Enseñanza *Revista Mexicana de Física* **40**, *No. 3 (1994) 476–498*

Introducción a la cuantización de teorías de norma empleando el método BRST-BFV

ANTONIO GARCÍA ZENTENO, LUIS F. URRUTIA, J. DAVID VERGARA
Instituto de Ciencias Nucleares
Universidad Nacional Autónoma de México
Apartado postal 70-543, 04510 México, D.F., México

Y

RODOLFO P. MARTÍNEZ
Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México
Circuito Exterior C.U., 04510 México D.F., México

Recibido el 6 de octubre de 1993; aceptado el 15 de marzo de 1994

RESUMEN. Se presenta una introducción a la cuantización de teorías de norma empleando el método hamiltoniano de Batalin-Fradkin-Vilkovisky (BRST-BFV), que tiene como característica esencial ser independiente de la condición de norma. Además, este método generaliza el método de Faddeev-Popov, ya que permite construir una teoría cuántica unitaria a partir de cualquier teoría de norma conocida. El procedimiento se ilustra con el cálculo del propagador para el rotor rígido bidimensional reformulado como una teoría de norma.

ABSTRACT. We present a pedagogical introduction to the quatization of gauge theories using the Hamiltonian method of Batalin-Fradkin-Vilkovisky (BRST-BFV). This method is independient of the gauge choice and generalizes the Faddeev-Popov method, since it allows the construction of a unitary quantum theory satarting from any gauge theory. The method is illustrated with the calculation of the quantum mechanical propagator of the two dimensional rigid rotor, which is reformulated as a gauge theory.

PACS: 11.15; 03.70; 12.10

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas fundamentales de la física teórica es la cuantización de las teorías de norma, ya que éstas abarcan todas las interacciones fundamentales desde la gravitación con la relatividad general, hasta el modelo estándar $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. A la fecha existen muchos métodos que se han propuesto para cuantizar dichas teorías. Sin embargo, hasta ahora ninguno ha sido exitoso para obtener una teoría cuántica físicamente consistente de la gravitación. Entre éstos se encuentran, por ejemplo, el "método de Dirac" [1], y el "método de la cuantización de lazos" [2]. Uno de los métodos de cuantización más exitosos es el llamado "BRST-BFV" (las iniciales son de los descubridores de la simetría BRST: Bechi, Rouet, Stora, Tyutin, junto con los que desarrollaron el método de cuantización: Batalin, Fradkin y Vilkovisky) [3], ya que es posible aplicarlo desde las teorías más simples, como la partícula relativista, hasta teorías tan complicadas como la supergravedad o las teorías topológicas. Entre las ventajas que posee este método se encuentran las siguientes: (i) su aplicación es muy sistemática, (ii) es independiente de las condiciones de norma, y (iii) produce una teoría cuántica unitaria a partir de cualquier teoría de norma conocida. Este método requiere de la introducción de variables adicionales llamadas "fantasmas". El objetivo es obtener una descripción más simple de la dinámica al usar la integral de trayectoria que define la evolución del sistema. Otra de sus características es que rompe la covariancia explícita de los modelos a los cuales se aplica, dado que es un método hamiltoniano. Esto tiene como consecuencia que en algunos casos la interpretación física de los resultados obtenidos sea menos transparente, como sucede en el caso de la relatividad general. Para resolver este problema Batalin y Vilkovisky (BV) [4], propusieron una versión lagrangiana del método, la cual resulta ser explícitamente covariante. Sin embargo, esta versión tiene el problema de que no existe una forma precisa de evaluar la medida de la integral funcional, y de aquí el operador de evolución del sistema, mientras que en el método de BRST-BFV éste se encuentra completamente determinado. De este modo las dos versiones se complementan. En este artículo analizaremos el método hamiltoniano, dejando para un trabajo posterior el formalismo lagrangiano [5].

En la Sec. 2 revisaremos el método de Dirac, dado que éste es un excelente punto de partida para comprender lo que es una teoría de norma desde el punto de vista hamiltoniano y posteriormente proceder a su cuantización. En la Sec. 3 introducimos primero la simetría BRST vista como un reflejo cuántico de la simetría de norma. En seguida aplicamos esta simetría para construir el método de BRST-BFV. Dado el gran éxito que ha tenido este método, tanto recuperando resultados ya conocidos, como proporcionando una manera consistente de cuantizar teorías donde los métodos previamente conocidos han fallado [6], es tentador aceptar la idea de promover la invariancia BRST al nivel de postulado fundamental para la cuantización. Este postulado permite construir el lagrangiano cuántico completo como la función más general de los campos físicos y de los fantasmas que sea invariante bajo BRST. Este procedimiento naturalmente refleja a nivel cuántico la estrategia empleada para determinar el lagrangiano clásico a partir del principio de invariancia de norma. Dentro de este contexto entonces, cobra gran importancia la pregunta de cómo reformular todos los esquemas previos de cuantización en términos de dicha simetría.

Por último, en la Sec. 4 se presenta el ejemplo del rotor rígido bidimensional. Este ejemplo cumple tres propósitos que son: (i) ilustrar el método de Dirac, (ii) ilustrar el método BRST propiamente tal y (iii) ilustrar la idea de que siempre es posible reformular una teoría con constricciones de segunda clase como una teoría de norma, es decir únicamente con constricciones de primera clase [7], llevando a cabo su cuantización según el método BRST-FV. Una motivación más detallada de este punto de vista se da al final de la Sec. 3, donde ya se han presentado los antecedentes necesarios para su mejor comprensión.

2. Cuantización de Dirac

El método hamiltoniano de cuantización de BRST-BFV puede considerarse como una extensión del método de Dirac, por lo cual revisaremos primero éste, tanto por fines de notación como para fijar ideas.

El primer punto a considerar, es comprender desde el punto de vista hamiltoniano, qué es lo que se entiende por una teoría de norma. Toda teoría de norma está caracterizada por un lagrangiano singular, es decir,

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) = 0. \tag{2.1}$$

Esto significa que no todas las aceleraciones se encuentran determinadas por las ecuaciones de movimiento, y en consecuencia nuestra teoría posee cierta arbitrariedad, la cual se ve reflejada en que las soluciones de las ecuaciones de movimiento contienen parámetros arbitrarios. De este modo, los observables de la teoría serán solamente aquellas combinaciones de variables dinámicas que son independientes de dichos parámetros arbitrarios. Esto precisamente es lo que se entiende por un objeto invariante de norma. Aquí valdría la pena preguntarse si la aseveración inversa es correcta, es decir, si toda teoría cuyo lagrangiano es singular es una teoría de norma. Como veremos a continuación la respuesta es negativa. La Ec. (2.1) nos dice por otra parte que no todos los momentos $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ están determinados por las velocidades, es decir, que existen m_1' relaciones del tipo

$$\phi(p,q)_{A_1} \approx 0, \tag{2.2}$$

donde $\approx$ significa que estas relaciones son cero una vez que se hayan evaluado todos los paréntesis de Poisson donde ellas aparezcan. Daremos el nombre de constricciones primarias a estas relaciones. El número de constricciones primarias independientes es igual a la dimensión de la matriz en (2.1) menos el rango de la misma. Este número lo denotaremos por m_1. A continuación, por simplicidad, supondremos que todas las constricciones primarias son independientes y que son bosónicas, aunque el formalismo también puede desarrollarse en casos más generales [8]. Las constricciones (2.2) definen una subvariedad del espacio fase llamada superficie de constricción, sobre la cual está restringido el movimiento.

La siguiente etapa en el análisis es introducir el hamiltoniano canónico

$$H_0 = \dot{q}^j p_j - L. \tag{2.3}$$

El hamiltoniano definido en (2.3) no está univocamente determinado como una función de momentos y coordenadas, ya que las variaciones en estas variables no son todas independientes sino que deben estar restringidas para preservar las constricciones primarias (2.2). En consecuencia el hamiltoniano (2.3) está bien definido únicamente sobre la superficie de constricción y por lo tanto existe arbitrariedad para extenderlo fuera de ésta. Así podemos definir un nuevo hamiltoniano dado por

$$H_1 = H_0 + \lambda^{A_1}\phi_{A_1}, \tag{2.4}$$

donde A_1 rotula las constricciones primarias independientes y λ^{A_1} son multiplicadores de Lagrange, que son arbitrarios hasta este momento.

El paso siguiente en la consistencia del método es asegurarse que la superficie de constricción se preserve en el tiempo. Esto implica pedir que $\dot{\phi}_{A_1} \approx 0$, es decir, que

$$\{\phi_{A_1}, H_1\} = V_{A_1}^{B_1}\phi_{B_1} + V_{A_1}^{A_2}\phi_{A_2} \approx 0, \tag{2.5}$$

donde $\{A, B\}$ es el paréntesis de Poisson de las cantidades A y B. En esta etapa podrían aparecer nuevas constricciones ϕ_{A_2}, llamadas secundarias, que son independientes de las primarias. Si en el proceso se obtienen constricciones secundarias, es necesario pedir que éstas también se conserven en el tiempo, como resultado de lo cual todavía puede surgir otra generación de constricciones. El proceso se continúa hasta que ya no se encuentren nuevas constricciones. Una vez que se tenga la colección completa de constricciones, se definen las variables de primera clase como aquellas que tienen paréntesis de Poisson ≈ 0 con todas las constricciones. Es decir, F es de primera clase si

$$\{F, \phi_A\} = V_A^B(p,q)\phi_B, \tag{2.6}$$

con el índice $A = 1, \ldots, M$, donde $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_N$, con m_n siendo el número de constricciones de la n–ésima generación. Las cantidades de segunda clase son todas aquellas que no satisfacen esta condición. En consecuencia, es posible definir como constricciones de primera clase G_a a todas aquellas que satisfagan la relación

$$\{G_a, \phi_B\} = C_{aB}^{\ \ C}(p,q)\phi_C, \tag{2.7}$$

con $a = 1, \ldots, p$. De este modo, las funciones de estructura $C_{aB}^{\ \ C}(p,q)$, pueden depender de las coordenadas y los momentos, es decir, no necesariamente tenemos un algebra de Lie. En el caso de las constricciones de primera clase no es posible determinar los multiplicadores de Lagrange asociados a ellas y éstos son los parámetros arbitrarios que aparecen en la solución de las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, para el caso de constricciones de segunda clase, χ_α, es posible determinar dichos multiplicadores debido a la existencia de la matriz

$$C_{\alpha\beta} = \{\chi_\alpha, \chi_\beta\}, \tag{2.8}$$

cuyo determinante es diferente de cero y por lo tanto invertible. Esto permite mostrar que todos los multiplicadores de Lagrange asociados a estas constricciones pueden ser determinados. En consecuencia, cuando se tienen sólo constricciones de segunda clase no existe libertad de norma aun cuando el lagrangiano es singular. Así, desde el punto de vista hamiltoniano, una teoría de norma es aquélla que tiene al menos una constricción de primera clase. En lo que respecta a las constricciones de segunda clase, suponiendo que son bosónicas, la matriz (2.8) implica que éstas deben de ser un número par, dado que de lo contrario esta matriz no sería invertible ya que es antisimétrica. Las constricciones de segunda clase siempre pueden ser tratadas como de primera clase si uno incluye variables adicionales al problema de tal manera que la matriz $C_{\alpha\beta}$ no sea invertible. Posteriormente veremos un ejemplo de cómo se puede llevar a cabo esta extensión. Así, de aquí en adelante consideraremos que existen solamente constricciones de primera clase.

De todas las constricciones de primera clase, de acuerdo al hamiltoniano H_1, sólo las primarias son generadoras de transformaciones de norma, ya que sólo ellas tienen asociado un multiplicador de Lagrange. Sin embargo, Dirac postuló que todas las constricciones de primera clase, incluyendo las secundarias y las de orden superior, generan transformaciones de norma. Este postulado se conoce como la conjetura de Dirac y es válida en todos los sistemas físicos conocidos. Sin embargo, existen sistemas un poco patológicos que son contraejemplos de esta conjetura. Hasta ahora existen varias demostraciones de la conjetura de Dirac bajo ciertas restricciones [8]. Como aquí trataremos sistemas que tienen algún contenido físico, asumiremos que la conjetura de Dirac es válida, es decir, postularemos que el cambio de una función arbitraria de momentos y coordenadas $F(p,q)$ bajo una transformación de norma, está dado por

$$\delta F = \{F, \epsilon^a G_a\}, \tag{2.9}$$

donde recordamos que el índice a rotula todas las constricciones de primera clase. El parámetro de la transformación, $\epsilon^a(q,p,t)$, puede depender de las coordenadas del espacio fase y del tiempo, aunque lo más común es que se le considere sólo como función del tiempo. Si tomamos en cuenta que todas las constricciones de primera clase son generadores de transformaciones de norma podemos escribir, en lugar del hamiltoniano H_1, otro hamiltoniano que tome en cuenta la arbitrariedad inherente al extenderlo fuera de la superficie de constricción. Este hamiltoniano se conoce como el hamiltoniano extendido y está dado por

$$H_{\mathrm{E}} = H_0 + \lambda^a G_a. \tag{2.10}$$

Las ecuaciones de movimiento, sobre la superficie de constricción, asociadas a este hamiltoniano son

$$\dot{q} = \{q, H_{\mathrm{E}}\} = \frac{\partial H_0}{\partial p} + \lambda^a \frac{\partial G_a}{\partial p}, \tag{2.11a}$$

$$\dot{p} = \{p, H_{\mathrm{E}}\} = -\frac{\partial H_0}{\partial q} - \lambda^a \frac{\partial G_a}{\partial q}. \tag{2.11b}$$

Las ecuaciones de movimiento anteriores, junto con las constricciones $G_a \approx 0$, pueden obtenerse a partir de la acción

$$S = \int_a^b (p\dot{q} - H_0 - \lambda^a G_a), \tag{2.12}$$

variando con respecto a p, q y λ^a. Esta acción va a ser importante cuando queramos hacer contacto con el método de cuantización usando integrales de trayectoria.

Como los n multiplicadores de Lagrange λ^a son arbitrarios, uno puede imponer n condiciones de norma para determinarlos

$$N_a(\lambda, p, q) = 0.$$

Ya que deseamos que dichas condiciones fijen completamente la norma, éstas deben satisfacer la relación

$$\det\{G_a, N_b\} \neq 0$$

de manera tal que la matriz $\{G_a, N_b\}$ sea invertible y de este modo puedan determinarse todos los multiplicadores de Lagrange. Debe notarse que el imponer condiciones de norma es equivalente a transformar al conjunto (G_a, N_a) en constricciones de segunda clase.

A nivel cuántico, los pasos fundamentales del método de Dirac son los siguientes. El primer punto es promover las constricciones de primera clase a nivel de operadores en el espacio de Hilbert del problema. Posteriormente se postula que un estado $|\psi\rangle$ es *físico* sólo si es aniquilado por éstas:

$$\hat{G}_a|\psi\rangle = 0. \tag{2.13a}$$

Aquí $\hat{G}_a$ denota la versión cuántica de las constricciones de primera clase introducidas previamente, donde se han reemplazado las variables clásicas por sus respectivos operadores lo que, en general, produce problemas de ordenamiento que deben ser resueltos imponiendo algún criterio adicional. El segundo paso es afirmar que los observables de nuestra teoría son todos aquellos operadores hermíticos del espacio fase, invariantes bajo una transformación de norma, es decir, que conmutan con todas las constricciones de primera clase:

$$\hat{F} = \hat{F}^\dagger \quad \text{es observable} \quad \Longleftrightarrow \quad \delta\hat{F} = [\hat{F}, \epsilon^a \hat{G}_a] = 0. \tag{2.13b}$$

Como vemos, una de las grandes ventajas del método de Dirac es que no es necesario fijar una norma para obtener una teoría cuántica. Sin embargo, este método no provee automáticamente una solución a algunos problemas que naturalmente aparecen en la formulación de cualquier teoría cuántica, como son los siguientes: (i) la versión cuántica de las relaciones (2.7), aplicada a nuestras constricciones de primera clase, debe ser consistente con las condiciones (2.13a) que definen un estado físico. Esto se logra forzando a que en el lado derecho de la Ec. (2.7) el operador que representa a las funciones de estructura aparezca a la izquierda del operador que representa a las constricciones. Sin embargo, al implementar esto podrían aparecer términos adicionales (anomalías) que no fuesen proporcionales a las constricciones. Dichos términos son un reflejo del problema de ordenamiento y esta situación puede presentarse cuando las funciones de estructura dependen de los momentos y las coordenadas. (ii) El segundo problema importante es que el método de Dirac nos proporciona los estados físicos del sistema, pero no nos da una regla para definir el producto escalar que permite llevar a cabo la interpretación probabilística de la teoría cuántica. Como veremos más adelante, el método BRST-BFV mantiene las ventajas del método de Dirac proporcionando en muchos casos una guía para resolver los problemas anteriores.

3. EL MÉTODO BRST-BFV

La idea básica de este método consiste en extender el espacio de fase del problema promoviendo los multiplicadores de Lagrange a nivel de coordenadas e introduciendo nuevas variables canónicas, que se denominan fantasmas, con estadística opuesta a las ya existentes. Dicha extensión se realiza hasta implementar de manera exacta una transformación de supersimetría global que incorpora la simetría de norma original. Esta resulta ser la simetría BRST, que explicaremos con más detalle en esta sección. Una vez que el sistema original se ha completado con estas propiedades generales, se postula que la correspondiente medida de la integral funcional está dada por la medida de Liouville correspondiente a todas las variables canónicas involucradas. Así , una vez integrados los fantasmas, se obtiene la medida correcta en las variables originales del sistema que define el producto escalar necesario para la interpretación de la teoría. Este procedimiento tiene la virtud de ser sistemático y en más de un caso ha producido correcciones no-triviales e inesperadas al método de Faddeev-Popov, que usualmente es el más utilizado para cuantizar teorías de norma [8].

Los fantasmas fueron introducidos por primera vez por Feynman [9], con el fin de mantener la unitaridad de una teoría de Yang-Mills. Se les dió el nombre de fantasmas porque, a pesar de ser escalares bajo transformaciones de coordenadas, no tienen estadística de bosón, es decir, violan el teorema de espín-estadística, por lo cual no son observables. Estos campos adquirieron más sentido cuando Faddeev y Popov [10] mostraron que los fantasmas podían obtenerse como resultado de un cálculo correcto de la medida de la integral de trayectoria, y por esto se les dió el nombre de fantasmas de Faddeev-Popov. Posteriormente, con el trabajo de Becchi-Rouet-Stora [3] y Tyutin [11], éstos adquirieron un carácter más formal, ya que se mostró que eran parte esencial de una nueva simetría, que ahora se conoce con el nombre de simetría BRST. Esta simetría tiene dos características esenciales: (i) es el residuo de la simetría de norma una vez que la norma se ha fijado, es decir, es una simetría que prevalece aun a pesar de que se haya seleccionado una norma; (ii) a diferencia de la simetría de norma, esta simetría es de caracter global, es decir, el parámetro de la transformación no depende de la posición. Además, este parámetro es un número de Grassmann, por lo cual la simetría BRST es un tipo de supersimetría, ya que la transformación relaciona bosones con fermiones. Las variables de Grassmann pueden considerarse como el límite clásico de campos fermiónicos, que están cuantizados con anticonmutadores con el objeto de satisfacer la estadística de Fermi-Dirac. En efecto, si consideramos el límite clásico ($\hbar \to 0$) del anticonmutador $\{\psi_a, \psi_b\} = \hbar\delta_{ab}$ obtenemos que el álgebra satisfecha por las variables $\theta_a = \lim_{\hbar\to 0}\psi_a$ está dada por $\theta_a\theta_b + \theta_b\theta_a = 0$. En particular $\theta_a^2 = 0$. Las relaciones anteriores definen la estructura básica de un álgebra de Grassmann. Para una discusión más detallada de las propiedades de este tipo de álgebra se recomienda consultar la Ref. [12].

Como un ejemplo de la simetría BRST consideremos el caso de la electrodinámica, cuyo lagrangiano es

$$L = -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{3.1}$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{3.2}$$

Este lagrangiano es invariante bajo las transformaciones de norma locales

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda. \tag{3.3}$$

El lagrangiano efectivo en la norma de Lorentz es

$$L_{\text{eff}} = L + L_{gf} + L_{FPG}, \tag{3.4}$$

con

$$L_{gf} = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2, \tag{3.5}$$

$$L_{FPG} = -i\partial^\mu \bar{c}\partial_\mu c, \tag{3.6}$$

donde L_{gf} impone la condición de norma de Lorentz y L_{FPG} es el lagrangiano de los fantasmas que en este caso simple se desacoplan. El lagrangiano efectivo ya no es invariante bajo las transformaciones (3.3), sin embargo, es invariante bajo las siguientes transformaciones:

$$\delta A_\mu = -\frac{\omega}{g}\partial_\mu c, \tag{3.7a}$$

$$\delta \bar{c} = -i\frac{\omega}{g\xi}\partial^\mu A_\mu, \tag{3.7b}$$

$$\delta c = 0. \tag{3.7c}$$

De las ecuaciones anteriores vemos que dicha transformación es del tipo supersimétrico, dado que relaciona fantasmas, que son fermiones, con el campo bosónico A_μ. En consecuencia, el parámetro de la transformación ω debe ser un número de Grassmann impar. Estas transformaciones se conocen con el nombre de transformaciones de BRST.

Del teorema de Noether sabemos que dada una simetría existe una carga conservada, en este caso la carga de BRST. En el formalismo lagrangiano de las ecuaciones anteriores dicha carga está dada por

$$Q_{\text{BRST}} = \frac{1}{g}\int d^3x \left[c\nabla\cdot\mathbf{E} - \frac{1}{\xi}\dot{c}\partial^\mu A_\mu\right]. \tag{3.8}$$

Esta expresión es lineal en los fantasmas y en consecuencia es una variable grassmaniana impar. Esta propiedad la vamos a tomar como de carácter fundamental. Para implementar esta idea introducimos el concepto de paridad de grassmann $\epsilon(z)$ de la variable z, que toma los valores 0 o 1 según z sea par o impar en los generadores del álgebra de Grassmann, respectivamente. De este modo tenemos que $\epsilon(Q_{\mathrm{BRST}}) = 1$.

El problema ahora es construir una expresión general para esta carga dentro del formalismo hamiltoniano de una teoría de norma, sin fijar una norma específica. Para hacer esto agrandamos el espacio fase (p, q) considerando a los multiplicadores de Lagrange λ^a asociados a las constricciones de primera clase como nuevas variables canónicas. Por lo tanto, es necesario también agregar sus momentos conjugados π_a, de tal modo que

$$\{\lambda^b, \pi_a\} = -\{\pi_a, \lambda^b\} = \delta^b_a. \tag{3.9}$$

Para que la teoría original no se modifique es necesario considerar que estos momentos van a ser nuevas constricciones de primera clase $\pi_a \approx 0$. Así, el conjunto total de constricciones es

$$C_A = (\pi_a, G_a), \tag{3.10}$$

con $A = 1, \ldots, 2n$, donde n es el número de constricciones de primera clase sin tomar en cuenta a los momentos conjugados de los multiplicadores de Lagrange.

Como siguiente paso introducimos los fantasmas η^A y consideramos que también son variables canónicas, a las cuales asociamos sus momentos canónicos conjugados $\mathcal{P}_A$, que llamaremos antifantasmas

$$\{\eta^B, \mathcal{P}_A\} = \{\mathcal{P}_A, \eta^B\} = -\delta^B_A, \tag{3.11}$$

donde $\epsilon(\mathcal{P}_A) = \epsilon(\eta^A) = 1$, $(\eta^A)^* = \eta^A$ y $(\mathcal{P}_A)^* = -\mathcal{P}_A$. Imponemos además que las nuevas variables canónicas η^A y $\mathcal{P}_A$ tengan paréntesis de Poisson cero con el resto de las variables $Z_\Delta = (p_i, q^i, \lambda^a, \pi_a)$:

$$\{\eta^A, Z_\Delta\} = \{\mathcal{P}_A, Z_\Delta\} = 0. \tag{3.12}$$

El espacio fase extendido con coordenadas $(Z_\Delta, \eta^A, \mathcal{P}_A)$, equipado con esta estructura de paréntesis de Poisson se denomina el superespacio fase. Además de la paridad de Grassman es conveniente definir en este superespacio una estructura adicional $\mathcal{G}$, que denominaremos número de fantasma. Esto lo hacemos atribuyendo a cada una de las variables básicas un número de fantasma de la siguiente manera:

$$\mathcal{G}(Z_\Delta) = 0, \qquad \mathcal{G}(\eta^A) = 1, \qquad \mathcal{G}(\mathcal{P}_A) = -1. \tag{3.13}$$

Además requerimos que el número de fantasma de un producto de variables sea igual a la suma del número de fantasma de sus componentes.

La carga de BRST se construye pidiendo que genere las transformaciones de norma asociadas a las constricciones de primera clase dadas en la Ec. (3.10), al orden más bajo en una expansion en serie de potencias de los fantasmas. Por otra parte, con base en la expresión (3.8), consideraremos que dicha carga es real, tiene número de fantasma

$\mathcal{G}(\Omega) = 1$ y paridad Grassman $\epsilon(\Omega) = 1$. Con estas condiciones la carga de BRST queda completamente determinada a orden más bajo, donde debe tener la forma

$$\Omega = \eta^A C_A + \text{términos de orden superior.} \tag{3.14}$$

Los términos de mayor orden quedan determinados por la propiedad de nilpotencia

$$\{\Omega, \Omega\} = 0. \tag{3.15}$$

Para entender mejor esta propiedad, tomemos en cuenta que Ω genera las transformaciones de BRST, entonces una segunda variación de una función arbitraria está dada por

$$\delta^{(2)} F = \{\{F, \Omega\}, \Omega\}. \tag{3.16}$$

Empleando en (3.16) la superidentidad de Jacobi

$$\{\{F_1, F_2\}, F_3\} + (-)^{\epsilon_{F_1}(\epsilon_{F_2}+\epsilon_{F_3})}\{\{F_2, F_3\}, F_1\} + (-)^{\epsilon_{F_3}(\epsilon_{F_1}+\epsilon_{F_2})}\{\{F_3, F_1\}, F_2\} = 0, \tag{3.17}$$

válida para cuando se tienen cantidades con paridad Grassmann arbitraria, se obtiene

$$\delta^{(2)} F = -\tfrac{1}{2}\{\{\Omega, \Omega\}, F\}. \tag{3.18}$$

Así, vemos que si Ω es nilpotente, una transformación de BRST queda completamente determinada por la primera variación. La propiedad de nilpotencia determina Ω hasta una transformación de BRST, dado que

$$\{\Omega, \Omega\} = 0 \Rightarrow \{\Omega', \Omega'\} = 0, \tag{3.19a}$$

con

$$\Omega' = \Omega + \{K, \Omega\}, \tag{3.19b}$$

para K arbitraria. Una solución de la condición de nilpotencia (3.15), que toma en cuenta (3.14) y las condiciones que $\mathcal{G}(\Omega) = 1$ y $\epsilon(\Omega) = 1$, está dada por

$$\begin{aligned}\Omega = \eta^A C_A + \eta^B \eta^C \overset{(1)}{U}{}_{BC}{}^A \mathcal{P}_A + \eta^C \eta^D \eta^E \overset{(2)}{U}{}_{CDE}{}^{AB} \mathcal{P}_A \mathcal{P}_B + \cdots \\ + \eta^{B_1} \cdots \eta^{B_{n+1}} \overset{(n)}{U}{}_{B_1 \ldots B_{n+1}}{}^{A_1 \ldots A_n} \mathcal{P}_{A_1} \cdots \mathcal{P}_{A_2},\end{aligned} \tag{3.20}$$

con

$$\overset{(1)}{U}{}_{BC}{}^A = -\tfrac{1}{2} C_{CB}{}^A, \tag{3.21}$$

donde las $C_{AB}{}^C$ son las funciones de estructura dadas en (2.7). Las funciones de estructura de segundo orden $\overset{(2)}{U}_{B_1 B_2 B_3}{}^{A_1 A_2}$ se calculan de la expresión

$$\overset{(2)}{U}_{B_1 B_2 B_3}{}^{A_1 A_2} C_{A_2} = \left\{ \overset{(1)}{U}_{[B_1 B_2}{}^{A_1}, C_{B_3]} \right\} + 2\, \overset{(1)}{U}_{[B_1 B_2}{}^{D}\, \overset{(1)}{U}_{B_3 D]}{}^{A_1}. \tag{3.22}$$

Las expresiones para las funciones de estructura de mayor orden pueden encontrarse en [13]. Para algunas teorías conocidas, como por ejemplo las que describen el modelo estandar $\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$ y la gravitación de Einstein, el desarrollo de Ω llega sólo hasta orden uno.

Una vez calculada la carga de BRST, se definen los observables del sistema como aquellas cantidades con número de fantasma igual a cero y que son invariantes bajo BRST, es decir que tienen paréntesis de Poisson cero con Ω. La dinámica del sistema queda determinada por el hamiltoniano BRST. Éste se encuentra definido por la condición que al orden más bajo en los fantasmas debe reducirse al hamiltoniano canónico. Además, debe tener paridad Grassmann cero, ser real y con número de fantasma igual a cero. Por último, debe preservar la invariancia BRST del sistema de tal manera que

$$\{H_{\mathrm{BRST}}, \Omega\} = 0. \tag{3.23}$$

Bajo estas condiciones, a primer orden en los fantasmas el hamiltoniano de BRST esta dado por

$$H_{\mathrm{BRST}} = H_0 + \eta^A V_A^B \mathcal{P}_B + \text{“más”} \tag{3.24}$$

donde “más” significa términos de al menos cuatro fantasmas [13].

Para completar la descripción del método BRST-BFV nos falta ahora determinar cuál es el equivalente de las condiciones cuánticas (2.13) sobre los estados físicos del sistema y cuál es el equivalente de los observables definidos en el método de Dirac. Dado que en el método BRST-BFV los generadores de transformaciones de norma (originalmente representados por las constricciones de primera clase), se han extendido al generador Ω de las transformaciones de BRST, es natural suponer que el equivalente de las condiciones (2.13) corresponde a

$$\hat{\Omega}\,|\psi\rangle = 0, \tag{3.25a}$$

$$\hat{F} = \hat{F}^{\dagger} \text{ es observable} \Longleftrightarrow [\hat{\Omega}, \hat{F}] = 0, \tag{3.25b}$$

con $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}^{\dagger}$. Sin embargo, las Ecs. (3.25) no describen únicamente a los estados físicos y a los observables del sistema. Los estados físicos se obtienen por una identificación adicional de las soluciones de (3.25a) y también están sujetos a una condición sobre el número de fantasma. Para obtener estas condiciones adicionales primero observamos que, dada la nilpotencia de $\hat{\Omega}$ ($\hat{\Omega}^2 = 0$, cuánticamente), un estado de la forma $\hat{\Omega}\chi$ con χ arbitraria satisface (3.25a). Entonces, cualquier estado que se pueda escribir como

$$\psi = \psi' + \hat{\Omega}\chi, \tag{3.26}$$

es solución de (3.25a) si ψ' es solución. Por lo tanto un estado físico será realmente la clase de equivalencia definida por (3.26). En el caso de los observables también existe una clase de equivalencia, ya que cualquier operador de la forma $[\hat{\Omega}, \hat{K}]$, con $\hat{K}$ arbitraria satisface (3.25b). Así, un observable de la forma

$$\hat{F} = \hat{F}' + \left[\hat{\Omega}, \hat{K}\right], \tag{3.27}$$

donde $\hat{F}'$ solución de (3.25b), también es solución de esta ecuación.

Además, como los fantasmas no son observables por violar el teorema de espín-estadística, se exige que todos los observables $\hat{F}$ deben tener número de fantasma igual a cero y además deben satisfacer

$$\left[\hat{F}, \hat{\mathcal{G}}\right] = 0. \tag{3.28}$$

Esto implica que todos los estados físicos deben poseer el mismo número de fantasma, ya que en caso contrario deberían existir operadores que conectaran estados con número de fantasma diferente y por lo tanto éstos no cumplirían la condición (3.28). Un postulado adicional de BRST-BFV es asumir que el número de fantasma de los estados físicos es igual a cero, es decir,

$$\hat{\mathcal{G}}\,|\psi\rangle = 0. \tag{3.29}$$

El siguiente paso consiste en evaluar el operador de evolución del sistema utilizando el método de BRST-BFV. Tomando en cuenta que este operador es unitario una vez que hemos introducido los fantasmas, podemos tomar la representación de éste en términos de la integral de trayectoria de Feynman. Además debemos considerar que los estados que son de interés físico son aquellos aniquilados por la carga de BRST, en consecuencia únicamente es necesario considerar elementos de matriz del operador de evolución entre estos estados. Esto implica que debemos imponer condiciones de frontera en la integral de trayectoria que sean BRST–invariantes. Esta condición no garantiza unicidad en las condiciones de frontera, dado que tenemos la libertad de seleccionar una clase de equivalencia de estados físicamente permisibles, además de que podemos elegir la representación en que deseamos trabajar (momentos o coordenadas). Existen al menos tres tipos de condiciones de frontera adecuadas [13] y nosotros elegiremos una representación que hace contacto con el método de Faddeev-Popov. En esta representación las constricciones se clasifican de manera análoga a (3.10) y los fantasmas se ordenan de la siguiente manera:

$$\eta^A = (-(i)^{\epsilon_a+1}\mathcal{P}^a, \mathcal{C}^a), \qquad \mathcal{P}_A = ((i)^{\epsilon_a+1}\bar{\mathcal{C}}_a, \bar{\mathcal{P}}_a). \tag{3.30}$$

Las variables $\mathcal{C}^a$, $\bar{\mathcal{C}}_a$ son reales y respectivamente conjugadas a $\bar{\mathcal{P}}_a$, $\mathcal{P}^a$, que son puramente imaginarias, de tal modo que se satisfacen los siguientes paréntesis de Poisson:

$$\left\{\mathcal{C}^a, \bar{\mathcal{C}}_b\right\} = \left\{\mathcal{C}^a, \mathcal{P}^b\right\} = \left\{\bar{\mathcal{C}}_a, \bar{\mathcal{P}}_b\right\} = \left\{\bar{\mathcal{P}}_a, \mathcal{P}^b\right\} = 0, \tag{3.31a}$$

$$\left\{\bar{\mathcal{P}}_a, \mathcal{C}^b\right\} = -\delta_a^b = \left\{\mathcal{P}^b, \bar{\mathcal{C}}_a\right\}. \tag{3.31b}$$

Estamos denotando por ϵ_a la paridad Grassmann de la constricción G_a . Las condiciones de frontera a tiempo final τ_2 y tiempo inicial τ_1, que son BRST–invariantes para este conjunto de variables, son

$$\mathcal{C}^a(\tau_2) = \mathcal{C}^a(\tau_1) = 0, \tag{3.32a}$$

$$\bar{\mathcal{C}}_a(\tau_2) = \bar{\mathcal{C}}_a(\tau_1) = 0, \tag{3.32b}$$

$$\pi_a(\tau_2) = \pi_a(\tau_1) = 0, \tag{3.32c}$$

donde recordamos que π_a denota los momentos canónicos conjugados asociados a los multiplicadores de Lagrange λ^a. Estas condiciones de frontera son BRST–invariantes en general, dado que, en términos de estas variables la carga de BRST puede escribirse como

$$\Omega = \mathcal{C}^a G_a - (i)^{\epsilon_a+1}\mathcal{P}^a\pi_a + \text{“más”},$$

donde “más” contiene al menos un antifantasma y dos fantasmas. Así, la variación de $\mathcal{C}$ se cancela debido a (3.32a) y la variación de $\bar{\mathcal{C}}$ se cancela por (3.32c). Por último, la variación de π es automáticamente igual a cero.

Es claro que aún falta fijar las condiciones de frontera de las restantes variables dinámicas, lo que dependerá específicamente del problema en cuestión. Una vez determinadas éstas, el operador de evolución está dado por la acción efectiva cuántica

$$Z_\Psi = \int \mathcal{D}\mu\ \exp(iS_{\text{eff}}), \tag{3.33a}$$

donde $\mathcal{D}\mu$ es la medida de Liouville correspondiente a todas las variables canónicas introducidas y

$$S_{\text{eff}} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\ \left(\dot{q}^i p_i - \lambda^a\dot{\pi}_a + \dot{\eta}^A\mathcal{P}_A - H_{\text{eff}}\right). \tag{3.33b}$$

El hamiltoniano efectivo H_{eff} no se encuentra únicamente definido, ya que como mencionamos en (3.27), todo observable en BRST-BFV queda indeterminado hasta un operador de la forma $\{\Omega, K\}$. Por lo tanto el hamiltoniano efectivo lo podemos definir como

$$H_{\text{eff}} = H_{\text{BRST}} - \left\{\Psi, \Omega\right\}, \tag{3.34}$$

donde Ψ se conoce como la condición de norma fermiónica. Usualmente ésta se escoge de la forma

$$\Psi = (i)^{\epsilon_a+1}\bar{\mathcal{C}}_a\chi^a + \bar{\mathcal{P}}_a\lambda^a, \tag{3.35}$$

donde las χ^a son funciones arbitrarias de las variables canónicas que no involucran fantasmas ni antifantasmas y son tales que $(\chi^a)^* = (i)^{\epsilon_a}\chi_a$.

Una de las propiedades fundamentales de (3.33) es su invariancia ante transformaciones infinitesimales de Ψ, lo que quiere decir que la integral de trayectoria es independiente de la elección de norma (teorema de Fradkin-Vilkovisky [3]). Esto permite realizar diversas pruebas de consistencia de las teorías de norma sin imponer alguna condición de norma particular. Sin embargo, no es posible utilizar el valor $\Psi = 0$, ya que en este caso la integral no se encuentra bien regularizada [8].

Antes de detallar el ejemplo que hemos escogido para ilustrar de una manera simple el método BRST, es conveniente hacer algunas consideraciones con el objeto de poner dicho ejemplo en la perspectiva adecuada.

En general, los sistemas de interés en física poseen constricciones tanto de primera como de segunda clase y en particular las teorías de norma, consideradas como el paradigma de una teoría física, sólo tienen el primer tipo de constricciones. Estrictamente hablando, todos los sistemas con constricciones de primera clase pueden reducirse a sistemas que poseen únicamente constricciones de segunda clase, una vez fijada la norma. Más aún, en principio sería posible resolver dichas constricciones de forma tal que se identificaran los verdaderos grados de libertad del sistema. Sin embargo, este proceso puede resultar imposible en la práctica. Un camino a seguir en este caso es trabajar con las constricciones introduciendo los respectivos paréntesis de Dirac. No obstante, en muchos casos de interés físico, la realización cuántica de estos paréntesis se vuelve muy complicada. En otras ocasiones, aunque cualquiera de los procedimientos arriba mencionados sea factible, podría no resultar conveniente su implementación debido al hecho de que algunas simetrías importantes de la teoría ya no son manifiestas, como es el caso de la partícula libre relativista, por ejemplo. Por otro lado, la construcción de la integral de trayectoria para los verdaderos grados de libertad de un sistema es un problema aún no resuelto en general.

Frente a esta situación podemos adoptar el punto de vista opuesto, que consiste en pensar que cualquier sistema físico con constricciones puede escribirse como un sistema que contiene solamente constricciones de primera clase, es decir, como una teoría de norma. Una forma de lograr esto es agregando un par de variables canónicas por cada par existente de constricción de segunda clase y cuidando que el hamiltoniano total se modifique de tal manera que no se produzcan nuevas constricciones en el proceso de pedir que éstas sean consistentes con la evolucion temporal del sistema. Esta idea de transformar todas las constricciones en constricciones de primera clase es también consistente con la idea de promover la invariancia bajo transformaciones de BRST al nivel de postulado fundamental para proceder a la cuantización correcta de cualquier sistema físico. Si aceptamos este postulado, entonces cobra gran importancia la pregunta de cómo describimos teorías con constricciones de segunda clase de acuerdo al método BRST-BFV. En este caso la integral funcional está perfectamente definida, puesto que la medida correspondiente es la de Liouville en el conjunto de variables canónicas que cierra bajo BRST. Otra ventaja de este modo de proceder es que las simetrías originales del sistema siempre quedan manifiestas. Recientemente, este punto de vista se ha empleado exitosamente en la cuantización de teorías de norma originalmente anómalas, y se ha hecho contacto con ideas alternativas previamente propuestas para lograr una cuantización correcta de ellas [14].

El ejemplo del rotor rígido que discutimos en la siguiente sección ilustra las ideas mencionadas en el párrafo anterior de una manera simple y transparente. Como sucede con todos los ejemplos sencillos, existen varios métodos alternativos para su discusión. En este caso, la cuantización empleando constricciones de segunda clase y paréntesis de Dirac no presenta ningún problema y la obtención de los verdaderos grados de libertad es trivial. Se trata entonces de enfatizar la ilustración del método BRST-BFV en un contexto simple que además posee todos los ingredientes básicos del punto de vista expuesto en los párrafos anteriores y cuyo verdadero potencial se aprecia realmente en sistemas más complicados como los citados en la Ref. [14].

4. Cuantización BRST-BFV del rotor rígido

Como un ejemplo específico e ilustrativo del método de cuantización de BRST-BFV consideremos el problema del rotor rígido. Éste no es un sistema que inicialmente posee invariancia de norma, pero lo podemos convertir en uno de este tipo adicionando nuevas variables canónicas.

Para comenzar, consideremos la descripción del rotor rígido bidimensional según el método de Dirac. El lagrangiano es

$$L = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \lambda(r-a), \tag{4.1}$$

donde hemos usado coordenadas polares r, θ y λ es un multiplicador de Lagrange. Los momentos canónicos asociados a este sistema son

$$p_r = m\dot{r} \qquad p_\theta = mr^2\dot{\theta}, \tag{4.2}$$

con lo que el hamiltoniano total resulta

$$H_{\mathrm{T}} = H_0 + \lambda(r-a) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + \lambda(r-a). \tag{4.3}$$

De acuerdo al método de Dirac tenemos una constricción primaria dada por

$$\xi_1 = r - a \approx 0, \tag{4.4}$$

cuya conservación en el tiempo da lugar a una constricción secundaria ξ_2

$$\dot{\xi}_1 = \{r-a, H_{\mathrm{T}}\} = \frac{p_r}{m} \Rightarrow \xi_2 = p_r \approx 0. \tag{4.5}$$

La constricción secundaria ξ_2 no origina nuevas constricciones y permite evaluar el multiplicador de Lagrange, que resulta ser

$$\lambda = \frac{p_\theta^2}{mr^3}. \tag{4.6}$$

Esto quiere decir que nuestro par de constricciones (4.4) y (4.5) es de segunda clase, como es fácil mostrarlo al evaluar la matriz $C_{\alpha\beta}$:

$$\{\xi_\alpha, \xi_\beta\} = C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Con el objeto de emplear el método de Dirac en sistemas que poseen constricciones de segunda clase, es necesario construir nuevos paréntesis de Poisson que mantengan las propiedades algebraicas de éstos, pero que sean consistentes con el hecho de imponer las constricciones de manera fuerte, es decir como identidades. Éstos son los así llamados paréntesis de Dirac, que están definidos por

$$\{A, B\}_{\mathrm{D}} = \{A, B\} - \{A, \xi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\xi_\beta, B\}, \tag{4.8}$$

donde $C^{\alpha\beta}$ denota la matriz inversa de $C_{\alpha\beta}$. Estos paréntesis son los que van a ser promovidos a conmutadores o anticonmutadores al momento de cuantizar, y dado que satisfacen la propiedad esencial

$$\{A, \xi_\alpha\}_{\mathrm{D}} = 0 \quad \text{para toda } A, \tag{4.9}$$

podemos considerar a las constricciones de segunda clase ξ_1 y ξ_2 como identidades fuertes. Esto implica que nuestro hamiltoniano total (4.3) se reduce a

$$H_{\mathrm{T\,D}} = \frac{p_\theta^2}{2ma^2}, \tag{4.10}$$

que es el hamiltoniano natural que describe el rotor rígido. Además obtenemos $\{\theta, p_\theta\}_{\mathrm{D}} = 1$, lo que nos garantiza que θ y p_θ resultan ser las variables canónicas conjugadas adecuadas.

El problema ahora es cómo aplicar el método de cuantización de BRST-BFV a este sistema, ya que no contamos con constricciones de primera clase. Existen al menos dos soluciones a este problema: la primera es considerar que de las dos constricciones ξ_1 y ξ_2, sólo una de ellas es una constricción, mientras que la otra la podemos considerar como una condición de norma. Dado que el método BRST-BFV es independiente de la elección de norma, podemos calcular el propagador del sistema utilizando la acción funcional en esta norma. La segunda solución, que utilizaremos a continuación, consiste en transformar las dos constricciones de segunda clase en constricciones de primera clase, adicionando dos nuevas variables canónicas. Así, agregamos a nuestro sistema las variables canónicamente conjugadas (q, π), de forma tal que nuestras nuevas constricciones de primera clase sean

$$\phi_1 = r - a + q \approx 0, \qquad \phi_2 = p_r - \pi \approx 0, \tag{4.11}$$

que se reducen a las constricciones originales (4.4) y (4.5) cuando $q = 0$ y $\pi = 0$. El hamiltoniano (4.3) debe ser modificado de forma tal que las nuevas constricciones (4.11) se mantengan en el tiempo sin que se generen nuevas constricciones. La forma de lograr ésto, es imponer que el nuevo hamiltoniano total sea una variable de primera clase, o sea que satisfaga (2.6). Un hamiltoniano que cumple esta condición y que además se reduce a (4.3) cuando $q = 0 = \pi$ es

$$\tilde{H}_{\mathrm{T}} = \frac{1}{2m}\left[(p_r - \pi)^2 + \frac{p_\theta^2}{(r+q)^2}\right] + \lambda(r + q - a). \tag{4.12}$$

Este hamiltoniano está indeterminado hasta un múltiplo de las constricciones de primera clase, por lo cual podemos definir un hamiltoniano extendido

$$\tilde{H}_{\mathrm{E}} = \tilde{H}_0 + \lambda^\alpha \phi_\alpha, \tag{4.13}$$

con $\tilde{H}_0 = \frac{1}{2m}\left[(p_r - \pi)^2 + \frac{p_\theta^2}{(r+q)^2}\right]$. Asociado al hamiltoniano extendido tenemos el lagrangiano

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{\mathrm{E}} &= p_i\dot{q}^i - \tilde{H}_{\mathrm{E}}\\ &= p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + \pi\dot{q} - \frac{1}{2m}\left[(p_r - \pi)^2 + \frac{p_\theta^2}{(r+q)^2}\right]\\ &\quad - \lambda(r + q - a) - \sigma(p_r - \pi).\end{aligned} \tag{4.14}$$

Las ecuaciones de movimiento provenientes de este lagrangiano son invariantes bajo las siguientes transformaciones de norma, generadas por las constricciones:

$$\delta p_r = -\epsilon^1(\tau), \qquad \delta p_\theta = 0, \qquad \delta\pi = -\epsilon^1(\tau), \qquad \delta\lambda = \dot{\epsilon}^1(\tau), \tag{4.15a}$$

$$\delta r = \epsilon^2(\tau), \qquad \delta\theta = 0, \qquad \delta q = -\epsilon^2(\tau), \qquad \delta\sigma = \dot{\epsilon}^2(\tau). \tag{4.15b}$$

Así, hemos construido una teoría de norma para el rotor rígido. Como un paso previo a la aplicación del método BRST-BFV a este sistema, es necesario identificar claramente las condiciones de borde que permiten resolver en forma única el sistema de ecuaciones provenientes del lagrangiano (4.14). Estas condiciones de borde serán subsecuentemente utilizadas en el cálculo del propagador del sistema en la formulación de la integral funcional. Dado que tenemos una teoría de norma, las variables dinámicas estarán únicamente determinadas por las condiciones iniciales del problema siempre que fijemos la norma asociada a las transformaciones (4.15). Con este objeto, y para hacer contacto posterior con la formulación BRST-BFV, escogemos la norma no-canónica determinada por las condiciones $\dot{\lambda} = 0$ y $\dot{\sigma} = 0$ [15].

La forma del lagrangiano (4.14) sugiere la conveniencia de introducir las siguientes variables canónicas

$$\xi = \tfrac{1}{2}(r - q), \qquad \pi_\xi = p_r - \pi, \tag{4.16a}$$

$$Q = r + q, \qquad \pi_Q = \tfrac{1}{2}(p_r + \pi), \tag{4.16b}$$

que reemplazan a las variables r, p_r, q, π. De este modo, el lagrangiano (4.14) se transforma en

$$\bar{L}_{\mathrm{E}} = p_\theta \dot{\theta} + \pi_\xi \dot{\xi} + \pi_Q \dot{Q} - \frac{1}{2m}\left[\pi_\xi^2 + \frac{p_\theta^2}{Q^2}\right] - \lambda(Q - a) - \sigma \pi_\xi \tag{4.17}$$

Las ecuaciones de movimiento resultan

$$\dot{\theta} - \frac{p_\theta}{mQ^2} = 0, \qquad \dot{\xi} - \frac{\pi_\xi}{m} - \sigma = 0, \qquad \dot{Q} = 0, \tag{4.18a}$$

$$\dot{p}_\theta = 0, \qquad \dot{\pi}_\xi = 0, \qquad \dot{\pi}_Q - \frac{p_\theta^2}{mQ^3} + \lambda = 0, \tag{4.18b}$$

$$Q = a, \qquad \pi_\xi = 0, \qquad \dot{\lambda} = \dot{\sigma} = 0, \tag{4.18c}$$

donde la última ecuación incluye la variación con respecto a los multiplicadores de Lagrange junto con la elección de la norma no-canónica. De las Ecs. (4.18) concluimos que

$$\ddot{\theta} = 0, \qquad \ddot{\xi} = 0, \qquad \ddot{\pi}_Q = 0. \tag{4.19}$$

Para obtener la solución única de estas ecuaciones debemos fijar las variables respectivas en los extremos $\tau = \tau_1$ y $\tau = \tau_2$. En otras palabras, las condiciones de borde del sistema son

$$z(\tau_1) = z_1, \qquad z(\tau_2) = z_2, \tag{4.20}$$

donde z es cualquiera de las variables θ, ξ, π_Q. La solución de cada una de las Ecs. (4.19) y (4.20) está dada por

$$z(\tau) = z_1 + (z_2 - z_1)\frac{(\tau - \tau_1)}{(\tau_2 - \tau_1)} \tag{4.21}$$

y todas las restantes variables canónicas, junto con los multiplicadores de Lagrange, quedan determinadas por las constricciones, las condiciones de frontera (4.20) y las ecuaciones de movimiento (4.18). En efecto resulta

$$Q = a, \qquad \pi_\xi = 0, \qquad p_\theta = \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{(\tau_2 - \tau_1)}\, a^2, \tag{4.22a}$$

$$\sigma = \frac{(\xi_2 - \xi_1)}{(\tau_2 - \tau_1)}, \qquad \lambda = \frac{m(\theta_2 - \theta_1)^2}{(\tau_2 - \tau_1)^2}\, a - \frac{(\pi_{Q_2} - \pi_{Q_1})}{(\tau_2 - \tau_1)}. \tag{4.22b}$$

De este modo hemos obtenido la solución explícita de las Ecs (4.18) en la norma no-canónica $\dot{\lambda} = 0$, $\dot{\sigma} = 0$, en virtud de fijar correctamente las condiciones de borde de las respectivas variables. Si queremos que las Ecs. (4.18) sean estrictamente un extremo de la accion $S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \bar{L}_{\rm E}\, d\tau$, con las condiciones de frontera (4.20), debemos escribir los términos cinéticos en ésta de tal manera que las derivadas con respecto al tiempo aparezcan sobre las variables que se están fijando en los extremos. Así entonces, la parte correspondiente de la acción resulta ser

$$p_\theta \dot{\theta} + \pi_\xi \dot{\xi} - Q \dot{\pi}_Q. \tag{4.23}$$

Observemos que para recuperar exactamente el problema original, descrito por el hamiltoniano (4.3) más las constricciones (4.4) y (4.5) con el valor (4.6) para el multiplicador de Lagrange λ, debemos escoger $\xi_1 = \xi_2 = \frac{1}{2}a$ y $\pi_{Q_1} = \pi_{Q_2} = 0$ en las soluciones (4.22).

A continuación calcularemos el operador de evolución del sistema empleando el método BRST-BFV descrito en la sección anterior. Para el caso particular del rotor rígido tenemos

$$C_A = (\pi_\lambda, \pi_\sigma, Q - a, \pi_\xi), \tag{4.24a}$$

$$\eta^A = (-i\mathcal{P}^1, -i\mathcal{P}^2, \mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2), \qquad \mathcal{P}_A = (i\bar{\mathcal{C}}_1, i\bar{\mathcal{C}}_2, \bar{\mathcal{P}}_1, \bar{\mathcal{P}}_2), \tag{4.24b}$$

con lo que la carga de BRST resulta ser

$$\Omega = -i\mathcal{P}^1 \pi_\lambda - i\mathcal{P}^2 \pi_\sigma + \mathcal{C}^1 (Q - a) + \mathcal{C}^2 \pi_\xi. \tag{4.25}$$

Tomando la condición de norma fermiónica

$$\Psi = \bar{\mathcal{P}}_1 \lambda + \bar{\mathcal{P}}_2 \sigma, \tag{4.26}$$

el hamiltoniano efectivo resulta

$$H_{\rm eff} = \frac{1}{2m}\left(\pi_\xi^2 + \frac{p_\theta^2}{Q^2}\right) + i\bar{\mathcal{P}}_1 \mathcal{P}^1 + i\bar{\mathcal{P}}_2 \mathcal{P}^2 + \lambda(Q - a) + \sigma \pi_\xi, \tag{4.27}$$

donde $H_{\rm BRST} = \tilde{H}_0$ en este caso. La acción clásica efectiva es,

$$\begin{aligned} S_{\rm eff} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \Big(& p_\theta \dot{\theta} + \pi_\xi \dot{\xi} - \dot{\pi}_Q Q - \dot{\pi}_\lambda \lambda - \dot{\pi}_\sigma \sigma - \mathcal{P}^1 \dot{\bar{\mathcal{C}}}_1 - \mathcal{P}^2 \dot{\bar{\mathcal{C}}}_2 + \dot{\mathcal{C}}^1 \bar{\mathcal{P}}_1 + \dot{\mathcal{C}}^2 \bar{\mathcal{P}}_2 \\ & - \frac{p_\theta^2}{2mQ^2} - \frac{\pi_\xi^2}{2m} - i\bar{\mathcal{P}}_1 \mathcal{P}^1 - i\bar{\mathcal{P}}_2 \mathcal{P}^2 - \lambda(Q - a) - \sigma \pi_\xi \Big), \end{aligned} \tag{4.28}$$

y la integral de trayectoria queda definida por

$$\begin{aligned} Z_\Psi = \int & \mathcal{D}\mathcal{P}^1\, \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}}_1\, \mathcal{D}\mathcal{C}^1\, \mathcal{D}\bar{\mathcal{C}}_1\, \mathcal{D}\mathcal{P}^2\, \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}}_2\, \mathcal{D}\mathcal{C}^2\, \mathcal{D}\bar{\mathcal{C}}_2 \\ & \mathcal{D}\pi_\xi\, \mathcal{D}\xi\, \mathcal{D}p_\theta\, \mathcal{D}\theta\, \mathcal{D}\pi_\lambda\, \mathcal{D}\lambda\, \mathcal{D}\pi_\sigma\, \mathcal{D}\sigma\, \mathcal{D}\pi_Q\, \mathcal{D}Q\, \exp[iS_{\rm eff}]. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Las condiciones de frontera para la integral de trayectoria son

$$\mathcal{C}^1(\tau_1) = \mathcal{C}^2(\tau_1) = \mathcal{C}^1(\tau_2) = \mathcal{C}^2(\tau_2) = \bar{\mathcal{C}}_1(\tau_1) = \bar{\mathcal{C}}_2(\tau_1) = \bar{\mathcal{C}}_1(\tau_2) = \bar{\mathcal{C}}_2(\tau_2) = 0, \tag{4.30a}$$

$$\pi_\lambda(\tau_1) = \pi_\lambda(\tau_2) = \pi_\sigma(\tau_1) = \pi_\sigma(\tau_2) = 0. \tag{4.30b}$$

$$\theta(\tau_1) = \theta_1, \quad \theta(\tau_2) = \theta_2, \quad \xi(\tau_1) = \xi(\tau_2) = a/2, \quad \pi_Q(\tau_1) = \pi_Q(\tau_2) = 0. \tag{4.30c}$$

Las Ecs. (4.30c) corresponden precisamente a las condiciones de borde obtenidas previamente en (4.20) con la elección indicada después de (4.23). El hecho que éstas se mantengan se debe a que los fantasmas se acoplan solamente entre ellos y no con las coordenadas originales del problema. Usando la expresión (4.25) para el generador Ω es posible verificar que todas las condiciones de borde (4.30) son efectivamente invariantes bajo BRST.

Ahora procederemos a calcular la integral de trayectoria (4.29). Las integrales funcionales sobre los fantasmas son idénticas para los subíndices uno y dos, por lo que mostraremos como se calcula esta integral para el caso genérico

$$I_{\mathrm{F}} = \int \mathcal{D}\mathcal{P}\,\mathcal{D}\bar{\mathcal{P}}\,\mathcal{D}\mathcal{C}\,\mathcal{D}\bar{\mathcal{C}}\,\exp\left[i\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\,(-\mathcal{P}\dot{\bar{\mathcal{C}}} + \dot{\mathcal{C}}\bar{\mathcal{P}} - i\bar{\mathcal{P}}\mathcal{P})\right]. \tag{4.31}$$

Realizando una integral por partes en los dos primeros términos en la exponencial vemos que el resultado de integrar funcionalmente sobre $\mathcal{C}$ y $\bar{\mathcal{C}}$ son dos deltas funcionales de $\dot{\mathcal{P}}$ y $\dot{\bar{\mathcal{P}}}$, lo cual permite realizar las integraciones restantes sobre $\mathcal{P}$ y $\bar{\mathcal{P}}$. Tomado en cuenta que estas variables no están fijas en los extremos se obtiene

$$I_{\mathrm{F}} = \int d\mathcal{P}_0\,d\bar{\mathcal{P}}_0\,\exp\big[\bar{\mathcal{P}}_0\mathcal{P}_0 T\big], \tag{4.32}$$

con $T = \tau_2 - \tau_1$. Las integrales (4.32) son ahora del tipo de Berezin [16], definidas por

$$\int d\mathcal{P}\,\mathcal{P} = 1, \qquad \int d\mathcal{P} = 0. \tag{4.33}$$

De este modo se obtiene como resultado final

$$I_{\mathrm{F}} = T. \tag{4.34}$$

Así, una vez integrados los fantasmas la acción efectiva cuántica es

$$Z_\Psi = T^2 \int \mathcal{D}\pi_\xi\,\mathcal{D}\xi\,\mathcal{D}p_\theta\,\mathcal{D}\theta\,\mathcal{D}\pi_\lambda\,\mathcal{D}\lambda\,\mathcal{D}\pi_\sigma\,\mathcal{D}\sigma\,\mathcal{D}\pi_Q\,\mathcal{D}Q\,\exp\left[i\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\left(p_\theta\dot{\theta} + \pi_\xi\dot{\xi}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \dot{\pi}_Q Q - \dot{\pi}_\lambda\lambda - \dot{\pi}_\sigma\sigma - \frac{p_\theta^2}{2mQ^2} - \frac{\pi_\xi^2}{2m} - \lambda(Q-a) - \sigma\pi_\xi\right)\right]. \tag{4.35}$$

Para la integral funcional sobre λ y π_λ, tenemos

$$I_\lambda = \int \mathcal{D}\pi_\lambda \mathcal{D}\lambda \exp\left[i\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[-\dot{\pi}_\lambda\lambda - \lambda(Q-a)\right]\right]. \tag{4.36}$$

Con la partición del intervalo $T = N\epsilon$, podemos escribir I_λ como

$$I_\lambda = \int d\pi_{\lambda 1}\cdots d\pi_{\lambda N-1} d\lambda_0 \cdots d\lambda_{N-1} \exp\left[-i\sum_{n=0}^{N-1}\left[(\pi_{\lambda n+1} - \pi_{\lambda n})\lambda_n + \epsilon\lambda_n(Q_n - a)\right]\right],$$

donde se tomó en cuenta que π_λ está fijo en los extremos y por esa razón existe una integral de más sobre λ. Dada la condición de frontera (4.30b), al integrar sobre π_λ se obtiene

$$\begin{aligned} I_\lambda &= \int d\lambda_0\cdots d\lambda_{N-1}\delta(\lambda_1-\lambda_0)\cdots\delta(\lambda_{N-1}-\lambda_{N-2})\exp\left[-i\sum_{n=0}^{N-1}\epsilon\lambda_n(Q_n-a)\right] \\ &= \int d\lambda_0 \exp\left[-i\lambda_0\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\,(Q-a)\right]. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Las integrales funcionales sobre σ y π_σ, Q y π_Q, ξ y π_ξ son muy similares a la anterior, dando como resultado final una integral, ya no funcional, con respecto a las variables que no están fijas en los extremos. En el caso de la integración sobre ξ, cuyos valores fijos en los extremos son diferentes de cero, se obtiene el término adicional $\exp i\pi_{\xi_0}(\xi(2)-\xi(1))$ que es igual a uno en nuestro caso particular. De este modo resulta

$$\begin{aligned} Z_\Psi = T^2\int \mathcal{D}\theta\,\mathcal{D}p_\theta\, d\lambda_0\, d\sigma_0\, dQ_0\, d\pi_{\xi_0} \exp\Bigg[&-i\left(\lambda_0(Q_0-a)+\sigma_0\pi_{\xi_0}+\frac{{\pi_{\xi_0}}^2}{2m}\right)T \\ &+ i\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\,\left(p_\theta\dot{\theta}-\frac{p_\theta^2}{2mQ_0^2}\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Con los cambios de variable $\bar{\lambda}_0 = \lambda_0 T$ y $\bar{\sigma}_0 = \sigma_0 T$ se obtienen dos funciones delta asociadas a los dos primeros términos en la exponencial:

$$\begin{aligned} Z_\Psi = &\int \mathcal{D}\theta\,\mathcal{D}p_\theta\, dQ_0\, d\pi_{\xi_0}\,\delta(\pi_{\xi_0})\delta(Q_0-a) \\ &\times \exp\left[-i\left(\frac{{\pi_{\xi_0}}^2}{2m}\right)T + i\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\,\left(p_\theta\dot{\theta}-\frac{p_\theta^2}{2mQ_0^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Finalmente, integrando sobre Q_0 y π_{ξ_0} se obtiene

$$Z_\Psi = \int \mathcal{D}p_\theta\,\mathcal{D}\theta \exp\left[i\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\,\left(p_\theta\dot{\theta}-\frac{p_\theta^2}{2ma^2}\right)\right]. \tag{4.39}$$

Esta integral funcional es la que se tiene que realizar normalmente para el cálculo del propagador del rotor rígido y puede encontrarse por ejemplo en la Ref. [17], dando como resultado

$$Z_\Psi = \langle\theta_2\tau_2|\theta_1\tau_1\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\left[in(\theta_2-\theta_1) - i\frac{n^2}{2ma^2}(\tau_2-\tau_1)\right]. \tag{4.40}$$

Así, hemos ilustrado el método de cuantización de BRST-BFV en el marco de una teoría bastante simple como lo es el rotor rígido en dos dimensiones, formulado como una teoría de norma, mostrando de una manera explícita el cálculo del operador de evolución del sistema. Es necesario enfatizar que la efectividad y potencial del método BRST-BFV se manifiesta realmente en teorías más complicadas, como por ejemplo en el caso de supergravedad [8] o de teorías topológicas [18], como la gravedad en 2 + 1 dimensiones [19]. Otra de sus grandes ventajas es que puede aplicarse a teorías con constricciones reducibles, siendo el primer método de cuantización que ha permitido tratar consistentemente este tipo de constricciones [20]. Otras aplicaciones del método pueden encontrarse en las Refs. [8,21,22]. Por último, podemos mencionar que es posible dar una interpretación geométrica a los fantasmas logrando así un mayor entendimiento de lo que significa cuantizar una teoría de norma [23].

REFERENCIAS

1. P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yashiva University Press (1964).
2. A. Ashtekar, *Lectures on Non-perturbative Canonical Gravity*, World Scientific (1991).
3. C. Becchi, A. Rouet y R. Stora, *Phys. Lett.* **52B** (1974) 344; E.S. Fradkin y G.A. Vilkovisky, CERN Report TH2332 (1977); I.A. Batalin y G.A. Vilkovisky, *Phys. Lett.* **B69** (1977) 309; E.S. Fradkin y T.E. Fradkina, *Phys. Lett.* **B72** (1977) 343.
4. I.A. Batalin y G.A. Vilkovisky, *Phys. Lett.* **B102** (1981) 27.
5. J. D. Vergara, (en preparación).
6. R.E. Kallosh, *Nucl. Phys.* **B141** (1978) 141; G. Curci, R. Ferrari, *Nuovo Cimento,* **A32** (1976) 151.
7. Ö.F. Dayi, *Ann. Phys.* (NY) **217** (1992) 217.
8. M. Henneaux y C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press (1992).
9. R.P. Feynman, *Acta Phys. Pol.* **XXIV** (1963) 697.
10. L.D. Faddeev y V.N. Popov, *Phys. Lett.* **B25** (1967) 29.
11. I.V. Tyutin, Preprint FIAN (P.N. Lebedev Physical Institute) No. 39 (1975).
12. B. DeWitt, *Supermanifolds*, Cambridge University Press, Cambridge (1992).
13. M. Henneaux, *Phys.Rep.* **129** (1985) 1.
14. T. Fujiwara, Y. Igarashi y J. Kubo, *Phys. Lett.* **B251** (1990) 427; S. Miyake y K. Shisuya, *Mod. Phys. Lett.* **A4** (1989) 2675; M. Moshe y Y. Oz, *Phys. Lett.* **B224** (1989) 145; L.D. Faddeev y S. Shatashvili, *Phys. Lett.* **B167** (1986) 225.
15. C. Teitelboim, *Phys.Rev.* **D25** (1982) 3159.
16. F.A. Berezin, *The method of second quantization*, Academic Press, New York (1966).
17. H. Kleinert, *Path Integrals*, World Scientific, Singapore 1990.
18. D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski y G. Thompson, *Phys. Rep.* **209** (1991) 129.
19. G. González y J. Pullin, *Phys. Rev.* **D42** (1990) 3395.

20. J. Thierry-Mieg, *Nucl. Phys.* **B335** (1990) 334.
21. N. Nakanishi y I. Ojima, *Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity*, World Scientific, Singapore (1990).
22. D.M. Gitman y I.V. Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints*, Springer-Verlag, Berlin (1990).
23. L. Bonora y P. Cotta-Ramusino, *Commun. Math. Phys.* **87** (1983) 589.