

## Sobre la evaluación de la capacitancia de un condensador toroidal

E. LEY-KOO AND A. GÓNGORA T.

*Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México  
Apartado postal 20-364, 01000 México, D.F., México*

Recibido el 15 de abril de 1994; aceptado el 12 de mayo de 1994

**RESUMEN.** La evaluación de la capacitancia de un condensador toroidal se lleva a cabo construyendo los campos de potencial y de fuerza asociados, y determinando a partir del último las distribuciones de carga y las cargas totales de los electrodos. El problema y su solución son especialmente interesantes debido a la  $R$ -separabilidad de la ecuación de Laplace en coordenadas toroidales.

**ABSTRACT.** The evaluation of the capacitance of a toroidal condenser is carried out by constructing the associated potential and force fields, and determining from the latter the charge distributions and total charges on the electrodes. The problem and its solution are specially interesting due to the  $R$ -separability of the Laplace equation in toroidal coordinates.

PACS: 41.10.Dq

### 1. INTRODUCCIÓN

La evaluación de la capacitancia de condensadores con electrodos paralelos, cilíndricos circulares y esféricos aparece desde los textos introductorios de electricidad [1,2]. La simplicidad de tal evaluación se extiende a condensadores cilíndricos con otras secciones cónicas y también a condensadores cuyos electrodos son conoides de revolución alrededor de un eje de simetría, debido a la separabilidad de la ecuación de Laplace en las coordenadas curvilíneas ortogonales asociadas a cada geometría. Efectivamente, en todos estos casos el potencial electrostático entre los electrodos se puede escribir como una función armónica de una sola variable, que es la coordenada que define las posiciones de los electrodos y de las superficies equipotenciales entre los mismos; además la función armónica corresponde a la armonicidad más baja [3,4]. Conocido el potencial electrostático es inmediata la determinación del campo de intensidad eléctrica, y de los valores de ésta en los electrodos se determina a su vez la distribución de carga y la carga total sobre los últimos; entonces la capacitancia del condensador, definida como la razón de la carga de un electrodo a la diferencia de potencial entre los electrodos, queda también determinada.

La situación física y geométrica del párrafo anterior se presenta también en el caso de condensadores cuyos electrodos son toroides con un corazón anular común. Sin embargo la evaluación del potencial electrostático y por ende de la capacitancia, difiere cualitativa y cuantitativamente de los casos mencionados debido a que la ecuación de Laplace es solamente  $R$ -separable en coordenadas toroidales [4,5]. Este artículo está orientado al cálculo de la capacitancia del condensador toroidal construyendo en la Sec. 2 el potencial

electrostático entre los electrodos usando la técnica de la función de Green, y determinando en la Sec. 3 el campo de intensidad eléctrica entre y sobre los electrodos. La Sec. 4 está dedicada a discutir las analogías y las diferencias de las expresiones para los campos de potencial y de fuerza y para la capacidad en el caso toroidal con respecto a las otras geometrías. En el Apéndice se bosqueja la construcción de la función de Green de Dirichlet para fronteras toroidales.

## 2. POTENCIAL ELECTROSTÁTICO DE UN CONDENSADOR TOROIDAL

La función de potencial electrostático de un condensador queda determinada por las condiciones de que satisfaga la ecuación de Laplace y tome valores constantes sobre las posiciones de los electrodos [3]. En el caso de un condensador toroidal es conveniente usar coordenadas toroidales [4,5], para las cuales y en la notación de la Ref. [5] la ecuación de Laplace tiene la forma

$$\left\{ \frac{(\cosh \xi - \cos \chi)^3}{a^2 \sinh \xi} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \chi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \chi} \frac{\sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \right] + \frac{(\cosh \xi - \cos \chi)^2}{a^2 \sinh^2 \xi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} \phi(\xi, \chi, \varphi) = 0, \quad (1)$$

siendo  $a$  el radio del corazón, y  $(0 \leq \xi < \infty, 0 \leq \chi \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$  las coordenadas toroidales, esféricas y azimutal, respectivamente. Las condiciones de frontera se toman como

$$\phi(\xi = \xi_0, \chi, \varphi) = V_0, \quad (2a)$$

$$\phi(\xi = \xi_T, \chi, \varphi) = 0, \quad (2b)$$

correspondientes al electrodo toroidal  $\xi = \xi_0$  al potencial  $V_0$  y al electrodo toroidal  $\xi = \xi_T > \xi_0$  a tierra.

Las funciones armónicas, soluciones de la Ec. (1), son solamente  $R$ -separables y tienen la forma general [4,5]

$$\phi(\xi, \chi, \varphi) = (\cosh \xi - \cos \chi)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [A_{nm} P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi) + B_{nm} Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi)] \times [C_n \cos n\chi + D_n \sin n\chi][E_m \cos m\varphi + F_m \sin m\varphi], \quad (3)$$

que involucra funciones asociadas de Legendre en la coordenada toroidal y funciones trigonométricas en las otras coordenadas. La presencia del factor binomial dependiente de ambas coordenadas toroidal y esférica en la Ec. (3), no permite que se satisfagan de manera simple y directa las condiciones de frontera de las Ecs. (2a,b), en contraste con

la situación ya descrita para otras geometrías en la Sec. 1, para las cuales la ecuación de Laplace es completamente separable.

Es claro que el problema definido por las Ecs. (1) y (2a,b) corresponde a un problema de condiciones a la frontera de Dirichlet, cuya solución se puede construir de manera sistemática [6]. En efecto, la ecuación de Poisson para un fuente puntual,

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \tag{4}$$

con la condición de frontera de Dirichlet para la función de Green

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}')|_S = 0, \tag{5}$$

utilizadas como ecuaciones auxiliares, permiten construir la solución de la Ec. (1) sujeta a las condiciones de las Ecs. (2a,b) en la forma

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \phi(\vec{r}') da', \tag{6}$$

siendo  $n'$  el desplazamiento normal a la superficie de frontera  $S$ . En la presente situación de electrodos toroidales ese desplazamiento normal es el asociado a la coordenada toroidal  $\xi'$ .

La función de Green de Dirichlet para la geometría del condensador toroidal y sus derivadas normales se construyen en el Apéndice, Ecs. (A3-5). La aplicación de la Ec. (6) para las condiciones de frontera de las Ecs. (2a,b) involucra la integración sobre el electrodo  $\xi_0$  solamente, ya que la integral sobre el electrodo a tierra es nula:

$$\phi(\xi, \chi, \varphi) = \frac{V_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} h_{\chi'} d\chi' \int_0^{2\pi} h_{\varphi'} d\varphi' \left. \frac{\partial G_D(\xi, \chi, \varphi; \xi', \chi', \varphi')}{h_{\xi'} \partial \xi'} \right|_{\xi'=\xi_0} \tag{7a}$$

Nótese la presencia de los factores de escala asociados al elemento de área y a la operación de derivada normal, así como la cancelación del factor común  $h_{\chi'} = h_{\xi'}$ . El uso de la forma explícita de  $h_{\varphi'}$  y de la Ec. (A5) en la Ec. (7a) lleva a

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \chi, \varphi) &= \frac{V_0}{4\pi} \frac{1}{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\cosh \xi - \cos \chi)^{1/2}}{\sinh \xi_0} \\ &\times \frac{P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_T) Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi) - Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_T) P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi)}{Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_0) P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_T) - P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_0) Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_T)} \\ &\times \int_0^{2\pi} d\chi' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{a \sinh \xi_0}{\cosh \xi_0 - \cos \chi'} \varepsilon_n \varepsilon_m (\cosh \xi_0 - \cos \chi')^{1/2} \\ &\times \cos n(\chi - \chi') \cos m(\varphi - \varphi'). \end{aligned} \tag{7b}$$

La integración sobre el ángulo azimutal es inmediata,

$$\epsilon_m \int_0^{2\pi} d\varphi' \cos m(\varphi - \varphi') = 2\pi\delta_{m0}, \tag{7c}$$

y muestra que debido a la simetría axial sólo contribuyen los términos con  $m = 0$ . La integración sobre la coordenada esférica es también conocida [7]:

$$\int_0^{2\pi} d\chi' \frac{\cos n(\chi - \chi')}{(\cosh \xi_0 - \cos \chi')^{1/2}} = 2\sqrt{2} Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) \cos n\chi. \tag{7d}$$

La sustitución de los valores de las integrales de la Ecs. (7c,d) en la Ec. (7b) conduce a la forma final para el potencial electrostático

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \chi, \varphi) = & \frac{\sqrt{2} V_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) (\cosh \xi - \cos \chi)^{1/2} \cos n\chi \\ & \times \frac{P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T) Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi) - Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T) P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi)}{Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T) - P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T)}. \end{aligned} \tag{7e}$$

Aquí cabe hacer notar que la Ec. (7e) es un desarrollo armónico del potencial del tipo de la Ec. (3) con coeficientes que garantizan que se satisfacen las condiciones de frontera de las Ecs. (2a,b). Efectivamente, la combinación de las funciones de Legendre en la Ec. (7e) asegura que el potencial del electrodo  $\xi_T$  se anula, y que el otro electrodo está al potencial  $V_0$ , al tomar en cuenta el valor de la suma [7]

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) \cos n\chi = (\cosh \xi_0 - \cos \chi)^{-1/2}. \tag{7f}$$

La integral de la Ec. (7d) está directamente conectada con los coeficientes de esta serie de Fourier.

### 3. INTENSIDAD ELÉCTRICA, CARGAS DE LOS ELECTRODOS Y CAPACITANCIA

El campo de intensidad eléctrica se obtiene como el negativo del gradiente del potencial electrostático descrito por la Ec. (7e),

$$\vec{E}(\xi, \chi, \varphi) = - \left[ \frac{\hat{\xi}}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\hat{\chi}}{h_\chi} \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{\hat{\varphi}}{h_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \phi(\xi, \chi, \varphi)$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\sqrt{2} V_0}{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0)}{Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T) - P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T)} \\
 &\times \left\{ \hat{\xi} \cos n\chi \left( (\cosh \xi - \cos \chi)^{3/2} \left[ P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T) \frac{dQ_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi)}{d\xi} \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. - Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T) \frac{dP_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi)}{d\xi} \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \sinh \xi (\cosh \xi - \cos \chi)^{1/2} \left[ P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T) Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi) \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. - Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T) P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi) \right] \right) \right\} \\
 &+ \hat{\chi} \left[ P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T) Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi) - Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T) P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi) \right] \\
 &\times \left[ -(\cosh \xi - \cos \chi)^{3/2} n \sin n\chi + \frac{1}{2} (\cosh \xi - \cos \chi)^{1/2} \sin \chi \cos n\chi \right] \Big\}. \quad (8a)
 \end{aligned}$$

Es claro que la intensidad eléctrica en el electrodo a tierra está en la dirección  $\hat{\xi}$  perpendicular al toroide  $\xi = \xi_T$  puesto que sobre el mismo los últimos renglones de la Ec. (8a) se anulan obviamente. Usando además la forma explícita del Wronskiano de las funciones de Legendre del renglón precedente se obtiene la expresión

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(\xi = \xi_T, \chi, \varphi) &= \frac{\sqrt{2} V_0 \hat{\xi} (\cosh \xi_T - \cos \chi)^{3/2}}{\pi a \sinh \xi_T} \\
 &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T) \cos n\chi}{Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T) - P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T)}. \quad (8b)
 \end{aligned}$$

Por otra parte, no es tan trivialmente claro que la intensidad eléctrica en el otro electrodo está en la dirección  $\hat{\xi}$  perpendicular al toroide  $\xi = \xi_0$ . Sin embargo, tal es el caso como se muestra a continuación al reconocer que las componentes en la dirección  $\hat{\chi}$  de la Ec. (8a) para  $\xi = \xi_0$  se anulan en virtud de la Ec. (7f) y de su derivada con respecto a la coordenada esférica,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\chi} (\cosh \xi_0 - \cos \chi)^{-1/2} &= -\frac{\sin \chi}{2(\cosh \xi_0 - \cos \chi)^{3/2}} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) (-n \sin n\chi). \quad (8c)
 \end{aligned}$$

Entonces la forma resultante es

$$\begin{aligned} \vec{E}(\xi = \xi_0, \chi, \varphi) = & -\frac{\sqrt{2} V_0}{\pi a} \hat{\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) \cos n\chi \\ & \times \left\{ (\cosh \xi_0 - \cos \chi)^{3/2} \right. \\ & \times \frac{P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T) \frac{dQ_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0)}{d\xi_0} - Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T) \frac{dP_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0)}{d\xi_0}}{Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T) - P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T)} \\ & \left. + \frac{1}{2} \sinh \xi_0 (\cosh \xi_0 - \cos \chi)^{1/2} \right\}. \end{aligned} \tag{8d}$$

Las densidades superficiales de carga sobre cada uno de los electrodos siguen de la aplicación de la Ley de Gauss y quedan expresadas, respectivamente, como

$$\sigma(\xi = \xi_T, \chi, \varphi) = -\frac{\hat{\xi} \cdot \vec{E}(\xi = \xi_T, \chi, \varphi)}{4\pi}, \tag{9a}$$

$$\sigma(\xi = \xi_0, \chi, \varphi) = \frac{\hat{\xi} \cdot \vec{E}(\xi = \xi_0, \chi, \varphi)}{4\pi}. \tag{9b}$$

La integración de estas densidades de carga sobre la superficie de cada electrodo conduce a las cargas totales respectivas. Para el electrodo a tierra,

$$\begin{aligned} Q(\xi = \xi_T) &= \iint \sigma(\xi = \xi_T, \chi, \varphi) h_\chi d\xi h_\varphi d\varphi \\ &= -\frac{\sqrt{2} V_0 a}{4\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0)}{Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T) - P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T)} \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \frac{d\chi \cos n\chi}{(\cosh \xi_T - \cos \chi)^{1/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= -\frac{2V_0 a}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T)}{Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T) - P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T)}, \end{aligned} \tag{10a}$$

donde la integración sobre la coordenada esférica se basa en la Ec. (7d). Para el otro electrodo,

$$\begin{aligned}
 Q(\xi = \xi_0) &= \iint \sigma(\xi = \xi_0, \chi, \varphi) h_\chi d\xi h_\varphi d\varphi \\
 &= -\frac{\sqrt{2} V_0 a}{4\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) \int_0^{2\pi} d\varphi \\
 &\quad \times \left\{ \operatorname{senh} \xi_0 \frac{P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T) \frac{dQ_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0)}{d\xi_0} - Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T) \frac{dP_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0)}{d\xi_0}}{Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T) - P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T)} \right. \\
 &\quad \times \int_0^{2\pi} \frac{d\chi \cos n\chi}{(\cosh \xi_0 - \cos \chi)^{1/2}} \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \operatorname{senh}^2 \xi_0 \int_0^{2\pi} \frac{d\chi \cosh \chi}{(\cosh \chi_0 - \cos \chi)^{3/2}} \right\}. \tag{10b}
 \end{aligned}$$

Aquí se repite el uso de la Ec. (7d) para la primera integral sobre la coordenada esférica y también para la segunda derivando la Ec. (7d) con respecto a la variable toroidal, obteniéndose

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\chi' \cos n(\chi - \chi')}{(\cosh \xi_0 - \cos \chi')^{3/2}} = -\frac{4\sqrt{2}}{\operatorname{senh} \xi_0} \frac{dQ_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0)}{d\xi_0} \cos n\chi. \tag{10c}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 Q(\xi = \xi_0) &= -\frac{V_0 a}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \operatorname{senh} \xi_0 Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) \\
 &\quad \times \left\{ \frac{P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T) \frac{dQ_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0)}{d\xi_0} - Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T) \frac{dP_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0)}{d\xi_0}}{Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T) - P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T)} \right. \\
 &\quad \left. \times Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) - \frac{dQ_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0)}{d\xi_0} \right\}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2V_0 a}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_n Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T)}{Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T) - P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T)}, \quad (10d)$$

Al pasar de la penúltima forma a la última en la Ec. (10d) se reducen los términos dentro de los corchetes y se usa la expresión para el Wronskiano de las funciones de Legendre.

La comparación de las Ecs. (10a) y (10d) muestra la igualdad en la magnitud y los signos opuestos de las cargas en los electrodos del condensador toroidal. De cualquiera de esas ecuaciones se obtiene la expresión para la capacitancia del condensador:

$$C = \frac{Q(\xi = \xi_0)}{V_0} = \frac{2a}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{\frac{P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T)}{Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T)} - \frac{P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0)}{Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0)}}. \quad (11)$$

#### 4. DISCUSIÓN

En las Secs. 2 y 3 se construyeron las funciones de potencial electrostático [Ec. (7e)] y de intensidad de campo eléctrico [Ec. (8a)] para el condensador toroidal como desarrollos en serie de funciones armónicas toroidales. Esto permite exhibir que el potencial electrostático satisface las condiciones de frontera en los electrodos, Ecs. (2a,b), y también determinar las distribuciones de carga Ecs. (8) y (9) y las cargas totales, Ecs. (10), sobre los electrodos. La información anterior permitió obtener la Ec. (11) para la capacitancia del condensador toroidal. Aquí cabe destacar que la R-separabilidad de la ecuación de Laplace es la responsable de la necesidad de expresar cada una de las cantidades físicas relevantes como series de funciones armónicas toroidales.

La situación descrita en el párrafo anterior se puede contrastar con las situaciones bien conocidas de los condensadores con electrodos paralelos, cilíndricos circulares y esféricos

$$\phi(x) = V_0 \frac{x_T - x}{x_T - x_0}, \quad \phi(\rho) = V_0 \frac{\ln \rho_T - \ln \rho}{\ln \rho_T - \ln \rho_0}, \quad \phi(r) = V_0 \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_T}}{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_T}}, \quad (12)$$

$$\vec{E}(x) = \frac{\hat{i}V_0}{x_T - x_0}, \quad \vec{E}(\rho, \varphi, z) = \frac{V_0}{\ln \rho_T - \ln \rho_0} \frac{\hat{\rho}}{\rho}, \quad \phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{V_0}{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_T}} \frac{\hat{r}}{r^2}, \quad (13)$$

$$Q = \frac{V_0 A}{4\pi(x_T - x_0)}, \quad Q = \frac{V_0 h}{2(\ln \rho_T - \ln \rho_0)}, \quad Q = \frac{V_0}{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_T}}, \quad (14)$$

$$C = \frac{A}{4\pi(x_T - x_0)}, \quad C = \frac{h}{2(\ln \rho_T - \ln \rho_0)}, \quad C = \frac{1}{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_T}}. \quad (15)$$

En estos casos la separabilidad completa de la ecuación de Laplace permite que los potenciales se expresen en términos de las funciones armónicas de una sola variable y de la armonicidad más baja asegurándose que se satisfacen las condiciones de frontera de

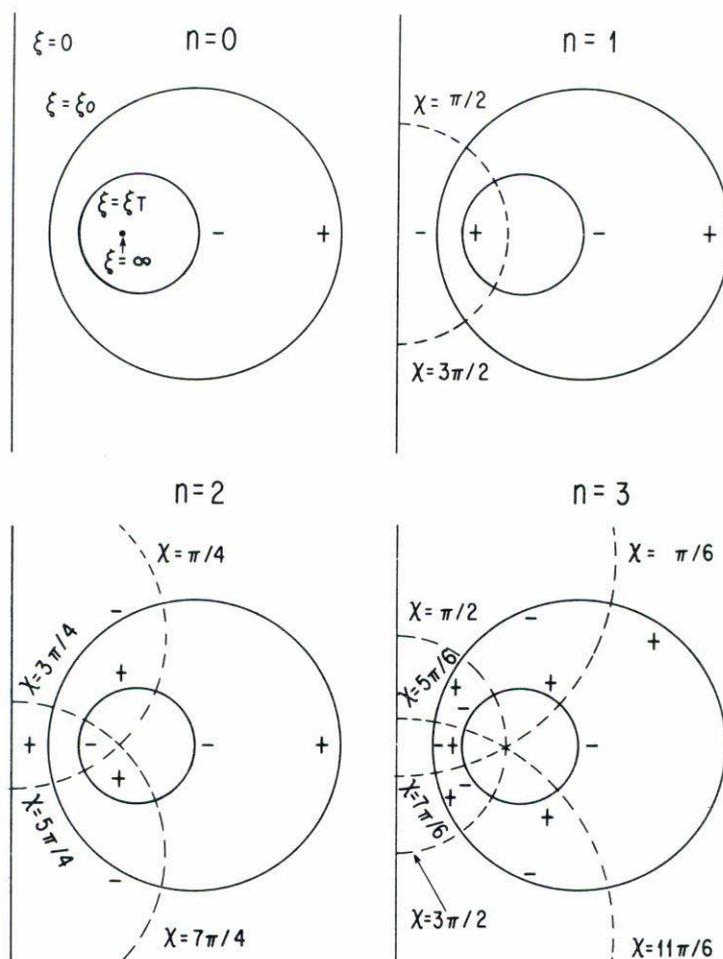


FIGURA 1. Distribuciones armónicas de carga en condensador toroidal para componentes de armonicidades  $n = 0, 1, 2, 3$ .

manera inmediatamente obvia. Consecuentemente, es natural que las líneas de campo eléctrico sigan la dirección de los vectores perpendiculares a los electrodos. Los cálculos de las distribuciones de carga, cargas totales y capacitancias son correspondientemente directos.

En el caso del condensador toroidal aunque cada cantidad física es una superposición de un número infinito de componentes armónicos, el análisis de las Secs. 2 y 3 muestra que hay una correspondencia unívoca entre los componentes de una armonicidad definida para los campos de potencial y de fuerza y las fuentes. La Fig. 1 ilustra las distribuciones de carga en los electrodos para los términos de armonicidades más bajas. También es didáctico hacer notar la estructura común de cada uno de los términos en el desarrollo armónico de la capacitancia de la Ec. (11) y las capacitancias de la Ec. (15), radicando sus diferencias en las funciones armónicas respectivas. La suma de la Ec. (11) corresponde a la combinación en paralelo de todas las contribuciones armónicas a la capacitancia.

También es apropiado señalar que de las Ecs. (7e) y (8a) no es inmediatamente trivial apreciar que los toroides entre los electrodos,  $\xi_0 < \xi = \xi_i < \xi_T$ , son superficies equipotenciales y que el campo de intensidad eléctrica sólo tiene componentes en la dirección de  $\hat{\xi}$ . Desde luego, ambas afirmaciones tienen una base física y geométrica sólida. La justificación matemática sigue del teorema de la unicidad [6] y de los mismos lineamientos ya utilizados en el toroide equipotencial  $\xi = \xi_0$ , siendo directamente adaptables con la sustitución del subíndice 0 por el subíndice  $i$ . En particular, es posible identificar el potencial  $V_i$  a que se encuentra el toroide  $\xi_i$  a través de la relación resultante de tal adaptación:

$$\frac{V_i \varepsilon_n Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_i) Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T)}{Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_i) P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T) - P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_i) Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T)} = \frac{V_0 \varepsilon_n Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T)}{Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T) - P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_T)}, \quad (16)$$

válida para cada componente armónica.

La comparación con las Ecs. (10a,d) permite ver que el valor de las expresiones en la Ec. (16) es proporcional a la contribución armónica respectiva a la carga de los electrodos y, por lo tanto, al flujo eléctrico a través de cada toroide equipotencial. Correspondientemente, el factor que multiplica a  $V_0$  en la Ec. (16) se reconoce que es proporcional a la contribución armónica a la capacitancia [Ec. (11)].

APÉNDICE

La ecuación de Poisson para la función de Green [Ec. (4)] en coordenadas toroidales toma la forma explícita

$$\left\{ \frac{(\cosh \xi - \cos \chi)^3}{a^2 \sinh \xi} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \chi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \chi} \frac{\sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \right] + \frac{(\cosh \xi - \cos \chi)^2}{a^2 \sinh^2 \xi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} G(\xi, \chi, \varphi; \xi', \chi', \varphi') = -4\pi \frac{(\cos \xi - \cos \chi)^3}{a^3 \sinh \xi} \delta(\xi - \xi') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2\pi} \cos n(\chi - \chi') \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2\pi} \cos m(\varphi - \varphi'), \quad (A1)$$

donde  $\varepsilon_0 = 1$  y  $\varepsilon_i = 2$  para  $i = 1, 2, 3 \dots$

La función de Green para condiciones de Dirichlet en la geometría toroidal debe satisfacer las condiciones de frontera

$$G_D(\xi = \xi_0, \chi, \varphi; \xi', \chi', \varphi') = 0, \quad (A2a)$$

$$G_D(\xi = \xi_T, \chi, \varphi; \xi', \chi', \varphi') = 0. \quad (A2b)$$

Se proponen los desarrollos de la función de Green en términos de funciones armónicas [Ec. (3)]:

$$\begin{aligned}
 G_D(\xi, \chi, \varphi; \xi', \chi', \varphi') &= (\cosh \xi' - \cos \chi')^{1/2} (\cosh \xi - \cos \chi)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \cos n(\chi - \chi') \cos m(\varphi - \varphi') \\
 &\times \left[ Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_0) P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_{<}) - P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_0) Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_{<}) \right] \\
 &\times \left[ P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_T) Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_{>}) - Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_T) P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_{>}) \right], \quad (A3)
 \end{aligned}$$

donde  $\xi_{<}$  y  $\xi_{>}$  son el menor y el mayor de los valores de  $\xi$  y  $\xi'$ . Los coeficientes de las funciones de las diversas variables están escogidos para asegurar la simetría de la función de Green bajo el intercambio de los puntos fuente y campo, y para satisfacer las condiciones de frontera de las Ecs. (2a,b). Los coeficientes  $A_{nm}$  comunes para ambas situaciones  $\xi < \xi'$  y  $\xi > \xi'$  aseguran la continuidad de la función de Green cuando el punto campo pasa por el punto fuente,  $\xi = \xi'$ . La determinación de esos coeficientes se logra substituyendo los desarrollos de la Ec. (A3) en la Ec. (1), usando la independencia lineal de las bases de Fourier en las coordenadas esféricas y azimutales e integrando la ecuación resultante en la coordenada toroidal alrededor del punto fuente. Los detalles de la evaluación son similares a los de la Ref. [5] y conducen a la relación

$$\begin{aligned}
 A_{nm} \sinh \xi' \left[ Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_0) P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_T) - P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_0) Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_T) \right] \\
 \times \left[ P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi') \frac{dQ_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi')}{d\xi'} - Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi') \frac{dP_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi')}{d\xi'} \right] = -\frac{\varepsilon_n \varepsilon_m}{\pi a}. \quad (A4)
 \end{aligned}$$

Nótese que excepto por el primer factor en corchetes, el cual se debe a las condiciones de frontera de Dirichlet, la Ec. (A4) tiene su contraparte en la Ec. (15) de la Ref. [5] para la función de Green válida para todo el espacio.

La Ec. (7a) para el potencial electrostático del condensador toroidal requiere la derivada de la función de Green, Ec. (A3), con respecto a la coordenada toroidal  $\xi' < \xi$  en el electrodo  $\xi' = \xi_0$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial G_D(\xi, \chi, \varphi; \xi' = \xi_0, \chi', \varphi')}{\partial \xi'} &= (\cosh \xi_0 - \cos \chi')^{1/2} (\cosh \xi - \cos \chi)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \cos n(\chi - \chi') \cos m(\varphi - \varphi') \\
 &\times \left[ Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_0) \frac{dP_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_0)}{d\xi_0} - P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_0) \frac{dQ_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_0)}{d\xi_0} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[ P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_T) Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi) - Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_T) P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi) \right] \\
 = & (\cosh \xi_0 - \cos \chi')^{1/2} (\cosh \xi - \cos \chi)^{1/2} \\
 & \times \frac{1}{\pi a \sinh \xi'} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_n \varepsilon_m \cos n(\chi - \chi') \cos m(\varphi - \varphi') \\
 & \times \frac{P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_T) Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi) - Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_T) P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi)}{Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_0) P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_T) - P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_0) Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \xi_T)}. \quad (A5)
 \end{aligned}$$

Al pasar de la primera forma de la Ec. (A5) a la segunda se hace uso de la Ec. (A4) para  $\xi' = \xi_0$ .

REFERENCIAS

1. D. Halliday y R. Resnick, *Physics for Students of Science and Engineering*, Wiley, New York (1960) Cap. 30.
2. P. Lorrain y D.R. Corson, *Electromagnetism*, Second Edition, Freeman, San Francisco (1990) Cap. 4.
3. J. Jeans, *The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism* Fifth Edition, Cambridge (1960) Cap. VIII.
4. G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Second Edition, Academic Press, New York (1970) Cap. 2.
5. E. Ley-Koo y A. Góngora T. *Rev Mex. Fís.* **40** (1994) 805.
6. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Second edition, Wiley, New York (1975) Cap. 1.
7. A.P. Prudnikov, Y.A. Brychkov, O.I. Marichev, *Integrals and Series*, Vol. 3: More Special Functions, Gordon and Breach, New York (1990) p. 405.