuesta por dos colisiones elásticas. Una colisión tangencial con la componente  $I_{\parallel}$ , o bien  $P_{\parallel}$ , del ímpetu total paralela a la superficie de contacto y una colisión frontal con la componente perpendicular  $I_{\perp}$ , o bien  $P_{\perp}$ , del ímpetu total perpendicular a esa superficie.

Los ímpetus con proyecciones 0, 1/4, 1/2, 3/4 y 1 sobre el diámetro, se muestran también en la figura. Si los cuerpos en colisión son esferas rígidas,  $\text{sen } \theta_2 = p$ ,  $\text{cos } \theta_2 = \sqrt{1 - p^2}$ , y de la Ec. (12),  $X = \sqrt{1 - 4r_1 r_2 (1 - p^2)}$ . De la Fig. 13,  $x = X \text{sen } \theta_1$ , y de las Ecs. (12) y (13) se deduce  $x = 2r_2 p \sqrt{1 - p^2}$ . Sustituyendo esta expresión en la ecuación del círculo [Ec. (14)], se obtiene para  $y$  la expresión

$$y = r_1 + r_2(2p^2 - 1), \tag{15}$$

o para  $p$ ,

$$p = \sqrt{\frac{y - r_1 + r_2}{2r_2}}. \tag{16}$$

Con las Ecs. (12), (15) y (16) se calculan la magnitud  $X$  del ímpetu y el valor del parámetro de impacto  $p$  que corresponde a cada  $y$ . El valor correspondiente del ángulo de desviación del proyectil se calcula de

$$\begin{aligned} \text{cos } \theta_1 &= \frac{y}{X} \\ &= \frac{r_1 + r_2(2p^2 - 1)}{\sqrt{1 - 4r_1 r_2 (1 - p^2)}}, \end{aligned} \tag{17}$$

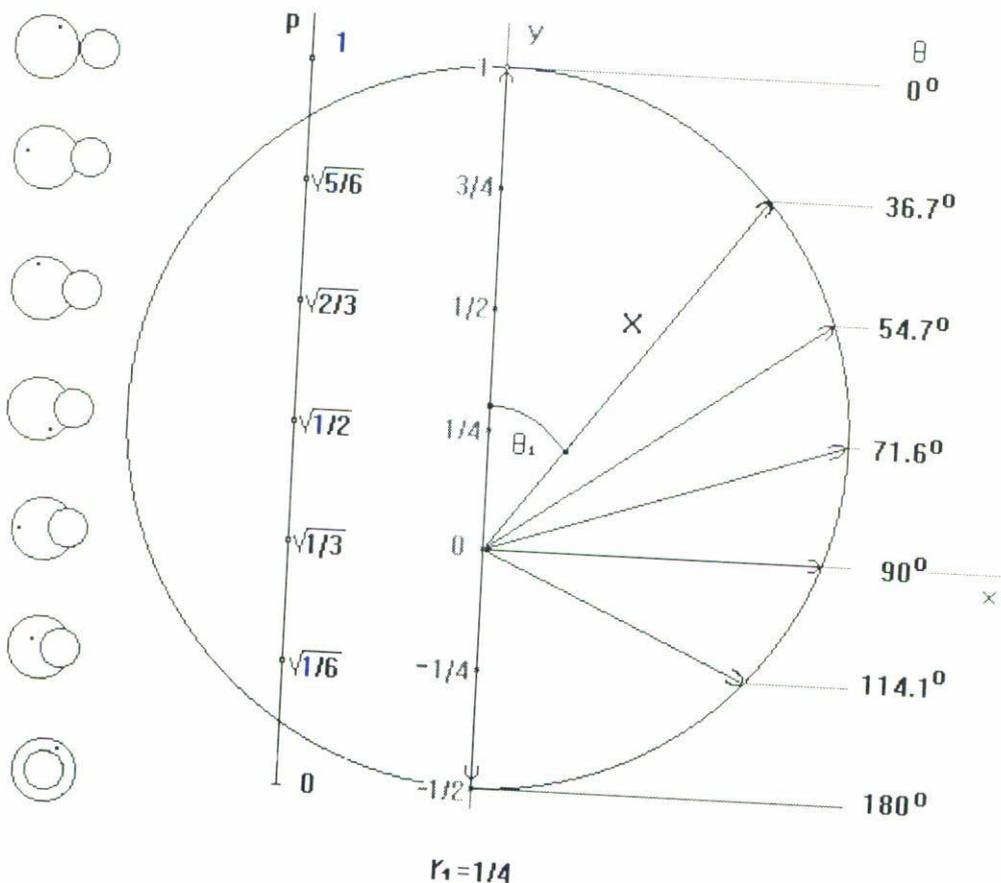


FIGURA 13. Diagrama del ímpetu final del proyectil en un choque entre esferas rígidas de masas diferentes en proporción de 3 a 1 a favor del blanco. El proyectil puede ser dispersado en cualquier dirección, inclusive hacia atrás. Esta retrodispersión fue observada por Ernest Rutherford al bombardear una lámina de oro con partículas  $\alpha$ , de ella concluyó que los núcleos atómicos son mucho más pequeños y masivos que el resto del átomo a que pertenecen. El parámetro de impacto y la posición de las esferas antes del choque se muestran en el eje  $p$  y en las figuras.

con los resultados que aparecen en la Fig. 13. La primera columna de esta figura muestra también las posiciones de las esferas, antes de la colisión, vistas a lo largo del ímpetu total  $P$ , que también es la línea de tiro del proyectil (la *bola blanca*). Los radios de las esferas, suponiéndolas de la misma densidad, están en proporción a la raíz cúbica de sus masas; o sea,  $R_2/R_1 = (M_2/M_1)^{1/3} = (r_2/r_1)^{1/3} = (3)^{1/3} = 1.44$ . La distancia entre los centros de las esferas corresponde, en cada punto, al valor del parámetro de impacto; es decir,  $b = p(R_1 + R_2)$ . Es interesante notar de la Fig. 13 que el proyectil puede "rebotar"; o sea, puede ser dispersado hacia atrás con ángulos de desviación mayores de  $90^\circ$ . Esta retrodispersión ocurre sólo si la masa del blanco es mayor que la del proyectil. Se llama retrodispersión de Rutherford porque así descubrió Ernest Rutherford en 1911 la existencia de los núcleos atómicos al observarla dispersando partículas  $\alpha$  por una delgadísima lámina de oro. Algunas de las partículas  $\alpha$  eran retrodispersadas a ángulos muy grandes, indicando

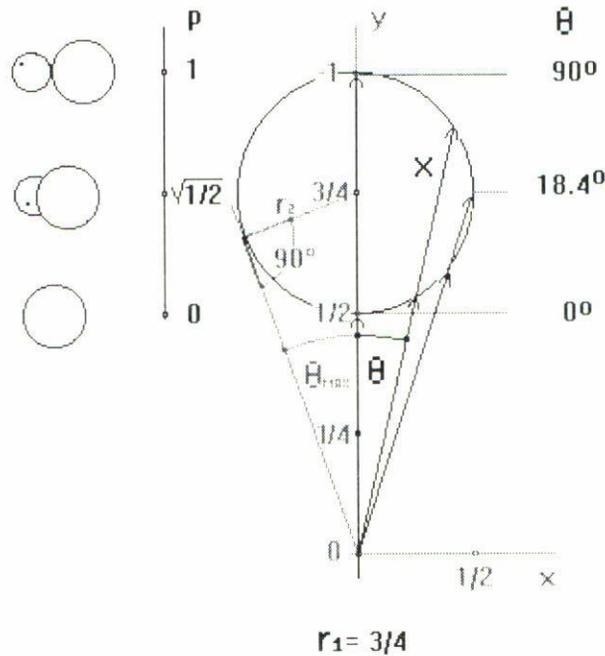


FIGURA 14. Diagrama del ímpetu final del proyectil en un choque entre esferas rígidas de masas diferentes en proporción de 3 a 1 a favor del proyectil. Los ángulos de dispersión del proyectil se encuentran entre  $0^\circ$  y  $\sin^{-1}(r_2/r_1)$ . Existen dos valores de la magnitud del ímpetu del proyectil para cada ángulo de dispersión, excepto para el correspondiente al máximo que es sólo de magnitud  $X_{\max} = \sqrt{r_1^2 - r_2^2}$ .

que habían chocado con otras partículas mucho más masivas, unas 50 veces más pesadas. De este simple experimento de colisiones se obtuvo uno de los más grandes descubrimientos de la física moderna.

La Fig. 14 muestra el mismo diagrama de ímpetus cuando la masa del proyectil es mayor que la del blanco. Se obtiene invirtiendo los vectores del ímpetu en la Fig. 6 ( $r_1 > 1/2$ ). El origen de los ímpetus está ahora fuera del círculo de colisiones, lo que indica que no puede haber retrodispersión en este caso. También de esta figura se ve fácilmente que existen dos magnitudes del ímpetu para cada ángulo de desviación  $\theta_1$ , excepto para el ángulo máximo de dispersión del proyectil que corresponde a sólo una. De la Fig. 14 se deduce que el valor de este ángulo es  $\theta_{\max} = \sin^{-1}(1/3) = 19.47^\circ$ . El ángulo máximo de desviación de un trailer de 5 Ton por un VW de 0.5 Ton es  $\theta_{\max} = \sin^{-1}(0.5/5) = \sin^{-1}(0.1) = 5.7^\circ$ ;... se lo "lleva de corbata".

#### 4. ESFERAS RÍGIDAS IGUALES

Los choques entre cuerpos de masas iguales ocurren en muchos sistemas de interés, como las moléculas de gases homogéneos, o en modelos de gases de electrones. Su ejemplo más conocido e ilustrativo es entre esferas rígidas iguales en el juego de billar. Como en los casos anteriores de esferas rígidas de masas diferentes el resultado de una colisión elástica

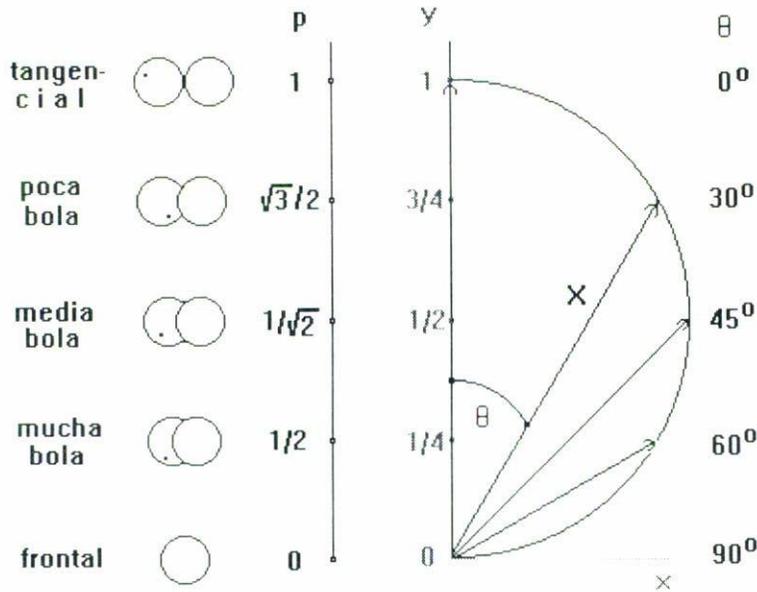


FIGURA 15. Diagrama del ímpetu final del proyectil en un choque entre esferas rígidas de masas iguales. El vector **X** representa en magnitud y dirección el ímpetu final de la bola proyectil en colisión con una bola estacionaria. El parámetro de impacto,  $p = b/D$ , de la colisión se encuentra en el eje  $p$ ,  $b$  es la distancia entre centros y  $R$  el radio de las bolas.

se puede predecir completamente en términos del parámetro de impacto  $p$ . Inviertiendo los vectores de ímpetu en la Fig. 7 se encuentra que los vectores de ímpetu final del proyectil **X** son las secantes del círculo de colisiones con su origen común sobre el círculo, como se muestra en la Fig. 15. El diámetro del círculo es igual a la magnitud del ímpetu total  $I = 1$ . Además, puesto que para esferas iguales  $r_1 = r_2 = 1/2$ , en un sistema cartesiano la ecuación del círculo es, de la Ec. (14),

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Las relaciones de los ímpetus con el parámetro de impacto son particularmente simples. Se pueden obtener sustituyendo los valores  $r_1 = r_2 = 1/2$  en las Ecs. (10) a (13) y (15) a (17), o bien directamente notando que en los choques de dos esferas rígidas iguales de radio  $R$  y diámetro  $D$ , como en el billar,  $\text{sen } \theta_2 = b/(wR) = b/D = p$  (Ec. (9) y Fig. 11), por lo que  $\text{cos } \theta_2 = \sqrt{1 - p^2}$  y, además, que por ser iguales las masas,  $\theta_1 = 90^\circ - \theta_2$  y se tiene  $\text{sen } \theta_1 = \text{cos } \theta_2 = \sqrt{1 - p^2}$  y  $\text{cos } \theta_1 = \text{sen } \theta_2 = p$  (Fig. 7). La magnitud de  $Y = P_2/P = \text{cos } \theta_2 = \sqrt{1 - p^2}$  y la de  $X = P_1/P = \text{cos } \theta_1 = p$ . La proyección de  $X$  sobre el diámetro del círculo de colisiones es, pues,  $y = X \text{cos } \theta_1 = p \cdot p = p^2$ . De las relaciones  $\text{cos } \theta_1 = p$  y  $y = p^2$  se obtiene  $\text{cos } \theta_1 = \sqrt{y}$  y el parámetro de impacto necesario para producir un ángulo de desviación deseado, como se muestra en la Fig. 13 para los ángulos de  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  y  $90^\circ$ , que corresponden a las proyecciones de  $X$ , 1,  $3/4$ ,  $1/2$ ,  $1/4$  y 0, y a los parámetros de impacto  $p$ , 1,  $\sqrt{3}/2$ ,  $1/\sqrt{2}$ ,  $1/2$  y 0, respectivamente, como se

muestra en esa figura. Las posiciones de las bolas de billar a lo largo de la línea de tiro y antes de éste se muestran a la izquierda. La *bola blanca* es el proyectil.

## 5. CONCLUSIONES

Este método geométrico es muy objetivo para estudiar colisiones sin las complicaciones del álgebra y la trigonometría que resultan del manejo directo de las ecuaciones de conservación del ímpetu y de la energía. Se adapta con facilidad para observar colisiones de todo tipo y sus principales características en una mesa de billar. Las colisiones entre cuerpos de distintas masas y sus diversos efectos, dispersión de Rutherford, ángulo máximo de desviación, etc., se pueden generar en un juego de billar con bolas especiales del mismo tamaño, pero diferentes masas, construido en algún museo de la ciencia que se tenga a la mano. Sería interesante emplearlo también para un nuevo tipo de billar "sólo para físicos" en el que la carambola se logra escogiendo primero la bola con la masa adecuada para dar el ángulo correcto de desviación del proyectil; por ejemplo, hacer una carambola a un ángulo de  $180^\circ$  sin dar *masser* escogiendo una bola proyectil de menor masa que la del blanco. También sería interesante simular el experimento de Rutherford en un juego de *pool* con bolas del mismo tamaño pero de masas muy diferentes, observando la retrodispersión de algunos proyectiles y deduciendo de ésta la masa de las bolas blanco más pesadas.

## REFERENCIAS

1. H. Margenau, W. Watson y C.G. Montgomery, *Physics, Principles and Applications*, McGraw-Hill Book Co., Nueva York (1953).
2. S. Gartenhaus, *Physics, Basic Principles*, Holt, Rinehart and Winston, Nueva York (1977).
3. D. Halliday y R. Resnick, *Physics for Students of Science and Engineering*, John Wiley and Sons, Nueva York (1961).