

Espectro y masa del fotón en la electrodinámica cuántica estadística

H. PÉREZ ROJAS* Y L. VILLEGAS LELOVSKY

Departamento de Física

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

Apartado postal 14-740, 07000 México, D.F., México

Recibido el 16 de diciembre de 1993; aceptado el 24 de marzo de 1994

RESUMEN. Se obtienen soluciones aproximadas de las ecuaciones de dispersión de los modos electromagnéticos en el llamado vacío caliente en dos regiones límites: $\omega = 0$, $\vec{k} \neq 0$ y $\omega \neq 0$, $\vec{k} \rightarrow 0$. Lo anterior se confirma a partir de soluciones asintóticas exactas conocidas. Se estudia la propagación de los modos transversos y longitudinal en las regiones antes mencionadas. La curva de dispersión para los modos transversos en la región "opaca" se encuentra formada por dos ramas: la rama plasmónica correspondiente a cuasipartículas masivas, y la rama fotónica asociada a partículas sin masa. Se demuestra que la función de distribución fotónica tiene un comportamiento divergente para $\vec{k} \rightarrow 0$, como sucede en un gas de partículas sin masa; es decir, el límite infrarrojo es $\omega = 0$, $\vec{k} \rightarrow 0$ y en éste, el número de cuasipartículas transversas puede ser arbitrariamente grande. La analogía de este límite con la aparición de un condensado transverso es señalada. Con esto se establece la comparación de la curva de dispersión para la radiación de cuerpo negro a alta temperatura con la de un gas de bosones cargados que obedecen la condensación de Bose-Einstein. Se discute la relación entre las transiciones de fase de restablecimiento de simetría y condensación de Bose-Einstein para campos vectoriales masivos con ruptura espontánea de la simetría.

ABSTRACT. Approximate solutions for the dispersion equations of the electromagnetic modes in the so called "hot vacuum" for two limit regions: $\omega = 0$, $\vec{k} \neq 0$ and $\omega \neq 0$, $\vec{k} \rightarrow 0$ are obtained. This is confirmed by comparing with the known exact asymptotic solutions. The propagation of the transversal and longitudinal modes are discussed for the mentioned regions. The dispersion curve for the transversal mode in the "opaque" region is found to be composed by two branches: the plasmonic branch, corresponding to massive quasi-particles, and the photonic one associated to massless particles. It is shown that the photonic distribution function has a divergent behavior for $\vec{k} \rightarrow 0$ in the same way as in a massless gas, the infrared limit being $\omega = 0$, $\vec{k} \rightarrow 0$, and in the latter the number of quasi-particles is arbitrarily large. The analogy between this limit and the presence of a transversal condensate is shown. The comparison between the dispersion curve of the transverse mode of the black body at high temperature and the one for a charged boson gas with Bose-Einstein condensation is discussed. The relation between the phase transitions of symmetry restoration and Bose-Einstein condensation for massive vectorial fields with spontaneous symmetry breaking is established.

PACS: 11.10; 14.80.Am

*Dirección permanente: Grupo de Física Teórica del Instituto de Cibernética, Matemática y Física de la Academia de Ciencias de Cuba, Calle E no. 309, La Habana, Cuba.

1. INTRODUCCIÓN

¿Adquiere masa el fotón con la temperatura? Es decir, si consideramos un gas de fotones en equilibrio termodinámico con un gas de electrones y positrones a alta temperatura ($T \geq mc^2$, donde m es la masa del electrón). ¿se comportan los modos físicos de propagación del fotón como los de una partícula con una masa efectiva diferente de cero?

La respuesta no es única, pues la ley de dispersión del fotón en un medio es mucho más complicada que en el vacío. Si consideramos el límite ultravioleta, se comporta como una partícula masiva —o mejor dicho, una cuasipartícula, el plasmón, cuya masa depende de la temperatura. Pero en el límite infrarrojo las excitaciones electromagnéticas poseen tanto modos masivos (plasmones) como no masivos, lo cual está asociado a la penetrabilidad de un campo magnético constante y uniforme, tal como cabría esperar con la invariancia de norma de la teoría, que se mantiene válida a temperatura y densidad finitas.

La masa del plasmón cabe entenderla como una consecuencia dinámica del proceso de propagación del fotón en un plasma de electrones y positrones. Ahora existirán procesos de polarización debidos tanto a la creación y consecuente aniquilación de pares como a procesos dispersivos de absorción y ulterior emisión del fotón por partículas reales (no virtuales) en dependencia de la temperatura y la densidad del medio, y estos efectos determinan una diferencia drástica entre la ley de dispersión de las ondas electromagnéticas en el medio comparada con la del vacío.

El problema que nos proponemos investigar tiene interés en sí mismo y también como parte importante del problema general de la adquisición de masa con la temperatura por los campos vectoriales en las teorías de norma.

En 1972 Kirzhnits y Linde [1] argumentaron que los campos masivos W^\pm y Z anularían su masa —adquirida mediante el mecanismo de ruptura espontánea de la simetría— a una temperatura crítica T suficientemente alta, y, en consecuencia, las interacciones débiles se harían de largo alcance. Kislinger y Morley [2], sin embargo, calcularon el efecto plasmónico en el modelo escalar $\lambda\phi^4$, en la electrodinámica cuántica y en el caso de campos de Yang-Mills y llegaron a la conclusión de que en los tres casos aparece un efecto de masa a alta temperatura $m^2 \sim T^2$, lo que invalidaría los argumentos de Kirzhnits y Linde.

Sin embargo, Kirzhnitsy y Linde [3] (véase también Linde [4]) contraargumentaron que tales conclusiones estaban basadas en un análisis incompleto del comportamiento de la función de Green inversa D^{-1} del fotón, pues en el límite infrarrojo la masa de la parte magnética de éste es nula.

Los argumentos expuestos por Linde [4], aunque enteramente válidos, no son suficientemente detallados y no establecen con claridad la relación entre el problema termodinámico —o de la física estadística del equilibrio, basada en funciones de Green dependientes de la temperatura— y el problema cinético —basado en funciones de Green dependientes del tiempo y la temperatura.

Por esta razón es frecuente ver en la literatura (por ejemplo, Smilga [5]) referencia a la masa adquirida con la temperatura sin que realmente haya un análisis más completo (*v. gr.* como se hace en las Refs. [3,4]) acerca de este problema.

Nuestro objetivo es hacer un estudio detallado de la ecuación de dispersión para el fotón en un medio a temperatura finita, y discutir el problema de la masa del fotón —dependiente de la temperatura— en la electrodinámica cuántica estadística (SQED).

En la Sec. 2 a partir de las expresiones conocidas para el operador de polarización en la electrodinámica cuántica estadística, se obtienen las ecuaciones de dispersión de los modos electromagnéticos en el llamado "vacío caliente", es decir, radiación de cuerpo negro a muy alta temperatura en la que se tiene un plasma electrón-positrón de carga neta nula en equilibrio con la radiación electromagnética de fondo.

En la Sec. 3 las soluciones aproximadas de estas ecuaciones se obtienen en los límites $\omega = 0$, $\vec{k} \rightarrow 0$ y $\omega \neq 0$, $\vec{k} \rightarrow 0$ para los modos transversos, y $\omega = 0$, $\vec{k} \rightarrow -\lambda_D^{-1}$; $\omega \neq 0$, $\vec{k} \rightarrow 0$ para los modos longitudinales. A partir de los resultados de Vologodskiy [9] se discuten los mecanismos causantes de la absorción de estos modos y se establecen las regiones "transparentes" y "opacas" para su propagación. Se discute la diferencia entre los conceptos de masa del fotón y masa del plasmón. Se hace una analogía de la curva de dispersión para los modos transversos con la de un gas de bosones cargados que obedecen la condensación de Bose-Einstein. A partir de estas consideraciones, se discute, en el límite infrarrojo, la relación entre las transiciones de fase de restablecimiento de simetría y condensación de Bose-Einstein para campos vectoriales masivos en teorías con ruptura espontánea de simetría.

2. OPERADOR DE POLARIZACIÓN Y ECUACIONES DE DISPERSIÓN EN LA SQED

2.1. Operador de polarización

El operador de polarización juega un papel esencial en la electrodinámica cuántica estadística SQED. Éste puede ser empleado para obtener las correcciones radiativas al potencial termodinámico y a la función de Green inversa del fotón. Por otro lado, está simplemente relacionado al tensor de permeabilidad dieléctrica en un medio. Las singularidades del operador de polarización para algunos valores de la cuarta componente del cuadrimomento del fotón en un medio aparecen conectadas a los procesos de absorción elementales, los cuales tienen lugar en el medio. En relación a esto es importante señalar que en SQED el operador de polarización contiene la contribución del diagrama de vacío, es decir, la creación y aniquilación de un par virtual e^+e^- , más otros diagramas que describen la excitación y el decaimiento de un electrón (o positrón) en los procesos de absorción y emisión de un fotón (Fig. 1).

Cuando desarrollamos la continuación analítica $k_4 \rightarrow i(\omega - i\epsilon)$ el operador de polarización retardado $\Pi_{\mu\nu}^r$ tiene singularidades asociadas a la absorción debida a estos procesos: la creación de pares electrón-positrón y la excitación de electrones y positrones a estados cuánticos más energéticos (dispersión).

2.2. Solución a las ecuaciones de Maxwell linealizadas en SQED. Polos de la función de Green inversa del fotón

Consideremos los ceros de la función de Green inversa del fotón:

$$D_{\mu\nu}^{-1} = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) k^2 - \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) Q(k) - \Pi_{\mu\nu}^s + \alpha k_\mu k_\nu = 0, \quad (1)$$

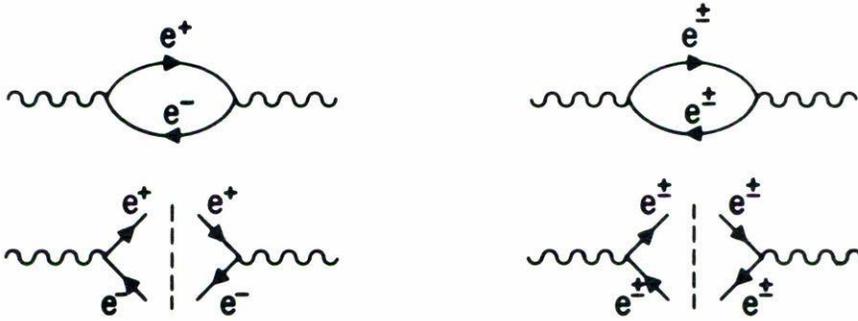


FIGURA 1. Diagrama de la polarización usual del vacío (creación y aniquilación del par virtual e^-e^+). A temperatura y densidad finitas este diagrama describe un proceso físico real. Diagrama adicional en un medio (plasma electrón-positrón). Es debido a la excitación y consecuente desexcitación de electrones y positrones.

donde

$$Q(k) = k^2 I, \tag{2}$$

$$I = \frac{e^2}{12\pi^2} (\vec{k}^2 + k_4^2)^2 \int_{4m^2}^{\infty} dx \frac{\left(1 + \frac{2m^2}{x}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{x}\right)^{1/2}}{x(x + \vec{k}^2 + k_4^2)}, \tag{3}$$

es el límite de QFT en variables euclideanas; $\alpha k_\mu k_\nu$ es la condición de calibración y $\Pi_{\mu\nu}^s$ tiene la estructura dada por Fradkin [7], tal que $\lim_{T \rightarrow 0, \mu \rightarrow 0} \Pi_{\mu\nu}^s = 0$.

Para obtener las ecuaciones de dispersión y el espectro de los modos físicos resolvemos $\det D_{\mu\nu}^{-1}(\alpha) = 0$. Escogiendo para más sencillez $k_2 = k_3 = 0$ —dada la isotropía del espacio de momentos 3-D—, queda

$$(k^2 - Q - A)^2 \times \begin{vmatrix} k^2 - (1 - \alpha)k_1^2 - \left(1 - \frac{k_1^2}{k^2}\right) Q - \frac{k_4^2}{k_1^2} \Pi_{44}^s & - \left[(1 - \alpha) - \frac{Q(k)}{k^2} + \frac{\Pi_{44}^s}{k_1^2} \right] k_1 k_4 \\ - \left[(1 - \alpha) - \frac{Q(k)}{k^2} - \frac{\Pi_{44}^s}{k_1^2} \right] k_1 k_4 & k^2 - (1 - \alpha)k_4^2 - \left(1 - \frac{k_4^2}{k^2}\right) Q - \Pi_{44}^s \end{vmatrix} = 0.$$

con $Q = k^2 I$

$$(k^2 - Q - A)^2 \begin{vmatrix} k_4^2 - k_4^2 I + \alpha k_1^2 - \frac{k_4^2}{k_1^2} \Pi_{44}^s & - \left[(1 - \alpha) - I + \frac{\Pi_{44}^s}{k_1^2} \right] k_1 k_4 \\ - \left[(1 - \alpha) - I - \frac{\Pi_{44}^s}{k_1^2} \right] k_1 k_4 & k_1^2 - k_1^2 I + \alpha k_4^2 - \Pi_{44}^s \end{vmatrix} = 0.$$

finalmente la ecuación para los polos de la función de Green inversa del fotón es

$$\det D_{\mu\nu}^{-1}(\alpha) = \alpha(k^2 - Q - A)^2(\vec{k}^2 + k_4^2)^2 \left(1 - I - \frac{\Pi_{44}^s}{\vec{k}^2}\right) = 0. \tag{4}$$

El término $(\vec{k}^2 + k_4^2)^2$ corresponde a dos modos no físicos y su contribución es cancelada por el determinante de Faddeev-Popov [6].

De esta manera quedan dos ecuaciones de dispersión independientes para el fotón, que son $k^2 = A + k^2 I$, para los dos tipos de modos transversos y $\vec{k}^2 = \Pi_{44}^s + \vec{k}^2 I$, para los modos longitudinales.

Observemos que estas ecuaciones de dispersión son independientes de α , es decir, son invariantes de norma.

En el límite $T \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow 0$, $\Pi_{44}^s \rightarrow 0$, y solo quedan los dos modos transversos.

En el caso de la electrodinámica cuántica estadística, el operador de polarización, en la aproximación de un lazo (orden e^2), tiene la forma

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \frac{e^2}{(2\pi)^3\beta} \text{tr} \sum_{p_4} \int d^3p \frac{\gamma_\mu(-i\gamma_\rho p_\rho^* + m)\gamma_\nu(-i\gamma_\sigma(p_\sigma^* + k_\sigma) + m)}{[(p^* + k)^2 + m^2][p^{*2} + m^2]} \tag{5}$$

donde

$$p_\mu^* = \begin{cases} p_\rho, & \text{para } \rho = 1, 2, 3; \\ p_4 + i\mu, & \text{para } \rho = 4. \end{cases}$$

Efectuando el cálculo, obtenemos

$$\Pi_{\nu\nu}^s = -2\frac{e^2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\epsilon_p} \left[1 + \frac{\vec{k}^2 + k_4^2 - 2m^2}{8pk} \ln a\right] n, \tag{6}$$

donde

$$a = \frac{(\vec{k}^2 - 2pk + k_4^2)^2 + 4k_4^2\epsilon_p^2}{(\vec{k}^2 + 2pk + k_4^2)^2 + 4k_4^2\epsilon_p^2}, \quad n = n_e + n_p \quad \text{y} \quad n_{e,p} = \frac{1}{\exp(\epsilon_p \mp \mu)\beta + 1}$$

(en correspondencia con Fradkin [7] y Vologodskiy [9]). Siguiendo el cálculo anterior, obtenemos por el mismo camino Π_{44}^s . De la Ec. (5) tenemos que

$$\Pi_{44}(k) = \frac{8e^2}{(2\pi)^3\beta} \sum_{p_4} \int d^3p \frac{p^{*2} + p^*k + m^2 - 2p_4^{*2} - 2p_4^*k_4}{[(p^* + k)^2 + m^2][p^{*2} + m^2]}, \tag{7}$$

$$\Pi_{44}^s = -\frac{e^2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\epsilon_p} \left[1 + \frac{\vec{k}^2 + k_4^2 - 4\epsilon_p^2}{8pk} \ln a - \frac{ik_4\epsilon_p}{2pk} \ln b\right] n, \tag{8}$$

donde

$$b = \frac{(\vec{k}^2 + k_4^2)^2 - 4(pk + ik_4\epsilon_p)^2}{(\vec{k}^2 + k_4^2)^2 - 4(pk - ik_4\epsilon_p)^2}. \quad (9)$$

De la Ref. [7] se sigue que

$$A = \frac{1}{2} \left(\Pi_{\nu\nu} - \frac{k_4^2 + \vec{k}^2}{\vec{k}^2} \Pi_{44} \right), \quad (10)$$

y usando la Ec. (6) resulta

$$A = \frac{-e^2}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\epsilon_p} \left[1 - \frac{k_4^2}{\vec{k}^2} + \frac{k^4 - k_4^4 + 4k_4^2\epsilon_p^2 + 4p^2\vec{k}^2}{8pk^3} \ln a + \frac{ik_4\epsilon_p}{2pk^3} (\vec{k}^2 + k_4^2) \ln b \right] n. \quad (11)$$

Las expresiones completas de $\Pi_{\nu\nu}$ y Π_{44} están dadas por

$$\Pi_{\nu\nu} = \Pi_{\nu\nu}^s + \Pi_{\nu\nu}^R \Big|_{\mu=\beta-1=0}, \quad (12)$$

donde

$$\Pi_{\nu\nu}^R = 3\Pi_0^R \quad (13)$$

y

$$\Pi_0^R = \frac{e^2}{12\pi^2} (\vec{k}^2 + k_4^2)^2 \int_{4m^2}^\infty dx \frac{\left(1 + \frac{2m^2}{x}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{x}\right)^{1/2}}{x(x + \vec{k}^2 + k_4^2)}, \quad (14)$$

que corresponde a la expresión renormalizada del operador de polarización en el límite de QFT en variables euclidianas.

Así también

$$\Pi_{44} = \Pi_{44}^s + \Pi_{44}^R, \quad (15)$$

donde

$$\Pi_{44}^R = \frac{\vec{k}^2}{\vec{k}^2 + k_4^2} \Pi_0^R. \quad (16)$$

3. SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DE DISPERSIÓN. MASA DEL FOTÓN Y DEL PLASMÓN

3.1. Soluciones límites de las ecuaciones de dispersión

Consideraremos las soluciones de las ecuaciones de dispersión para los dos modos transversos y el modo longitudinal en dos regiones límites en el eje de las frecuencias, particularmente importantes: $\omega = 0, \vec{k} \neq 0$ y $\omega \neq 0, \vec{k} \rightarrow 0$. El primero corresponde al límite infrarrojo. El segundo, para temperaturas suficientemente altas, marca el comienzo de la zona ultravioleta. El intervalo de frecuencias comprendido entre ambos límites, como veremos, es una zona esencialmente absorbente, mientras que para frecuencias mayores que el segundo límite determina el inicio de la zona de propagación de los modos físicos.

(1) Límite $\omega = 0, \vec{k} \neq 0$

Consideremos primero el caso de los modos transversos. La ecuación de dispersión correspondiente, en el límite $\omega = 0, \vec{k} \rightarrow 0$, toma la forma

$$k^2 - A(k) - I(k) = 0, \tag{17}$$

donde

$$A(k) = \frac{-e^2}{6\pi^2} k^2 \ln \frac{m}{T}. \tag{18}$$

El término en la expresión límite anterior fue obtenida por Fradkin [7].

La solución de (17) es, evidentemente,

$$k^2 = 0, \tag{19}$$

es decir, campos estáticos y homogéneos que satisfacen la ecuación de Laplace.

Por otra parte, estudiemos la solución en un entorno del punto $\omega = 0, \vec{k} = 0$, es decir, para $\omega \neq 0$, pero muy pequeño y $\vec{k} \neq 0$. Para ello desarrollemos $A(\omega, \vec{k})$ en potencias de ω :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0} &= 0, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega=0} &= \frac{-2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\epsilon_p} n \left[-\frac{2}{k^2} + \frac{16 \epsilon_p^2}{-4p^2 k^2 + k^4} + (2pk + k^2)^2 (4p^2 k^2 + k^4) \right. \\ &\quad \times \frac{8\epsilon_p^2 + 4(-2pk + k^2)}{(2pk + k^2)^2} - \frac{(-2pk + k^2)^2 (8\epsilon_p^2 + 4(2pk + k^2))}{(2pk + k^2)^4} \\ &\quad \left. + \frac{\epsilon_p^2}{pk^3} \ln \frac{(-2pk + k^2)^2}{(2pk + k^2)^2} \right], \tag{20} \end{aligned}$$

entonces la ecuación de dispersión queda, para \vec{k} pequeño,

$$\omega^2 = \frac{\vec{k}^2 \left(1 + \frac{e^2}{6\pi^2} \ln \frac{m}{T} \right)}{1 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 A}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=0}}, \tag{21}$$

como vemos de la Ec. (20), $\left. \frac{\partial^2 A}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=0}$ es infinito, luego la solución de la Ec. (21) es $\omega = 0$, $\vec{k}^2 \neq 0$: la curva de dispersión es tangente al eje \vec{k} ($\omega = 0$). Un análisis del signo en la Ec. (20) muestra que $\left. \frac{\partial^2 A}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=0} \rightarrow -\infty$, luego esto sugiere que la curva de dispersión se extiende en la parte negativa de \vec{k}^2 ; los modos transversos son inestables en esta región. Luego no son estables las soluciones correspondientes a campos magnéticos inhomogéneos (pero sí la de campos homogéneos (19), es decir, $\omega = 0$, $\vec{k} = 0$).

En el caso del modo longitudinal, en el mismo límite, tenemos

$$\vec{k}^2 - \Pi_{44}^s(k) - \frac{e^2}{12\pi^2} \vec{k}^4 \int_{4m^2}^{\infty} dx \frac{\left(1 + \frac{2m^2}{x} \right) \left(1 - \frac{4m^2}{x} \right)^{1/2}}{x(x + \vec{k}^2)} = 0, \tag{22}$$

como $\Pi_{44}^s(0, 0) = -\lambda_D^{-2}$ (donde λ_D es el radio de Debye). Para \vec{k}^2 de orden e^2 , la solución de la Ec. (22) es justamente

$$\vec{k}^2 = -\lambda_D^{-2}. \tag{23}$$

Buscamos la solución ahora en un entorno del punto $(0, -\lambda_D^{-2})$, es decir, supongamos $\omega \neq 0$ y \vec{k}^2 próximo a $-\lambda_D^{-2}$. Para ello desarrollemos Π_{44}^s en serie de potencias de ω . Resulta para k pequeño

$$\Pi_{44}^s(0, \vec{k}) = \frac{-e^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{p^2 dp}{\epsilon_p} n \left[1 + \frac{\epsilon_p^2}{p^2} + \frac{\left(\frac{2\epsilon_p^2}{3p^3} - \frac{2}{p} \right) k^2}{8p} \right], \tag{24}$$

$$\left. \frac{\partial \Pi_{44}^s}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} = 0, \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \Pi_{44}^s}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=0} &= \frac{-e^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{p^2 dp}{\epsilon_p} n \left[\frac{-16\epsilon_p^2}{-4p^2k^2 + k^4} + (-4\epsilon_p^2 + k^2)(2pk + k^2)^2 \right. \\ &\quad \times \frac{8\epsilon_p^2 + 4(-2pk + k^2)}{(2pk + k^2)^2} - \frac{(-2pk + k^2)^2(8\epsilon_p^2 + 4(2pk + k^2))}{(2pk + k^2)^4} \\ &\quad \left. + \frac{1}{4pk} \ln \frac{(-2pk + k^2)^2}{(2pk + k^2)^2} \right]. \tag{26} \end{aligned}$$

Tenemos entonces que se puede escribir

$$\Pi_{44}^s(0, \vec{k}) = -\lambda_D^{-2} + \vec{k}^2 J, \tag{27}$$

donde

$$J = \frac{-e^2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\epsilon_p} n \left(\frac{2\epsilon_p^2}{3p^3} - \frac{2}{p} \right) \frac{\vec{k}^2}{8p}. \tag{28}$$

Recordando que

$$I = \frac{e^2}{12\pi^2} \int_{4m^2}^\infty dx \frac{\left(1 + \frac{2m^2}{x}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{x}\right)^{1/2}}{x(x + \vec{k}^2)}, \tag{29}$$

la ecuación de dispersión queda

$$-\omega^2 + \vec{k}^2 + \lambda_D^{-2} - \vec{k}^2 J - \vec{k}^4 I - \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \Pi_{44}^s}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=0} \omega^2 = 0, \tag{30}$$

de donde

$$\omega^2 = \frac{\lambda_D^{-2} + \vec{k}^2(1 - J - \vec{k}^2 I)}{1 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \Pi_{44}^s}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=0}}, \tag{31}$$

que es cero porque $\left. \frac{\partial^2 \Pi_{44}^s}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=0} \rightarrow \infty$. Luego, en un entorno del punto $(0, -\lambda_D^{-2})$ la curva de dispersión del modo longitudinal es tangente al eje $\omega = 0$ (es fácil ver que $\frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = 0$).

(2) Límite $\omega \neq 0, \vec{k} \rightarrow 0$

Busquemos las soluciones de las ecuaciones de dispersión en este límite. Es importante tener en cuenta la forma de $A(\omega, \vec{k})$ y Π_{44}^s en este caso. Se tiene

$$\Pi_{44}^s = -\frac{k^2}{k_4^2} \omega_p^2, \tag{32}$$

donde

$$\omega_p^2 = \frac{4e^2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\epsilon_p(4\epsilon_p^2 + k_4^2)} \left(\epsilon_p^2 - \frac{p^2}{3} \right) n \tag{33}$$

y

$$A(\omega, 0) = -\omega_p^2; \tag{34}$$

llamaremos a ω_p por razones que veremos después, masa del plasmón.

A muy alta temperatura, $T \gg m$, se tiene de la Ec. (33) que

$$\omega_p^2 \simeq \frac{e^2 T^2}{9}. \tag{35}$$

Entonces la solución de las ecuaciones de dispersión las buscaremos en un entorno del punto $(\omega_p^2, 0)$.

En primer lugar, consideramos el caso de los modos transversos. Se tiene, aproximadamente (para \vec{k} pequeño)

$$-\omega^2 + \vec{k}^2 + \omega_p^2 - (\omega^4 - 2\omega^2 \vec{k}^2)I = 0, \tag{36}$$

de donde resulta

$$\omega^2 \simeq \vec{k}^2 + \omega_p^2 \tag{37}$$

como una recta en el plano ω^2, \vec{k}^2 , que pasa por el punto $(\omega_p^2, 0)$. La expresión (37) corresponde a la ecuación de dispersión de una partícula masiva de masa $m^2 = \omega_p^2$, que llamamos plasmón.

Para el modo longitudinal queda la ecuación

$$1 - \frac{\Pi_{44}^s}{\vec{k}^2} - I = 0. \tag{38}$$

De la Ec. (32), haciendo $k_4 = i\omega$,

$$\omega^2 - \omega_p^2 + \omega^2 I = 0 \tag{39}$$

en un entorno del punto $(\omega_p^2, 0)$, tenemos como solución de la Ec. (39) que

$$\omega^2 \simeq \omega_p^2. \tag{40}$$

Luego, la curva de dispersión para este modo pasa también por el punto $(\omega_p^2, 0)$. Y es de esperar que en una mejor aproximación, tengamos una ecuación de dispersión análoga a (37), para el plasmón longitudinal. Podemos dibujar entonces la gráfica de la Fig. 2.

3.2. Región absorbente y región transparente

La gráfica de la Fig. 2 sugiere que en la región $\omega < \omega_p$ no hay modos estables, pues las ecuaciones de dispersión se satisfacen para valores imaginarios puros de la frecuencia o del

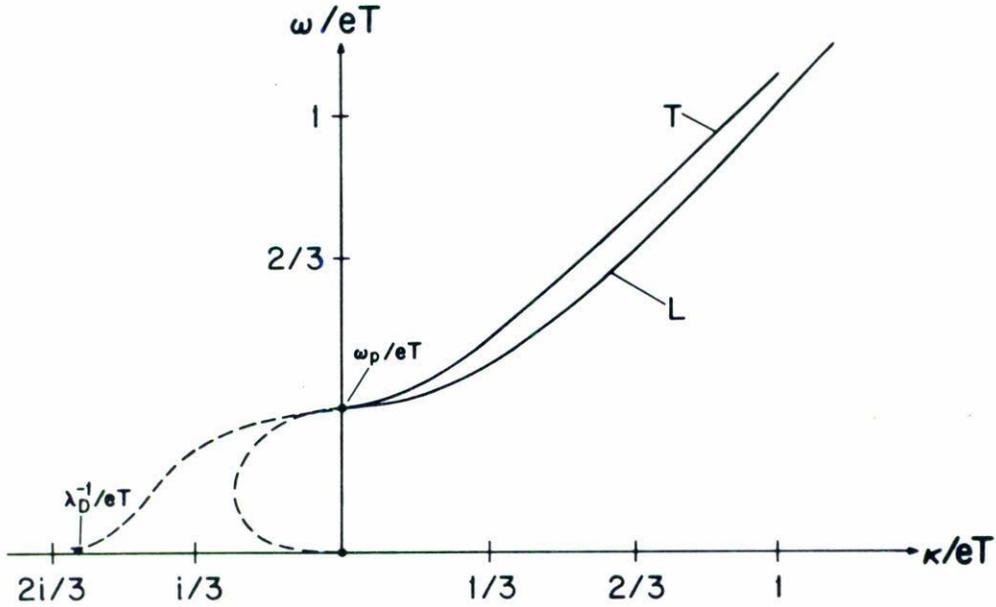


FIGURA 2. Curvas de dispersión para los modos transversos y longitudinales. Localización de los polos en el propagador bosónico que están determinados por $\omega^2 = k^2 + A(\omega, k)$ y $\omega^2 = k^2 + \frac{k^2 - \omega^2}{k^2} \Pi_{44}^s(\omega, k)$, en el caso de masa electrónica nula [10]. Note que para $\omega < \frac{\epsilon T}{3}$, ambas soluciones, longitudinal y transversa tienen vector de onda imaginario, y que en el límite de altas frecuencias $\omega \neq 0$ ambos modos corresponden a cuasipartículas masivas.

número de ondas. Un modo de propagación se considera estable si la frecuencia aparece de la forma $\omega + i\Gamma$, donde Γ es una cantidad pequeña, y representa el recíproco del tiempo de vida media del modo en cuestión.

La absorción del medio es esencialmente debida a mecanismos de dispersión para $\omega^2 < 4m^2$. Si $\omega^2 > 4m^2$, los procesos de creación de pares electrón-positrón juegan un papel importante.

Esto se hace comprensible si se consideran los mecanismos de absorción en los dos casos límites estudiados anteriormente: $\omega = 0$ y $\vec{k} \neq 0$, y $\omega \neq 0$ y $\vec{k} \rightarrow 0$. Para ello desarrollamos los términos a y b de las fórmulas para A y Π_{44}^s de la manera que sigue:

$$a = \frac{(\epsilon_{p-k} - \epsilon_p - \omega)(\epsilon_{p-k} + \epsilon_p + \omega)(\epsilon_{p-k} - \epsilon_p + \omega)(\epsilon_{p-k} + \epsilon_p - \omega)}{(\epsilon_{p+k} - \epsilon_p - \omega)(\epsilon_{p+k} + \epsilon_p + \omega)(\epsilon_{p+k} - \epsilon_p + \omega)(\epsilon_{p+k} + \epsilon_p - \omega)}, \tag{41}$$

$$b = \frac{(\epsilon_{p+k} + \epsilon_p + \omega)(\epsilon_{p+k} - \epsilon_p - \omega)(\epsilon_{p-k} + \epsilon_p - \omega)(\epsilon_{p-k} - \epsilon_p + \omega)}{(\epsilon_{p-k} + \epsilon_p + \omega)(\epsilon_{p-k} - \epsilon_p - \omega)(\epsilon_{p+k} + \epsilon_p - \omega)(\epsilon_{p+k} - \epsilon_p + \omega)}.$$

En el primer caso ($\omega = 0$ y $\vec{k} \neq 0$), a y b sólo se anulan a causa de procesos de dispersión estática:

$$\epsilon_{p \pm k} - \epsilon_p = 0. \tag{42}$$

En el segundo caso, tomemos $\omega \neq 0$ y k pequeño. Entonces, los términos a y b se anulan en los casos

$$\epsilon_{p\pm k} - \epsilon_p - \omega = 0, \tag{43}$$

$$\epsilon_{p\pm k} + \epsilon_p - \omega = 0. \tag{44}$$

El primer caso referido corresponde a un mecanismo típico de dispersión de un electrón o positrón; el segundo, a la creación de un par electrón-positrón. El segundo proceso requiere, evidentemente, $\omega \geq 2m$. El proceso de creación de un par en el medio a partir de un fotón es posible ahora porque la ley de dispersión se aparta del cono de luz $\omega = k$. Las singularidades ocurren en este caso en la integral con respecto a p , para los valores

$$p = \pm \frac{k}{2} + \frac{\omega}{2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2 - \omega^2}}, \tag{45}$$

con $p = |\vec{p}|$, $k = |\vec{k}|$.

Debido a estas singularidades, la parte imaginaria de A o la parte imaginaria de $\Pi_{\nu\nu}$ y Π_{44}^s ($A = \frac{1}{2} \left(\Pi_{\nu\nu} - \frac{\vec{k}^2 - \omega^2}{\vec{k}^2} \Pi_{44}^s \right)$) son [9]:

Para $\omega^2 > \vec{k}^2 + 4m^2$,

$$\text{Im } \Pi_{\nu\nu} = -\frac{e^2(\omega^2 - \vec{k}^2 + 2m^2)}{4\pi k} \left[2\kappa - \frac{1}{\beta} \ln \frac{\cosh \beta \left(\frac{\omega}{2} + \kappa \right) + \cosh \beta \mu}{\cosh \beta \left(\frac{\omega}{2} - \kappa \right) + \cosh \beta \mu} \right] \tag{46}$$

$$\text{Im } \Pi_{44}^s = \frac{e^2}{8\pi k} \int_{-\epsilon_1}^{\epsilon_2} n d\epsilon_p [\vec{k}^2 - \omega^2 - 4\epsilon_p^2 + 4\epsilon_p \omega]; \tag{47}$$

para $\omega < k$,

$$\text{Im } \Pi_{\nu\nu} = \frac{e^2(\vec{k}^2 - \omega^2 + 2m^2)}{4\pi k} \left[\omega - \frac{1}{\beta} \ln \frac{\cosh \beta \left(\frac{\omega}{2} + \kappa \right) + \cosh \beta \mu}{\cosh \beta \left(-\frac{\omega}{2} + \kappa \right) + \cosh \beta \mu} \right] \tag{48}$$

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi_{44}^s = & -\frac{e^2}{8\pi k} \left(\int_{\epsilon_1}^{\infty} n d\epsilon_p [-\vec{k}^2 + \omega^2 + 4\epsilon_p^2 + 4\epsilon_p \omega] \right. \\ & \left. + \int_{\epsilon_2}^{\infty} n d\epsilon_p [\vec{k}^2 - \omega^2 - 4\epsilon_p^2 + 4\epsilon_p \omega] \right), \end{aligned} \tag{49}$$

donde

$$\epsilon_1 = -\frac{\omega}{2} + \kappa, \quad \epsilon_2 = \frac{\omega}{2} + \kappa, \quad \kappa = \frac{k}{2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{\vec{k}^2 - \omega^2}}. \tag{50}$$

Si k es fijo, sea $0 < \omega_2 < k < \omega_1$. Para $\omega_1 > k$, $\epsilon_1 < 0$; sea entonces $\tilde{\epsilon}_1 = |\epsilon_1|$. Para $\omega_2 < k$, $\epsilon_2 > \epsilon_1$; además,

$$\text{Im } \Pi_{44} = \frac{e^3}{8\pi k} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} n d\epsilon_p [k^2 - \omega_2^2 - 4\epsilon_p^2 - 4\epsilon_p\omega_2] - \frac{e^2}{\pi k} \int_{\epsilon_2}^{\infty} n d\epsilon_p \epsilon_p\omega_2. \quad (51)$$

En el caso degenerado, donde $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \mu < \infty$, $n \sim 1$, obtenemos que

$$\int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} d\epsilon_p [k^2 - \omega_2^2 - 4\epsilon_p^2 - 4\epsilon_p\omega_2] = k^2\omega_2 - \frac{4}{3}\omega_2^3 - 4\kappa^2\omega_2 - 4\kappa\omega_2^2; \quad (52)$$

como $\kappa > \frac{k}{2}$ para $\omega_2 < k$, entonces

$$\frac{4}{3}\omega_2^3 + 4\kappa^2\omega_2 + 4\kappa\omega_2^2 > \frac{4}{3}\omega_2^3 + k^2\omega_2 + 2k\omega_2^2 > k^2\omega_2, \quad (53)$$

de manera que

$$\text{Im } \Pi_{44}|_{\omega_2 < k} < 0. \quad (54)$$

Por otra parte

$$\int_{\tilde{\epsilon}_1}^{\epsilon_2} n d\epsilon_p [k^2 - \omega_1^2 - 4\epsilon_p^2 + 4\epsilon_p\omega_1] = k^2\omega_1 - \frac{4}{3}\omega_1^3 - 4\kappa^2\omega_1 + 4\kappa\omega_1^2; \quad (55)$$

como $\kappa < \frac{k}{2}$ para $\omega_1 > k$, entonces

$$k^2\omega_1 + 4\kappa\omega_1^2 < \frac{4}{3}\omega_1^3 + 4\kappa^2\omega_1, \quad (56)$$

de modo que

$$\text{Im } \Pi_{44}|_{\omega_1 > k} > 0. \quad (57)$$

Además se cumple que

$$\left| \int_{\tilde{\epsilon}_1}^{\epsilon_2} n d\epsilon_p [k^2 - \omega_1^2 - 4\epsilon_p^2 + 4\epsilon_p\omega_1] \right| < \left| \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} n d\epsilon_p [k^2 - \omega_2^2 - 4\epsilon_p^2 - 4\epsilon_p\omega_2] \right|, \quad (58)$$

así

$$|\text{Im } \Pi_{44}|_{\omega_2 < k} > |\text{Im } \Pi_{44}|_{\omega_1 > k}. \quad (59)$$

Respecto a la parte imaginaria de $\Pi_{\nu\nu}$ en el caso degenerado ($T = 0$) obtenemos que

$$\text{Im } \Pi_{\nu\nu} \Big|_{\omega_1 > k} = -\frac{e^2}{2\pi k} (\omega^2 - \vec{k}^2 + 2m^2) \kappa < 0, \tag{60}$$

$$\text{Im } \Pi_{\nu\nu} \Big|_{\omega_2 < k} = -\frac{e^2}{4\pi k} (\vec{k}^2 - \omega^2 + 2m^2) \omega > 0. \tag{61}$$

Además

$$\Gamma \propto \text{Im } A = \text{Im} \left(\frac{1}{2} \left[\Pi_{\nu\nu} - \frac{\vec{k}^2 - \omega^2}{\vec{k}^2} \Pi_{44} \right] \right), \tag{62}$$

entonces

$$\left| \frac{\Gamma_{\omega_2 < k}}{\Gamma_{\omega_1 > k}} \right| > 1. \tag{63}$$

Luego, concluimos que la región menos absorbente está limitada inferiormente por la curva umbral de creación de pares $\omega^2 - \vec{k}^2 = 4m^2$. Para temperaturas suficientemente altas $\omega_p^2 \geq 4m^2$, y las curvas de dispersión están situadas entonces en la zona “transparente”.

Hay que señalar que lo considerado en las dos subsecciones precedentes fue examinado por Tsyтовich [8] en otro camino, incluyendo un efecto físico adicional, es decir, él obtiene el espectro para los modos transversal y longitudinal a alta temperatura en el caso de absorción debido a la producción de pares en adición a la absorción debido a la radiación Cerenkov de partículas en un medio altamente denso.

3.3. Masa del fotón y masa del plasmón

En el vacío, la masa del fotón es nula $\omega^2 = \vec{k}^2$. Esta condición es demandada por la invariancia de norma del campo electromagnético. Si en la lagrangiana hubiese un término de masa $\frac{1}{2} m_f^2 A_\mu^2$, la invariancia de norma sería destruida. Esto se puede ver también en las ecuaciones de Maxwell en el vacío, que serían

$$(\partial^2 \delta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) A_\nu + m_f^2 A_\mu = 0, \tag{64}$$

y obviamente (51) no es invariante de norma bajo la transformación $A_\mu + \partial_\mu \lambda$ (escribir un término de masa, equivale a fijar una norma).

Esto se evidencia también en la electrodinámica cuántica cuando se calculan los polos de la función de Green inversa del fotón. La función de Green inversa del fotón dependiente del parámetro de norma es

$$D_{\mu\nu}^{-1}(\alpha) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) (k^2 - A(k^2, m^2)) + \alpha k_\mu k_\nu, \tag{65}$$

donde, en la aproximación de un lazo,

$$A(k^2, m^2) = \frac{e^2}{12\pi^2} k^4 \int_{4m^2}^{\infty} dx \frac{\left(1 + \frac{2m^2}{x}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{x}\right)^{1/2}}{x(x + k^2 + i\epsilon)}. \quad (66)$$

Si se calcula $\det D_{\mu\nu}^{-1}(\alpha)$, resulta

$$\alpha k^2 (k^2 - A)^3 = 0; \quad (67)$$

el término αk^2 es cancelado por el determinante de Faddeev-Popov [6] (corresponde a modos no físicos). Finalmente queda la ecuación

$$k^2 + \frac{e^2}{12\pi^2} k^4 \int_{4m^2}^{\infty} dx \frac{\left(1 + \frac{2m^2}{x}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{x}\right)^{1/2}}{x(x + k^2 + i\epsilon)} = 0, \quad (68)$$

de donde se obtiene la solución de masa nula

$$k^2 = 0 \quad (69)$$

para la ecuación de dispersión del fotón. Es decir, la corrección a la masa del fotón por el operador de polarización en el vacío no cambia el valor nulo de ésta.

En el medio a temperatura y densidad finitas resultan dos casos y dos límites diferentes. Para el caso de los modos transversos, la ecuación de dispersión en el límite $\omega = 0$, $\vec{k} \rightarrow 0$ es, según (19), $k^2 = 0$, la cual corresponde al caso del vacío, es decir, al fotón de masa nula (como ya se mencionó en el párrafo anterior). Naturalmente, esta solución ocurre en una región fuertemente absorbente, donde los modos son inestables, pero que tiene plena validez desde el punto de vista físico (es consistente con la existencia de campos magnéticos estáticos y uniformes en el medio).

Para el caso del modo longitudinal (que no existe en el vacío) la solución de masa nula no existe, el modo es masivo, pues en el límite $\omega = 0$, $\vec{k}^2 = -\lambda_D^{-2} \neq 0$. Esta solución pone en evidencia el apantallamiento del modo eléctrico longitudinal (asociado a ondas coulombianas) por la acción de las cargas en el medio.

Ahora bien, en el límite de altas frecuencias $\omega \neq 0$, las ecuaciones de dispersión de ambos modos corresponden a partículas (o más bien, a quasi-partículas) masivas, en consecuencia con tres grados de libertad (dos transversos y uno longitudinal). Aunque la masa (definida como $\lim_{\vec{k} \rightarrow 0} \omega(\vec{k}, T)$) es la misma para los tres modos, la ley de dispersión del modo longitudinal difiere de la de los modos transversos, en analogía con la propagación de ondas en un medio elástico. No podemos llamarlas fotones, pues las ondas electromagnéticas en el medio dan lugar a fenómenos de polarización en términos de partículas reales (no virtuales, como en el vacío) y esta polarización depende de las características termodinámicas del medio (temperatura y densidad). A estas quasi-partículas las llamamos *plasmones* como ya hemos dicho, y su masa, como se ha visto, depende de la temperatura (para $T \gg m$, es $\omega_p^2 = \frac{e^2 T^2}{9}$).

3.4. Ecuaciones de dispersión exactas (límite $m = 0$)

Si se toma la masa del electrón como igual a cero (lo cual es razonable en el límite, $T \gg m$), es posible obtener expresiones explícitas para A y Π_{44}^s .

El cálculo realizado por Weldon [10] da, para el límite asintótico $T \gg \vec{k}$, $T \gg \omega$,

$$\Pi_{44}^s = -\frac{e^2 T^2}{3} \left(1 - \frac{\omega}{2k} \ln \left| \frac{\omega + k}{\omega - k} \right| \right), \quad (70)$$

$$A = -\frac{e^2 T^2}{6} \left[\frac{\omega^2}{\vec{k}^2} + \left(1 - \frac{\omega^2}{\vec{k}^2} \right) \frac{\omega}{2k} \ln \left| \frac{\omega + k}{\omega - k} \right| \right] \quad (71)$$

Estas expresiones tienen las propiedades

$$\Pi_{44}^s(0, \vec{k}) = -\frac{e^2 T^2}{3}, \quad A(0, \vec{k}) = 0, \quad (72)$$

$$A(\omega, 0) = -\frac{e^2 T^2}{9}. \quad (73)$$

A partir de ellas es posible obtener soluciones aproximadas de las ecuaciones de dispersión dentro de los mismos límites de la aproximación ($T \gg \vec{k}$, ω).

Por ejemplo, para $\omega \neq 0$ y \vec{k} pequeño es

$$A \simeq -\left(\frac{e^2 T^2}{9} + \frac{\vec{k}^2}{5} \right), \quad (74)$$

entonces la ecuación de dispersión para los modos transversos es

$$\omega^2 = \frac{e^2 T^2}{9} + \frac{6}{5} \vec{k}^2. \quad (75)$$

Para el modo longitudinal se comprueba que

$$\frac{\vec{k}^2 - \omega^2}{\vec{k}^2} \Pi_{44}^s = -\frac{e^2 T^2}{9} \left(1 - \frac{2\vec{k}^2}{5\omega^2} \right), \quad (76)$$

entonces la ecuación de dispersión para el modo longitudinal queda

$$\omega^2 = \frac{e^2 T^2}{9} + \frac{3}{5} \vec{k}^2. \quad (77)$$

Estas soluciones son válidas en un entorno del punto $(\omega_p^2, 0)$.

Para $\omega = 0$, resulta para los modos transversos

$$k^2 - A(0, \vec{k}) = 0, \quad (78)$$

es decir,

$$k^2 = 0, \quad (79)$$

y para el longitudinal

$$\vec{k}^2 + \frac{e^2 T^2}{3} = 0 \quad (80)$$

en concordancia con nuestros resultados anteriores. En la Fig. 2 se ilustra el comportamiento de estos modos.

3.5. La polémica Kirzhnits-Linde y Kislinger-Morley

En 1967 y 1968 respectivamente, fue propuesto por Weinberg y Salam, el modelo que unificaba las interacciones electromagnéticas y débiles en una teoría común, basada en una invariancia de norma no abeliana del grupo $SU(2) \times U(1)$ y en la idea de ruptura espontánea de simetría (tomada de modelos que describían la superconductividad), como un mecanismo para darle masa a los bosones vectoriales W_μ^\pm y Z_μ , intermediarios en las interacciones débiles.

En 1972, Kirzhnits y Linde [1] argumentaron, continuando la analogía con la superconductividad, que a una temperatura suficientemente alta la simetría debía restablecerse; es decir, sería posible que a temperaturas diferentes de cero, el parámetro ξ de ruptura de simetría se comportara como

$$\xi^2 = a^2 - \alpha T^2, \quad (81)$$

donde $\xi^2 = a^2$ en $T = 0$, y α dependa de las constantes de acoplamiento. Existe entonces una temperatura crítica T_c definida por

$$T_c^2 = \frac{a^2}{\alpha}, \quad (82)$$

tal que para $T \geq T_c$, se tiene $\xi = 0$; es decir, la simetría se restablece.

Entonces la masa de los bosones W_μ^\pm y Z_μ , dadas por $\frac{g\xi}{2}$ y $\frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{2}\xi$ (g y g' son las constantes de acoplamiento) se anularían a esa temperatura, pasando a ser las interacciones débiles de largo alcance.

En 1976, Kislinger y Morley [2] argumentaron que debido al efecto plasmónico (enteramente similar al que hemos visto en la sección anterior para QED), para los campos W_μ^\pm y Z_μ , debe haber una masa plasmónica que no se anula para $T \geq T_c$, sino que, por el contrario, aumenta con T ($m^2 \sim g^2 T^2$).

Kirzhnits y Linde [3] y Linde [4] argumentaron que el análisis de Kislinger y Morley no tomaba en cuenta la estructura mucho más complicada de la función de Green bosónica a $T \neq 0$, comparada con el caso de $T = 0$. En particular señalaron que en el límite en el cual se anularían las masas de los campos W_μ^\pm y Z_μ sería el infrarrojo que corresponde al caso $\omega = 0$, $\vec{k} \rightarrow 0$ y no al caso $\omega \neq 0$, $\vec{k} \rightarrow 0$.

Si hacemos la hipótesis razonable de que para $T \geq T_c$, la función de Green para los campos vectoriales en una teoría de norma (con simetría rota para $T < T_c$) debe tener un comportamiento cualitativamente similar al de la función de Green en la QED (al menos, en el caso abeliano), es de esperar que los modos transversos tengan una curva de dispersión análoga a la Fig. 2, que corresponde a la ecuación

$$-\omega^2 + \vec{k}^2 - A(\omega, \vec{k}) = 0. \tag{83}$$

Supongamos que $A(\omega, \vec{k})$ es aproximadamente constante (es decir, a T fija, $A(\omega, \vec{k}) = -M^2(T) \sim -e^2 T^2/9$ para $\omega \geq \omega_p$) y que $A(0, \vec{k}) \sim -b\vec{k}^2$, para \vec{k} pequeño. Haciendo la suma estadística

$$S = T \sum_{\vec{k}_4} \frac{\sqrt{-A(\omega, \vec{k})}}{k_4^2 + \vec{k}^2 - A(\omega, \vec{k})} \approx T \sum_{\vec{k}_4} \frac{M(T)}{k_4^2 + \vec{k}^2 + M^2(T)} - \frac{TM(T)}{\vec{k}^2 + M^2(T)} + \frac{T\sqrt{-A(0, \vec{k})}}{\vec{k}^2 - A(0, \vec{k})}.$$

Si se efectúa la suma del primer término, queda

$$S = \frac{M/E}{e^{E/T} - 1} - \frac{TM}{\vec{k}^2 + M^2} + \frac{T\sqrt{-A(0, \vec{k})}}{\vec{k}^2 - A(0, \vec{k})} + \frac{1}{2}, \tag{84}$$

donde $E = \sqrt{\vec{k}^2 + M^2}$.

En el límite $\vec{k} \rightarrow 0$, queda

$$\lim_{\vec{k} \rightarrow 0} S = \frac{T\sqrt{b}}{(1+b)k} + \frac{1}{2}, \tag{85}$$

es decir, $\lim_{\vec{k} \rightarrow 0} S$ diverge, en correspondencia con lo que ocurre en un gas de partículas bosónicas sin masa, a diferencia del caso $M \neq 0$ en que $\lim_{\vec{k} \rightarrow 0} S = \frac{T}{M} + \frac{1}{2}$. Luego, la masa del plasmón transverso no contribuye a S en el límite infrarrojo. Lo mismo ocurre para el potencial termodinámico Ω .

El comportamiento de S en la Ec. (72) es similar al de la distribución de Planck usual para el gas de fotones (sin incluir correcciones radiativas):

$$\lim_{\vec{k} \rightarrow 0} S = \frac{1}{e^{\frac{k}{T}} - 1} = \frac{T}{k}. \tag{86}$$

Esto sugiere que el número de fotones transversos estáticos ($\omega = 0, \vec{k} \rightarrow 0$) puede ser arbitrariamente grande y que puede ocurrir un condensado de estos fotones magnéticos.

Analizaremos esto con más detalle. Como observamos de la Fig. 2, en la región $\vec{k}^2 \leq 0$, la curva de dispersión está descrita por una función bivaluada. En particular, para $\vec{k} \rightarrow 0$, tenemos los dos valores $\omega = 0$ y $\omega = \omega_p$.

Comparemos la curva de dispersión con la que corresponde a un gas de bosones relativistas de masa M y potencial químico μ . Consideremos la suma estadística

$$S = \sum_{p_4} \frac{MT}{(k_4 - i\mu)^2 + \vec{k}^2 + M^2} = \frac{M}{2E} \left[\frac{1}{e^{(E-\mu)/T} - 1} + \frac{1}{e^{(E+\mu)/T} - 1} + 1 \right]. \quad (87)$$

Esta suma contiene las contribuciones de las dos ramas del espectro:

$$k_4 = \begin{cases} i(\epsilon_p + \mu), & \text{para las partículas;} \\ -i(\epsilon_p - \mu), & \text{para las antipartículas.} \end{cases} \quad (88)$$

Para $\mu = M$, se tiene condensación de las antipartículas, es decir, la población del estado básico crece arbitrariamente.

La curva de dispersión $\omega - \mu = \pm\epsilon_p$ en el plano ω , $\sqrt{\vec{k}^2}$ tiene la forma indicada en la Fig. 3. La rama superior corresponde a las partículas, de espectro

$$\omega^+ = \epsilon_p + \mu. \quad (89)$$

La rama inferior, a las antipartículas

$$\omega^- = -(\epsilon_p - \mu). \quad (90)$$

Obsérvese que para las antipartículas tomamos por conveniencia $\omega < 0$; sin embargo, usualmente se toma como la energía de las antipartículas el valor positivo; es decir, $\omega^- = +(\epsilon_p - \mu)$.

La expresión para la densidad de partículas más antipartículas se puede escribir, de la Ec. (87), como

$$n = \frac{2ES}{M} - 1 = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/T} - 1} + \frac{1}{e^{(\epsilon+\mu)/T} - 1}. \quad (91)$$

Cuando $\mu \rightarrow M$, la población del estado básico de las antipartículas crece indefinidamente, esto es, se produce condensación de Bose-Einstein. Esto corresponde en la curva de dispersión de las antipartículas a la intersección con el eje $\omega = 0$ para $\vec{k} \rightarrow 0$.

Volvamos ahora al caso del espectro de los modos transversos en SQED. Observamos que en la región $\vec{k}^2 \leq 0$, la curva de dispersión se comporta de modo similar al caso que acabamos de analizar.

La densidad de partículas se puede escribir, entonces, como la suma de las contribuciones de dos ramas. La rama plasmónica cuya ley de dispersión en un entorno de $\omega \neq 0$ y $\vec{k} \rightarrow 0$ es $\omega^2 = \frac{6}{5}\vec{k}^2 + m_p^2$ ($m_p = eT/3$), y la rama fotónica cuya ley de dispersión para $\vec{k}^2 \leq 0$ es la de una partícula de masa cero (la ecuación de dispersión aproximada para $\omega \ll \vec{k}$ es $-\omega^2 + \vec{k}^2 - 3m_p^2 \left(\frac{\omega^2}{\vec{k}^2} - \frac{\omega^4}{3\vec{k}^4} - \frac{\omega^6}{6\vec{k}^6} + \dots \right) = 0$. Tomando el primer término dentro del paréntesis resulta $\vec{k}^2 \sim \pm i\sqrt{3}m_p\omega$. Una mejor aproximación se obtiene tomando los

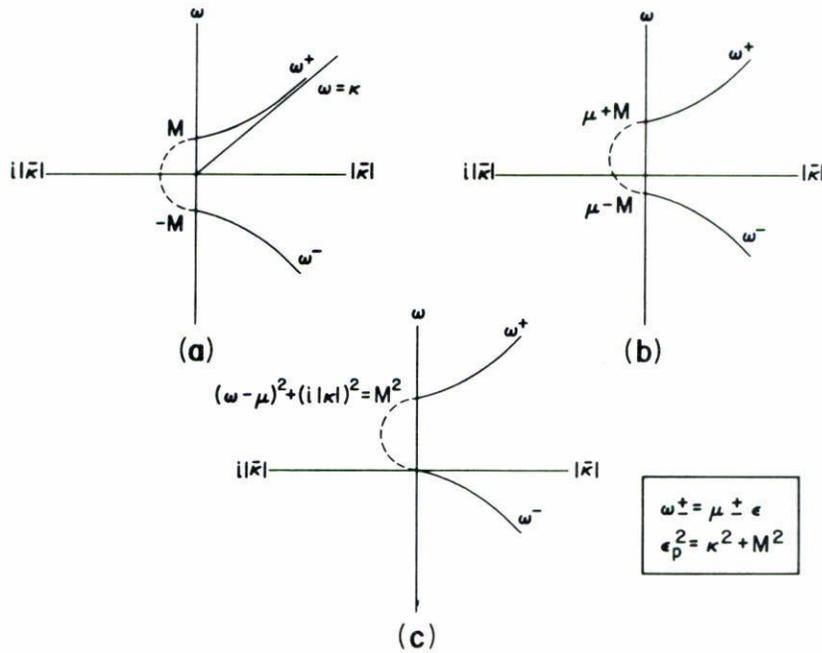


FIGURA 3. Curva de dispersión de un gas de bosones relativistas de masa M y potencial químico μ , en los casos: (a) $\mu = 0$, (b) $0 < \mu < M$, (c) $\mu = M$. La rama superior en las gráficas corresponde a las partículas mientras que la inferior a las antipartículas. Nótese que en el último caso donde hay condensación de Bose-Einstein obtenemos una gráfica de comportamiento semejante al espectro de los modos transversos para $\omega \geq 0$.

términos siguientes. En todo caso resulta que $\vec{k} \rightarrow 0$ si $\omega \rightarrow 0$, pero para valores complejos de \vec{k} .

Ahora bien, esta región de $\vec{k}^2 \leq 0$ tiene realidad física: corresponde a modos inestables excepto en el límite $\omega = 0$, $\vec{k}^2 = 0$. En este caso en un entorno de $\omega = 0$, $\vec{k}^2 = 0$ se tiene la expresión (73) en la que el primer término corresponde a la rama fotónica, y sugiere que el número de fotones transversos “suaves” o estáticos puede existir en el plasma y ser arbitrariamente grande, es decir, puede ocurrir un condensado de estos fotones magnéticos (la existencia de este condensado es compatible con la aparición de un campo magnético poco intenso). La analogía no es completa, porque no existe estrictamente una transición de fase de segundo orden. Sin embargo, el plasma electrón-positrón conjuntamente con el gas fotónico ($\omega \neq 0$, $\vec{k} \neq 0$) puede existir en equilibrio termodinámico en presencia de campos magnéticos intensos (*v. gr.*, en las estrellas, en particular en los pulsares) a temperaturas arbitrariamente altas. El tratamiento exacto de tal problema requeriría, sin embargo, introducir el campo magnético externo en $\Pi_{\mu\nu}$ y en las ecuaciones de dispersión.

3.6. Límite infrarrojo, restablecimiento de simetría y condensación de Bose-Einstein

Consideremos un campo vectorial masivo (con masa adquirida por el mecanismo de Higgs) a alta temperatura y densidad caracterizada por un potencial químico μ .

La función de Green inversa debe tener una expresión de la forma

$$D_{\mu\nu}^{-1} = (k^{*2} + M_\omega^2)\delta_{\mu\nu} - k_\mu^* k_\nu^* + \Pi_{\mu\nu}(k^*, M_\omega, T) + \alpha k_\mu^* k_\nu^*, \quad (92)$$

donde $k^* = (k_4 - i\mu, \vec{k})$ y $\Pi_{\mu\nu}(k^*, M_\omega, T)$ contiene las correcciones radiativas. En la norma de Feynman $\alpha = 1$ se tiene

$$D_{\mu\nu}^{-1} = (k^{*2} + M_\omega^2)\delta_{\mu\nu} + \Pi_{\mu\nu}(k^*, M_\omega, T). \quad (93)$$

En el límite infrarrojo, $k_4 = 0$, $\vec{k} \rightarrow 0$, los polos de la función de Green resultan de

$$D_{\mu\nu}^{-1} = (-\mu^2 + M_\omega^2)\delta_{\mu\nu} + \Pi_{\mu\nu}(0, M_\omega, T) = 0; \quad (94)$$

luego vemos que de aquí resulta la condición de condensación

$$\mu^2 = M_\omega^2 + f(\Pi_{\mu\nu}(0, M_\omega, T)) \quad (95)$$

(si no se toman en cuenta las correcciones radiativas la condición de condensación es $\mu = \pm M_\omega$ y resulta de tomar el límite $k_4 = 0$ y $\vec{k} \rightarrow 0$ en el propagador inverso $D_{0\mu\nu}^{-1} = [(k_4 - i\mu)^2 + \vec{k}^2 + M_\omega^2]\delta_{\mu\nu}$).

En este límite, la masa de los bosones resulta de diagonalizar el tensor

$$M_\omega^2 \delta_{\mu\nu} + \Pi_{\mu\nu}(0, M_\omega, T) \quad (96)$$

y excluir los modos superfluos (obsérvese que esto se hace en el límite infrarrojo). En este límite M_ω^2 debe decrecer con la temperatura [4]. Vemos así que la condición de condensación debe plantearse en el límite infrarrojo $k_4 = 0$, $\vec{k} \rightarrow 0$ (particularmente para los modos transversos) y no en el de masa plasmónica que correspondería a $\Pi_{\mu\nu}$ en el límite $k_4 \neq 0$, $\vec{k} \rightarrow 0$. Luego existe una correspondencia estrecha entre las transiciones de fase de restablecimiento de simetría y de condensación de Bose-Einstein.

4. CONCLUSIONES

Hemos obtenido soluciones aproximadas de las ecuaciones de dispersión en los límites $\omega = 0$, $\vec{k} \rightarrow 0$ y $\omega \neq 0$, $\vec{k} \rightarrow 0$ para los modos transversos, y $\omega = 0$, $\vec{k} \rightarrow -\lambda_D^{-1}$; $\omega \neq 0$, $\vec{k} \rightarrow 0$ para los modos longitudinales que concuerdan con los obtenidos por Weldon [10] en el límite asintótico de temperaturas muy altas y $m = 0$. Se concluye que los mecanismos causantes de la absorción de estos modos son procesos de dispersión para $\omega^2 < 4m^2$ y procesos de dispersión y creación de pares para $\omega^2 > 4m^2$. La región menos absorbente está limitada inferiormente por la curva umbral de creación de pares $\omega^2 - \vec{k}^2 = 4m^2$. Para temperaturas suficientemente altas $\omega_p^2 \geq 4m^2$, y las curvas de dispersión están situadas entonces en la zona "transparente".

La curva de dispersión para los modos transversos en la región inestable u “opaca”, muestra dos ramas: la rama plasmónica, correspondiente a partículas masivas, y la rama fotónica, correspondiente a partículas sin masa.

La función de distribución plasmónica difiere de la de Planck, es decir, corresponde al caso de cuasi-partículas masivas. Por otra parte en la fotónica se tiene un comportamiento divergente para $\vec{k} \rightarrow 0$ como ocurre en un gas de partículas sin masa; es decir, el límite infrarrojo es $\omega = 0$, $\vec{k} \rightarrow 0$ y en este, el número de cuasi-partículas transversas puede ser arbitrariamente grande.

Se observa una compatibilidad de este último límite con la aparición de un “condensado transverso” y, con este hecho, la posibilidad de existencia del plasma en equilibrio termodinámico en un campo magnético constante y uniforme.

En el límite infrarrojo (particularmente para la solución de masa nula), se establece una relación estrecha entre las transiciones de fase de restablecimiento de simetría y de condensación de Bose-Einstein para campos vectoriales masivos en teorías con ruptura espontánea de simetría.

REFERENCIAS

1. D.A. Kirzhnits and A.D. Linde, *Phys. Lett.* **42B** (1972) 471.
2. M.B. Kislinger and P.D. Morley, *Phys. Rev.* **D13** (1976) 2765, 2771.
3. D.A. Kirzhnits and A.D. Linde, *Ann. of Phys.* **101** (1976) 195.
4. A.D. Linde, *Rep. Prog. Phys.* **42** (1979) 389.
5. A.V. Smilga, *Phys. Lett.* **B222** (1989) 462.
6. H. Pérez Rojas, “Teoría de Campos a Temperatura Finita” (Curso impartido en el depto. de Física-CINVESTAV, México, D.F. en la primavera de 1992).
7. E.S. Fradkin, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **28** (1965); *Proc. Lebedev Phys. Inst.* **29** (Trad. ingl., 1967, por Consultants Bureau, New York).
8. V.N. Tsytovich, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **40** (1961).
9. V.B. Vologodskiy, *Proc. Lebedev Phys. Inst.* **29** (1967) (trad. ingl. por Consultants Bureau, New York).
10. H.A. Weldon, *Phys. Rev.* **D26** (1982) 1394, 2789.