

# Desarrollo armónico del potencial de Coulomb en coordenadas toroidales

E. LEY-KOO Y A. GÓNGORA T.

*Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México  
Apartado postal 20-364, 01000 México, D.F., México*

Recibido el 1° de marzo de 1994; aceptado el 13 de mayo de 1994

**RESUMEN.** Se construye el desarrollo del potencial de Coulomb en términos de armónicos toroidales. Se destaca la  $R$ -separabilidad de las soluciones de la ecuación de Laplace en contraste con la separabilidad total en otras coordenadas. Se discuten algunos problemas de electrostática y de magnetostática que ilustran la utilidad del desarrollo bajo consideración.

**ABSTRACT.** We construct the expansion of the Coulomb potential in terms of toroidal harmonics. We emphasize the  $R$ -separability of the Laplace equation in contrast with the total separability in other coordinates. We discuss some electrostatic and magnetostatic problems to illustrate the usefulness of such an expansion.

PACS: 41.10.Dq

## 1. INTRODUCCIÓN

En un artículo reciente [1] se construyeron los desarrollos armónicos del potencial de Coulomb en coordenadas cilíndricas, parabólicas y esferoidales, siendo la motivación el estudio de sistemas físicos con simetrías y condiciones de frontera asociadas a las geometrías de las coordenadas respectivas. El presente trabajo tiene la misma motivación y el mismo tema para la geometría toroidal, y resulta ser un complemento o un *addendum* de la Ref. [1]. La solución de la ecuación de Laplace en coordenadas toroidales difiere de la solución en las otras coordenadas en el hecho de que es solamente  $R$ -separable [2,3,4]. En todo caso, la construcción del desarrollo del potencial de Coulomb en términos de armónicos toroidales se puede llevar a cabo por los mismos métodos de las Refs. [1,4,5].

En la Sec. 2 se definen las coordenadas toroidales y se construye y resuelve la ecuación de Laplace correspondiente. A continuación se resuelve la ecuación de Poisson con una fuente puntual, construyendo el desarrollo del potencial de Coulomb en términos de las funciones armónicas toroidales. En la Sec. 3 se evalúan los desarrollos armónicos para la intensidad de campo eléctrico y la distribución de carga. En la Sec. 4 se discuten las aplicaciones de estos desarrollos en problemas ilustrativos de electrostática y magnetostática.

## 2. ECUACIONES DE LAPLACE Y POISSON EN COORDENADAS TOROIDALES

Las coordenadas toroidales  $(\xi, \chi, \varphi)$  están definidas por las ecuaciones de transformación

a coordenadas cartesianas [4]:

$$x = \frac{a \operatorname{senh} \xi \cos \varphi}{\cosh \xi - \cos \chi}, \quad y = \frac{a \operatorname{senh} \xi \operatorname{sen} \varphi}{\cosh \xi - \cos \chi}, \quad z = \frac{a \operatorname{sen} \chi}{\cosh \xi - \cos \chi}. \quad (1)$$

Las superficies  $(\xi = \xi_0, \chi, \varphi)$ ,  $(\xi, \chi = \chi_0, \varphi)$ ,  $(\xi, \chi, \varphi = \varphi_0)$  corresponden a toros con su corazón circular de radio  $a$  en el plano ecuatorial, a esferas ortogonales a los toros con sus centros sobre el eje polar, y a semiplanos meridianos, respectivamente. Las secciones transversales de cada toro en los planos meridianos son círculos de radio  $a \operatorname{csch} \xi$  y centro en el plano ecuatorial a una distancia  $a \operatorname{coth} \xi$  del eje polar;  $0 < \xi < \xi_0$  y  $\xi_0 < \xi < \infty$  describen, respectivamente, el exterior y el interior del toro, siendo  $\xi_0 = 0$  el eje polar y  $\xi_0 = \infty$  el corazón. Las secciones transversales de las esferas definidas por valores fijos de la coordenada  $\chi$  en los planos meridianos son círculos de radio  $a|\operatorname{csc} \chi|$ , centros sobre el eje polar a una distancia  $a \cot \chi$  del origen de coordenadas y con una intersección común en el corazón; los valores  $\chi = 0$  y  $\pi$  describen a puntos del plano ecuatorial externos e internos con relación al corazón, mientras que  $0 < \chi < \pi$  y  $\pi < \chi < 2\pi$  describen a puntos por encima y por abajo del plano ecuatorial, respectivamente. La Fig. 1 ilustra las propiedades mencionadas de las coordenadas toroidales.

Los factores de escala y los vectores unitarios asociados a las coordenadas toroidales se obtienen al evaluar el elemento de línea

$$d\vec{l} = \hat{i} dx + \hat{j} dy + \hat{k} dz = \hat{\xi} h_\xi d\xi + \hat{\chi} h_\chi d\chi + \hat{\varphi} h_\varphi d\varphi \quad (2)$$

a partir de las Ecs. (1), y resultan ser, respectivamente,

$$h_\xi = h_\chi = \frac{a}{\cosh \xi - \cos \chi}, \quad h_\varphi = \frac{a \operatorname{senh} \xi}{\cosh \xi - \cos \chi}, \quad (3)$$

$$\hat{\xi} = \frac{(\hat{i} \cos \varphi + \hat{j} \operatorname{sen} \varphi)(1 - \cosh \xi \cos \chi) - \hat{k} \operatorname{senh} \xi \operatorname{sen} \chi}{\cosh \xi - \cos \chi},$$

$$\hat{\chi} = \frac{-(\hat{i} \cos \varphi + \hat{j} \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{senh} \xi \operatorname{sen} \chi - \hat{k}(1 - \cosh \xi \cos \chi)}{\cosh \xi - \cos \chi}, \quad (4)$$

$$\hat{\varphi} = -\hat{i} \operatorname{sen} \varphi + \hat{j} \cos \varphi.$$

Aquí cabe señalar la igualdad de los factores de escala  $h_\xi$  y  $h_\chi$ , y la ortonormalidad de los vectores.

Conocidos los factores de escala [Ecs. (3)] es inmediato construir el operador laplaciano y escribir la ecuación de Laplace:

$$\frac{(\cosh \xi - \cos \chi)^3}{a^2 \operatorname{senh} \xi} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\operatorname{senh} \xi}{\cosh \xi - \cos \chi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \chi} \frac{\operatorname{senh} \xi}{\cosh \xi - \cos \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{1}{(\cosh \xi - \cos \chi) \operatorname{senh} \xi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \phi = 0. \quad (5)$$

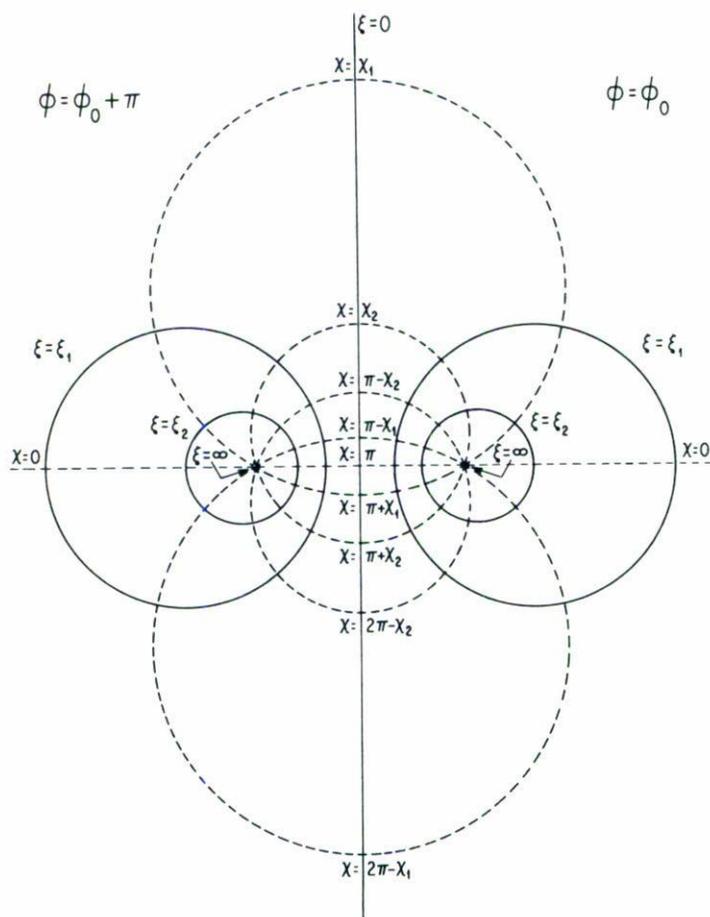


FIGURA 1. Sección transversal en plano meridiano de coordenadas toroidales: —: toros  $\xi =$  constante, incluyendo eje polar  $\xi = 0$  y corazón anular  $\xi = \infty$ . - - -: esferas  $\chi =$  constante, incluyendo puntos del plano ecuatorial externos  $\chi = 0$ , e internos  $\chi = \pi$ , con relación al corazón.

Esta ecuación admite soluciones  $R$ -separables de la forma [2,3,4]

$$\phi(\xi, \chi, \varphi) = (\cosh \xi - \cos \chi)^{\frac{1}{2}} \Xi(\xi) X(\chi) \Phi(\varphi), \quad (6)$$

que transforman la Ec. (5) en el conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \Phi, \quad (7a)$$

$$\frac{d^2 X}{d\chi^2} = -n^2 X, \quad (7b)$$

$$\left[ \frac{1}{\sinh \xi} \frac{d}{d\xi} \sinh \xi \frac{d}{d\xi} - \frac{m^2}{\sinh^2 \xi} \right] \Xi = \left( n - \frac{1}{2} \right) \left( n + \frac{1}{2} \right) \Xi, \quad (7c)$$

Las soluciones de las Ecs. (7a) y (7b) son bien conocidas,

$$\Phi_m(\varphi) = A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi, \quad (8a)$$

$$X_n(\chi) = C_n \cos n\chi + D_n \sin n\chi, \quad (8b)$$

e involucran valores enteros  $m, n = 0, 1, 2, 3, \dots$  de las constantes de separación para asegurar que la función de cada variable angular es univaluada. La Ec. (7c) se reconoce como la ecuación de Legendre asociada y sus soluciones son las funciones de Legendre asociadas de primera y segunda clase,

$$\Xi_{nm}(\xi) = E_{nm} P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi) + F_{nm} Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi), \quad (8c)$$

siendo las primeras regulares en el eje polar y singulares en el corazón, mientras las segundas son singulares en el eje polar y regulares en el corazón.

La ecuación de Poisson con una fuente puntual unitaria en  $\vec{r}'$ ,

$$\nabla^2 \mathcal{G}(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (9)$$

tiene como solución el potencial de Coulomb. A continuación se construye el desarrollo de este potencial en términos de las funciones armónicas toroidales de las Ecs. (6) y (8). El punto de partida es utilizar la representación de la densidad de carga para la fuente puntual en la Ec. (9), como una doble serie de Fourier en las coordenadas angulares:

$$\begin{aligned} \delta(\vec{r} - \vec{r}') &= \frac{\delta(\xi - \xi')}{h_\xi} \frac{\delta(\chi - \chi')}{h_\chi} \frac{\delta(\varphi - \varphi')}{h_\varphi} \\ &= \frac{\delta(\xi - \xi')}{h_\xi h_\chi h_\varphi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n \cos n(\chi - \chi')}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi')}{2\pi} \end{aligned} \quad (10)$$

donde  $\varepsilon_0 = 1$  y  $\varepsilon_i = 2$ , para  $i = 1, 2, 3, \dots$ . En forma paralela, se escribe la doble serie de Fourier correspondiente para la función de Green:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\vec{r} - \vec{r}') &= (\cosh \xi - \cos \chi)^{1/2} (\cosh \xi' - \cos \chi')^{1/2} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} g_{nm}(\xi, \xi') \cos n(\chi - \chi') \cos m(\varphi - \varphi'), \end{aligned} \quad (11)$$

en la que quedan por determinar los "coeficientes" de Fourier  $g_{nm}(\xi, \xi')$  que contienen la dependencia con respecto a las coordenadas toroidales de los puntos campo y fuente. Es claro que para puntos campo diferentes del punto fuente, la ecuación de Poisson (9) se

reduce a la ecuación de Laplace (5), y en consecuencia las funciones  $g_{nm}(\xi, \xi')$  deben ser combinaciones lineales de funciones de Legendre asociadas [Ec. (8c)]. Al tomar en cuenta la simetría de la función de Green bajo el intercambio de los puntos campo y fuente, así como las propiedades de regularidad y singularidad de las funciones de Legendre descritas después de la Ec. (8c), los "coeficientes" de Fourier se restringen a la forma

$$g_{nm}(\xi, \xi') = A_{nm} P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_{<}) Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_{>}), \quad (12)$$

en la que hay que distinguir las situaciones  $\xi < \xi'$  y  $\xi > \xi'$ . La tarea que queda por realizar es la determinación de los coeficientes  $A_{nm}$ , la cual se puede lograr sustituyendo las Ecs. (10), (11) y (12) en la Ec. (9), invocando la independencia lineal de las bases de Fourier, e integrando la ecuación diferencial ordinaria en la coordenada toroidal alrededor de la fuente,  $\xi = \xi'$ . Aquí se exhiben solamente los pasos finales. La Ec. (9) toma la forma

$$\begin{aligned} & \frac{a}{h_\xi h_\chi h_\varphi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (\cosh \xi' - \cos \chi')^{1/2} \cos n(\chi - \chi') \cos m(\varphi - \varphi') \\ & \times \frac{\sinh \xi}{(\cosh \xi - \cos \chi)^{1/2}} \left\{ \frac{1}{\sinh \xi} \frac{d}{d\xi} \sinh \xi \frac{d}{d\xi} - \frac{m^2}{\sinh^2 \xi} - \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) \right\} g_{nm}(\xi, \xi') \\ & = -\frac{4\pi}{(2\pi)^2} \frac{\delta(\xi - \xi')}{h_\xi h_\chi h_\varphi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\chi - \chi') \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi'). \quad (13) \end{aligned}$$

La integración alrededor del punto fuente da

$$a \left[ \sinh \xi \frac{d}{d\xi} g_{nm}(\xi, \xi') \Big|_{\xi=\xi'_+} - \sinh \xi \frac{d}{d\xi} g_{nm}(\xi, \xi') \Big|_{\xi=\xi'_-} \right] = -\frac{\varepsilon_n \varepsilon_m}{\pi}. \quad (14)$$

Al usar la forma de la Ec. (12) para la función en la coordenada toroidal, los coeficientes  $A_{nm}$  quedan determinados por el wronskiano de las funciones asociadas de Legendre:

$$\begin{aligned} & a A_{nm} \sinh \xi' \left[ P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi') \left( \frac{d}{d\xi'} Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi') \right) - \right. \\ & \left. \left( \frac{d}{d\xi'} P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi') \right) Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi') \right] = -\frac{\varepsilon_n \varepsilon_m}{\pi}. \quad (15) \end{aligned}$$

La fórmula para el wronskiano [6],

$$W \{ P_\nu^\mu(z), Q_\nu^\mu(z) \} = \frac{e^{i\mu\pi} 2^{2\mu} \Gamma\left(\frac{\nu+\mu+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{(1-z^2) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)}, \quad (16)$$

aplicada a la Ec. (15) conduce a los coeficientes

$$A_{nm} = \frac{\varepsilon_n \varepsilon_m}{\pi a} \frac{(-)^m \Gamma\left(\frac{n-m+\frac{3}{2}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-m+\frac{1}{2}}{2}\right)}{2^{2m} \Gamma\left(\frac{n+m+\frac{3}{2}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+m+\frac{1}{2}}{2}\right)}. \quad (17)$$

Si además se hace uso de la fórmula de duplicación para las funciones gama [6],

$$\Gamma(2z) = (2\pi)^{-1/2} 2^{2z-\frac{1}{2}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right), \quad (18)$$

los coeficientes toman la forma

$$A_{nm} = \frac{\varepsilon_n \varepsilon_m}{\pi a} \frac{(-)^m \Gamma\left(n - m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + m + \frac{1}{2}\right)}. \quad (19)$$

En conclusión, el desarrollo en armónicos toroidales del potencial de Coulomb [Ec. (11)] toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-)^m \Gamma\left(n - m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + m + \frac{1}{2}\right)} P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_{<}) Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_{>}) \\ &\times (\cosh \xi - \cos \chi)^{1/2} (\cosh \xi' - \cos \chi')^{1/2} \varepsilon_n \cos n(\chi - \chi') \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi'). \quad (20) \end{aligned}$$

Una forma aún más compacta usa la relación entre las funciones asociadas de Legendre de órdenes de diferente signo [6]:

$$P_{\nu}^{-\mu}(z) = \frac{\Gamma(\nu - \mu + 1)}{\Gamma(\nu + \mu + 1)} P_{\nu}^{\mu}(z), \quad (21)$$

quedando

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-)^m P_{n-\frac{1}{2}}^{-m}(\cosh \xi_{<}) Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_{>}) \\ &\times (\cosh \xi - \cos \chi)^{1/2} (\cosh \xi' - \cos \chi')^{1/2} \varepsilon_n \cos n(\chi - \chi') \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi'). \quad (22) \end{aligned}$$

### 3. DESARROLLOS ARMÓNICOS TOROIDALES DEL CAMPO DE INTENSIDAD ELÉCTRICA Y DE LA DISTRIBUCIÓN DE CARGA

Una vez conocido el desarrollo armónico toroidal del potencial de Coulomb, el desarrollo armónico correspondiente para el campo de fuerza se obtiene a través de la aplicación del operador de gradiente. A su vez la aplicación de la ley de Gauss para la superficie del toro

donde se encuentra la fuente permite obtener el desarrollo armónico para la distribución de carga. En esta sección se obtienen ambos desarrollos. Por conveniencia se hace uso de las Ecs. (11) y (12) como punto de partida,

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(\xi > \xi', \chi, \varphi) &= - \left[ \hat{\xi} \frac{\partial}{h_{\xi} \partial \xi} + \hat{\chi} \frac{\partial}{h_{\chi} \partial \chi} + \hat{\varphi} \frac{\partial}{h_{\varphi} \partial \varphi} \right] \left\{ (\cosh \xi' - \cos \chi')^{1/2} (\cosh \xi - \cos \chi)^{1/2} \right. \\
 &\quad \times \left. \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi') Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi) \cos n(\chi - \chi') \cos m(\varphi - \varphi') \right\} \\
 &= (\cosh \xi' - \cos \chi')^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi') \\
 &\quad \times \left\{ - \frac{\hat{\xi}}{h_{\xi}} \left[ \frac{\sinh \xi}{2(\cosh \xi - \cos \chi)^{1/2}} Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\cosh \xi - \cos \chi)^{1/2} \frac{d}{d\xi} Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi) \right] \cos n(\chi - \chi') \cos m(\varphi - \varphi') \right. \\
 &\quad \left. + Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi) \left[ - \frac{\hat{\chi}}{h_{\chi}} \left( \frac{\sin \chi}{2(\cosh \xi - \cos \chi)^{1/2}} \cos n(\chi - \chi') \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (\cosh \xi - \cos \chi)^{1/2} n \sin n(\chi - \chi') \right) \cos m(\varphi - \varphi') \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\hat{\varphi}}{h_{\varphi}} (\cosh \xi - \cos \chi)^{1/2} \cos n(\chi - \chi') m \sin m(\varphi - \varphi') \right] \right\}, \quad (23a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(\xi < \xi', \varphi) &= - \left[ \hat{\xi} \frac{\partial}{h_{\xi} \partial \xi} + \hat{\chi} \frac{\partial}{h_{\chi} \partial \chi} + \hat{\varphi} \frac{\partial}{h_{\varphi} \partial \varphi} \right] \left\{ (\cosh \xi' - \cos \chi')^{1/2} (\cosh \xi - \cos \chi)^{1/2} \right. \\
 &\quad \times \left. \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi') P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi) \cos n(\chi - \chi') \cos m(\varphi - \varphi') \right\} \\
 &= (\cosh \xi' - \cos \chi')^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi') \\
 &\quad \times \left\{ - \frac{\hat{\xi}}{h_{\xi}} \left[ \frac{\sinh \xi}{2(\cosh \xi - \cos \chi)^{1/2}} P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\cosh \xi - \cos \chi)^{1/2} \frac{d}{d\xi} P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi) \right] \cos n(\chi - \chi') \cos m(\varphi - \varphi') \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi) \left[ -\frac{\hat{\chi}}{h_\chi} \left( \frac{\text{sen } \chi}{2(\cosh \xi - \cos \chi)^{1/2}} \cos n(\chi - \chi') \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (\cosh \xi - \cos \chi)^{1/2} n \text{sen } n(\chi - \chi') \right) \cos m(\varphi - \varphi') \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\hat{\varphi}}{h_\varphi} (\cosh \xi - \cos \chi)^{1/2} \cos n(\chi - \chi') m \text{sen } m(\varphi - \varphi') \right] \Bigg\}. \tag{23b}
 \end{aligned}$$

La comparación de las Ecs. (23a) y (23b) muestra que el campo de intensidad eléctrica tienen componentes tangenciales continuas en la superficie del toro  $\xi = \xi'$  donde se localiza la fuente, mientras que las componentes normales tienen una discontinuidad. De acuerdo con la ley de Gauss esta discontinuidad se debe a la carga fuente con una densidad superficial:

$$\begin{aligned}
 \sigma(\xi', \chi, \varphi) &= \frac{1}{4\pi} \hat{\xi} \cdot [\vec{E}(\xi = \xi'_+, \chi, \varphi) - \vec{E}(\xi = \xi'_-, \chi, \varphi)] \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{h_{\xi'}} (\cosh \xi' - \cos \chi')^{1/2} (\cosh \xi' - \cos \chi)^{1/2} A_{nm} \cos n(\chi - \chi') \\
 &\quad \times \cos m(\varphi - \varphi') \left[ P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi') \frac{d}{d\xi'} Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi') - Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi') \frac{d}{d\xi'} P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi') \right] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n \cos n(\chi - \chi')}{2\pi} \frac{\varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi')}{2\pi} \frac{(\cosh \xi' - \cos \chi')^{1/2}}{a} \frac{(\cosh \xi' - \cos \chi)^{3/2}}{a \text{senh } \xi'} \\
 &= \frac{\delta(\chi - \chi')}{h_\chi} \frac{\delta(\varphi - \varphi')}{h_\varphi}. \tag{24}
 \end{aligned}$$

Al pasar de la segunda a la tercera forma en la Ec. (24) se hace uso de la Ec. (15) para los coeficientes  $A_{nm}$  y de la Ec. (3) para el factor de escala  $h_\xi$ . En la forma final se identifican las representaciones de Fourier de las funciones delta de Dirac y los factores de escala  $h_\chi$  y  $h_\varphi$  que intervienen en los elementos de área del toro  $da_\xi = h_\chi d\chi h_\varphi d\varphi$ .

La comparación entre las Ecs. (24) y (11) muestra la correspondencia unívoca entre las componentes toroidales de la fuente y del potencial, cada una con sus factores de escala apropiados.

#### 4. DISCUSIÓN

En la Sec. 2 se construyeron las funciones armónicas toroidales, Ecs. (6) y (8), como soluciones  $R$ -separables de la ecuación de Laplace (5). También se construyó la función de

Green de la ecuación de Poisson (9) a través de su desarrollo armónico toroidal [Ecs. (11), (12), (20) y (22)]. En la Sec. 3 se obtuvieron los desarrollos correspondientes para el campo de intensidad eléctrica y la distribución de carga destacando la correspondencia unívoca entre las componentes armónicas toroidales de la fuente, el potencial y el campo de fuerza, a pesar de que las soluciones de la ecuación de Laplace son solamente  $R$ -separables.

La utilidad de las funciones armónicas toroidales y del desarrollo armónico toroidal del potencial de Coulomb obtenidos en este trabajo se puede apreciar en el estudio de sistemas electrostáticos o magnetostáticos que poseen la geometría toroidal. A continuación se mencionan algunos de esos sistemas a manera de ilustración.

En electrostática se pueden considerar dos conductores en forma de toros con corazón anular común. Las superficies equipotenciales son entonces toros de la misma familia y las líneas de fuerza coinciden con meridianos de las esferas ortogonales. El caso límite de estos toros corresponde a un conductor lineal que coincide con el eje polar y a un anillo conductor que corresponde al corazón. Alternativamente se pueden considerar dos conductores en forma de sectores esféricos con radios y posiciones correspondientes a los valores  $\chi_1$  y  $\chi_2$  de la coordenada esférica. En tal caso las superficies equipotenciales corresponden a los sectores esféricos de la misma familia con valores intermedios de la coordenada  $\chi$ , y las líneas de fuerza coinciden con meridianos de los toros ortogonales, siempre que los efectos de orilla sean despreciables. La Fig. 1 es útil para ilustrar tales sistemas.

En magnetostática el estudio del campo magnético asociado a una corriente en una espira circular se simplifica si se hace usando las coordenadas toroidales que incorporan de manera natural la topología del sistema [7]. Las extensiones naturales corresponden a solenoides toroidales con espiras en círculos paralelos o en círculos meridianos, respectivamente. El estudio de estos últimos [8] fue la motivación para estudiar con detalle el desarrollo armónico toroidal construido en el presente trabajo.

#### REFERENCIAS

1. E. Ley-Koo y A. Góngora T., *Rev. Mex. Fís.* **39** (1993) 785.
2. W. Miller Jr., *Symmetry and Separation of Variables*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1977) Cap. 3.
3. N.N. Lebedev, *Special Functions and their Applications*, Dover, New York (1972) Cap. 8.
4. G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, 2nd edition, Academic Press, New York (1970) Cap. 2.
5. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd edition, Wiley, N.Y. (1975) Cap. 3.
6. M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York (1965) Caps. 8 y 6.
7. S. Fenster, *Am. J. Phys.* **43** (1975) 683.
8. A. Góngora T. and E. Ley-Koo (por publicarse).