

Estudio teórico y numérico de la difracción en óptica electromagnética. III. Teoría rigurosa de la difracción de un haz gaussiano por dos rendijas. Polarización T.M.

M.A. ALVAREZ-CABANILLAS

*Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital
Instituto Politécnico Nacional, 22510 Tijuana, B.C., México*

Y

O. MATA-MENDEZ

*Departamento de Física. Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional C.P. 07738, Zacatenco, México, D.F.*

Recibido el 29 de junio de 1994; aceptado el 6 de septiembre de 1994

RESUMEN. En este artículo presentamos una teoría rigurosa de la difracción de un haz electromagnético gaussiano que incide normalmente sobre dos rendijas iguales en una pantalla metálica infinitamente conductora e infinitamente delgada (espesor cero). En un artículo previo de esta serie (II), se consideró que el campo eléctrico de la onda incidente era paralelo a las rendijas (polarización T.E.). En este artículo trataremos con el otro caso de polarización independiente; supondremos ahora que el campo magnético es paralelo a las rendijas (polarización T.M.). Se muestra que el método clásico para determinar la posición de los máximos y de los mínimos en el patrón de difracción, mediante la diferencia de caminos ópticos, tiene ciertas restricciones cuando la longitud de onda es del orden del ancho de las rendijas (región vectorial).

ABSTRACT. In this paper we have studied the diffraction of electromagnetic Gaussian beams by two slits in a perfectly conducting screen. We have considered the T.M. polarization, *i.e.*, the magnetic field is parallel to the slits. A rigorous diffraction theory is presented based in Maxwell's equations. We discuss the coupling between slits.

PACS: 42.25.F

1. INTRODUCCIÓN

Como mencionamos en el segundo artículo de esta serie [1], que llamaremos de aquí en adelante II, en los últimos años ha habido un interés creciente en el estudio de la difracción de haces de ancho finito [2,3]. En particular, este interés se ha centrado en la difracción de haces de tipo gaussiano, debido principalmente a que éste es el modo fundamental de emisión de un láser. El lector interesado encontrará en la Ref. [4], número I de esta serie, una extensa bibliografía acerca de la difracción de haces de ancho finito por diferentes obstáculos.

En II, presentamos una nueva teoría rigurosa de la difracción de un haz electromagnético gaussiano por dos rendijas iguales en una pantalla metálica de conductividad infinita e infinitamente delgada (espesor nulo). En esta teoría se resuelven sin aproximaciones las

ecuaciones de Maxwell (vía la ecuación de Helmholtz) con las condiciones de frontera adecuadas, dando lugar a que la teoría pueda ser aplicable en la región vectorial (definida en la Ref. [4]) dada por la condición $0.2 < \lambda/l$, donde λ es la longitud de onda en el vacío y l es el ancho de las rendijas; se mostró que los efectos de polarización son importantes y que una teoría escalar, como por ejemplo la de Kirchhoff o la de Rayleigh-Sommerfeld, no puede ser aplicable en esta región vectorial si se desean resultados precisos. En II, se supuso que el campo eléctrico de la onda incidente era paralelo a las rendijas, es decir, se consideró la polarización T.E. En particular se obtuvieron dos resultados muy interesantes. Se mostró que el método clásico (basado en la diferencia de caminos ópticos) para determinar la posición de los máximos y mínimos en un patrón de difracción no puede en general aplicarse en la región vectorial. Este resultado nos muestra claramente que no es siempre correcto extrapolar conclusiones de la región escalar [4] ($\lambda/l < 0.2$) a la región vectorial. En segundo lugar, se analizó la manera en que el coeficiente de transmisión depende de la separación entre rendijas, es decir, se estudió el acoplamiento entre rendijas. Se mostró que el acoplamiento da lugar a una función oscilante de período λ y de amplitud decreciente conforme se incrementa la separación entre las dos rendijas.

En este artículo consideraremos que la onda incidente tiene polarización T.M., es decir, supondremos que el campo magnético de la onda incidente es paralelo a las rendijas. Es importante mencionar que la teoría de II (caso T.E.), es totalmente independiente de la presentada aquí para el caso T.M., no siendo posible expresar una en términos de la otra. Con la teoría de II y con la de este artículo, dispondremos finalmente de la solución completa para una onda de polarización arbitraria que incide normalmente sobre dos rendijas; esta solución completa es combinación lineal de los dos casos de polarización T.E. y T.M. Al igual que en II, fijaremos nuestra atención en la región vectorial y analizaremos el método clásico de diferencias de caminos ópticos, así como la influencia de ciertos parámetros optogeométricos.

2. FORMULACIÓN DE LA TEORÍA

2.1. La base de Fourier

Nuestra configuración consta de una pantalla plana, infinitamente conductora e infinitamente delgada (espesor nulo), localizada en el vacío. En la pantalla se hallan dos rendijas, infinitamente largas, de ancho l y separadas una distancia d . Nuestro sistema de coordenadas $Oxyz$ está colocado de tal manera, que las rendijas son paralelas al eje Oz y la pantalla se localiza en el plano Oxz . Las rendijas son iluminadas perpendicularmente (incidencia normal) por un haz gaussiano de longitud de onda $\lambda = 2\pi/k_0$, el cual es independiente de la variable z , es decir, las rendijas son iluminadas por una onda cilíndrica monocromática de tipo gaussiano. La intensidad del haz gaussiano sobre la pantalla tiene ancho L y su posición con respecto al eje Oy está dada por el parámetro b , como se ilustra en la Fig. 1. En lo que sigue admitiremos la dependencia en el tiempo de la forma $\exp(-i\omega t)$.

En el caso T.M. la componente del campo magnético sobre el eje Oz , que denotaremos

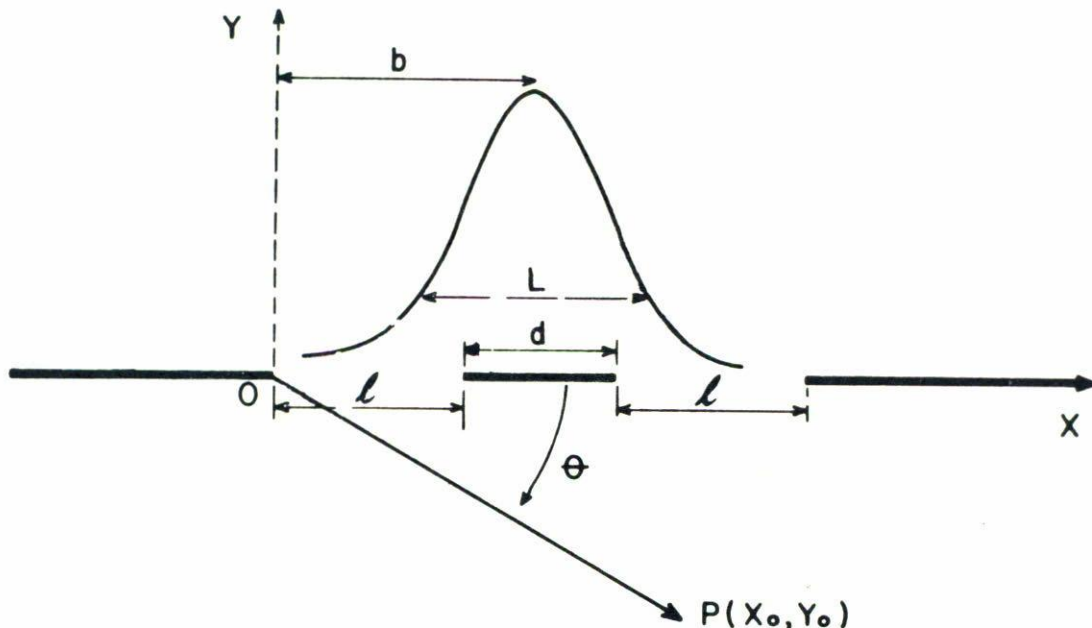


FIGURA 1. Nuestro sistema. Las rendijas de ancho l son paralelas al eje Oz , es decir, son perpendiculares al plano de la figura. El ángulo θ es usado para describir los patrones de difracción.

por H , verifica a la ecuación de Helmholtz [5]:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + k_0^2 H = 0. \tag{1}$$

Así, el problema a tratar vectorialmente, se reduce a un problema escalar.

Al igual que en II, la solución arriba de la pantalla (en el vacío), que denotaremos por $H_1(x, y)$, puede expresarse mediante un desarrollo de ondas planas [5]:

$$H_1(x, y) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-k_0}^{k_0} A(\alpha) \exp[i(\alpha x - \beta y)] d\alpha + \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha) \exp[i(\alpha x + \beta y)] d\alpha, \tag{2}$$

en donde hemos definido $\beta^2 = k_0^2 - \alpha^2$, con $\beta \geq 0$ o $\beta/i \geq 0$. Identificaremos al primer término de esta última ecuación con el campo magnético incidente $H^i(x, y)$, y al segundo término con el campo difractado hacia arriba de la pantalla. El campo magnético difractado abajo de la pantalla tiene el siguiente desarrollo en ondas planas [5]:

$$H_2(x, y) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) \exp[i(\alpha x - \beta y)] d\alpha. \tag{3}$$

Analicemos ahora la solución de la ecuación de Helmholtz en la pantalla y en las dos rendijas ($y = 0, -\infty < x < \infty$), y denotemos por $H_3(x, 0)$ este campo magnético. Debido a

que estamos tratando con una pantalla de conductividad infinita y con una onda incidente con polarización T.M., las condiciones matemáticas que debemos imponer a las soluciones de la ecuación de Helmholtz son la anulación del campo magnético en el interior de la pantalla y de su derivada normal en la superficie de la misma. Por lo tanto, podremos expresar a $H_3(x, 0)$ mediante el siguiente desarrollo modal:

$$H_3(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^1 \phi_n^1(x) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \phi_n^2(x), \quad (4)$$

donde la base $\phi_n^i(x)$ está dada por

$$\phi_n^i(x) = \begin{cases} \cos \left[(x - (i-1)(d+\ell)) \frac{n\pi}{\ell} \right], & (i-1)(d+\ell) \leq x \leq \ell + (i-1)(d+\ell), \\ 0 & \text{en cualquier otro } x. \end{cases} \quad (5)$$

Notamos que en este caso de polarización T.M., la base se expresa en términos de la función coseno, mientras que en el caso T.E., es en términos de la función seno. Existe entre las $\phi_n^i(x)$ las siguientes relaciones de ortogonalidad:

$$\langle \phi_n^i(x), \phi_m^j(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^i(x) \phi_m^j(x)^* dx = \frac{\ell}{2} (1 + \delta_{n0}) \delta_{nm} \delta_{ij}, \quad (6)$$

donde el asterisco denota el complejo conjugado.

Se acostumbra decir que las soluciones $H_j(x, y)$, para $j = 1, 2, 3$, están expresadas en la base de Fourier.

2.2. Una propiedad del campo magnético

Podría pensarse que para obtener la solución de nuestro problema, que es la determinación del campo magnético en todo el espacio, es suficiente aplicar un método similar al utilizado en II, pero como veremos, esto no es así. De las Ecs. (2) y (3), y de la continuidad de la derivada normal en $y = 0$, con $-\infty < x < \infty$, se tiene

$$-A(\alpha) + B(\alpha) = -C(\alpha). \quad (7)$$

Por otro lado, la continuidad del campo magnético en las dos rendijas y el hecho de que las funciones $\phi_n^j(x)$ se anulen fuera de estas dos rendijas [Ec. (5)], nos conducen a

$$\langle H_1(x, 0) - H_3(x, 0), \phi_m^j(x) \rangle = 0, \quad (8)$$

$$\langle H_2(x, 0) - H_3(x, 0), \phi_m^j(x) \rangle = 0. \quad (9)$$

De estas tres últimas ecuaciones y de las Ecs. (2)-(4), se tiene que es posible expresar a los coeficientes modales a_n^i que intervienen en la Ec. (4) en términos del campo magnético incidente $H^i(x, 0)$:

$$a_n^j = \frac{\langle A(\alpha), \hat{\phi}_n^j(\alpha) \rangle}{\langle \hat{\phi}_n^j(\alpha), \hat{\phi}_n^j(\alpha) \rangle} = \frac{\langle H^i(x, 0), \phi_n^j(x) \rangle}{\ell/2(1 + \delta_{n0})}. \quad (10)$$

Para obtener este resultado se utilizó el teorema de Parseval-Plancherel $\langle f(x), g(x) \rangle = \langle \hat{f}(\alpha), \hat{g}(\alpha) \rangle$, donde $\hat{f}(\alpha)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$. Si reemplazamos este resultado en la Ec. (4), se obtendrá sin dificultad

$$H_3(x, 0) = H^i(x, 0) \quad (\text{con } x \text{ en las rendijas}); \quad (11)$$

luego, la utilización del método empleado en II nos conduce a la siguiente propiedad: en polarización T.M., el campo magnético total en las aberturas es igual al campo magnético incidente.

Para completar, mencionaremos que es posible dentro de la teoría de II obtener un resultado similar a la Ec. (11):

$$\frac{\partial E_1}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial E^i}{\partial y}(x, 0) \quad (\text{con } x \text{ en las rendijas}). \quad (12)$$

Esta propiedad del campo eléctrico puede expresarse así: en polarización T.E., la derivada normal del campo eléctrico total en las aberturas es igual a la derivada normal del campo eléctrico incidente. La propiedad dada por la Ec. (12) fue utilizada por Otsuki [6] en 1990 en la difracción por múltiples rendijas en una pantalla de espesor cero. Aunque sus resultados numéricos concuerdan bien con el experimento y con la teoría rigurosa de II (para el caso de una onda plana incidente), Otsuki no fue capaz de probar que su método es riguroso, como él mismo menciona en su artículo.

Antes de dejar esta sección, debemos mencionar que las dos propiedades [Ecs. (11) y (12)] fueron obtenidas por Fack [7] utilizando un método totalmente diferente (basado en las funciones de Green) para el caso de una rendija y para una onda incidente plana. Con nuestra demostración hemos extendido su conclusión a dos rendijas y, por lo tanto, suponemos que estas propiedades serán válidas también para el caso de N rendijas.

2.3. La solución

Como hemos visto, si se lleva a cabo un procedimiento similar al realizado para el caso T.E., no es posible obtener la solución a nuestro problema, que es la determinación del campo magnético en todo el espacio. Para obtener la solución debemos hacer un cambio sutil e importante en la demostración.

Por un momento consideremos que la pantalla tiene espesor h . Estando el eje Ox en la parte media de la pantalla, es decir, la parte superior de la pantalla tiene la coordenada $y = h/2$ y la parte inferior la coordenada $y = -h/2$. La solución $H_3(x, y)$ en la franja

determinada por la pantalla y las dos rendijas ya no estará dada por la Ec. (4), sino por la siguiente:

$$H_3(x, y) = \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} [a_n^i \cos(\mu_n y) + b_n^i \operatorname{sen}(\mu_n y)] \phi_n^i(x) \quad (-h/2 < y < h/2, -\infty < x < \infty), \quad (13)$$

donde $\mu_n^2 = k_0^2 - (n^2 \pi^2 / \ell^2)$, con $\mu_n \geq 0$ o $\mu_n / i \geq 0$. Mientras que la Ec. (2) sigue siendo válida para $y > h/2$, y la Ec. (3) para $y < -h/2$.

Con este cambio en el espesor de la pantalla estamos ahora en condiciones de aplicar con éxito un método parecido al utilizado en II. La continuidad de la derivada normal del campo magnético en $y = \pm h/2$, estando x en el intervalo $-\infty < x < \infty$, y la continuidad del campo magnético en las dos rendijas para $y = \pm h/2$, nos conducen al siguiente sistema matricial si hacemos tender h a cero (espesor nulo):

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n^1 \mu_n \left\langle \frac{\hat{\phi}_n^1(\alpha)}{i\beta}, \hat{\phi}_m^i(\alpha) \right\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 \mu_n \left\langle \frac{\hat{\phi}_n^2(\alpha)}{i\beta}, \hat{\phi}_m^i(\alpha) \right\rangle = -\langle A(\alpha), \hat{\phi}_m^i(\alpha) \rangle, \quad (14)$$

con $i = 1, 2$ y $m = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$. Representemos a este sistema en forma matricial. Si \mathbf{b}_1 y \mathbf{b}_2 son matrices columna, formadas respectivamente con los coeficientes modales b_n^1 y b_n^2 , se tiene

$$\mathbf{M}_{11} \mathbf{b}_1 + \mathbf{M}_{12} \mathbf{b}_2 = \mathbf{S}_1, \quad (15)$$

$$\mathbf{M}_{21} \mathbf{b}_1 + \mathbf{M}_{22} \mathbf{b}_2 = \mathbf{S}_2, \quad (16)$$

donde \mathbf{M}_{ik} ($i, k = 1, 2$) son matrices cuadradas que dependen de los parámetros optogeométricos y \mathbf{S}_i ($i = 1, 2$) son matrices columnas, en las cuales sus elementos son funciones lineales de $A(\alpha)$.

Notamos que esta ecuación matricial está dada en términos de los coeficientes modales b_n^i y no en función de los coeficientes α_n^i que intervienen en la Ec. (4). Para el caso que estamos tratando (pantalla de espesor cero) podemos considerar a los coeficientes b_n^i como coeficientes auxiliares a nuestro problema, ya que cuando $h = 0$, éstos no tienen sentido físico. Sin embargo, estos coeficientes auxiliares nos permiten determinar el campo magnético en todo el espacio. La amplitud $B(\alpha)$ del campo difractado arriba de la pantalla [Ec. (2)], la podemos expresar así:

$$B(\alpha) = A(\alpha) + \frac{1}{i\beta} \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n^j \mu_n \hat{\phi}_n^j(\alpha), \quad (17)$$

y la amplitud $C(\alpha)$ del campo difractado abajo de la pantalla [Ec. (3)] se expresa en términos de estos coeficientes auxiliares de la siguiente manera:

$$C(\alpha) = \frac{-1}{i\beta} \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n^j \mu_n \hat{\phi}_n^j(\alpha). \quad (18)$$

En conclusión, la solución del sistema matricial dado en la Ec. (14) nos determina el campo difractado arriba de la pantalla mediante las Ecs. (2) y (17), y el campo difractado abajo de la pantalla a partir de las Ecs. (3) y (18). Mientras que el campo en la abertura se determina directamente a partir de la propiedad obtenida en la sección anterior [Ec. (11)].

Finalmente, al igual que en II, el cálculo de los elementos matriciales hacen intervenir integrales de $-\infty$ a ∞ , cuyos integrandos son muy oscilantes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\beta(\alpha)} \frac{\exp(i\alpha\ell)}{\left(\alpha^2 - \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\right) \left(\alpha^2 - \frac{m^2\pi^2}{\ell^2}\right)} d\alpha. \tag{19}$$

Estas integrales se pueden calcular con alta precisión si se utiliza la misma técnica de deformación de contorno en el plano complejo que se utilizó en II. Sólo mencionaremos, que en este caso de polarización T.M., una nueva dificultad surge del hecho que $\beta(\alpha)$ se encuentra en el denominar.

2.4. Conservación de la energía

Definiremos como coeficiente de transmisión T , al cociente entre la energía transmitida y la energía incidente. El coeficiente de reflexión R será el cociente entre la energía reflejada y la energía incidente. Luego, la conservación de la energía se expresa como

$$R + T = 1. \tag{20}$$

La ley de conservación de la energía es uno de los principales criterios que utilizamos para saber si nuestros programas trabajan bien. En todos nuestros cálculos este criterio se verificó con una precisión mejor que 10^{-4} .

La utilización del vector de Poynting nos indica que la intensidad difractada en el ángulo θ abajo de la pantalla está dada por (véase la Fig. 1)

$$I(\theta) = \frac{k_0^2}{2\varepsilon_0\omega} \text{sen}^2(\theta) \left| \hat{H}_2(k_0 \cos \theta, 0) \right|^2. \tag{21}$$

En todos los patrones de difracción presentados en este artículo, la intensidad difractada dada por la Ec. (21) se normalizará a la energía incidente I_0 , es decir, se graficará el cociente $I(\theta)/I_0$.

3. RESULTADOS NUMÉRICOS

Como haz incidente, admitiremos uno cuya distribución de intensidades sobre la pantalla es de tipo gaussiano [1-4]:

$$I(x) = \exp \left[-\frac{4(x - b)^2}{L^2} \right]. \tag{22}$$

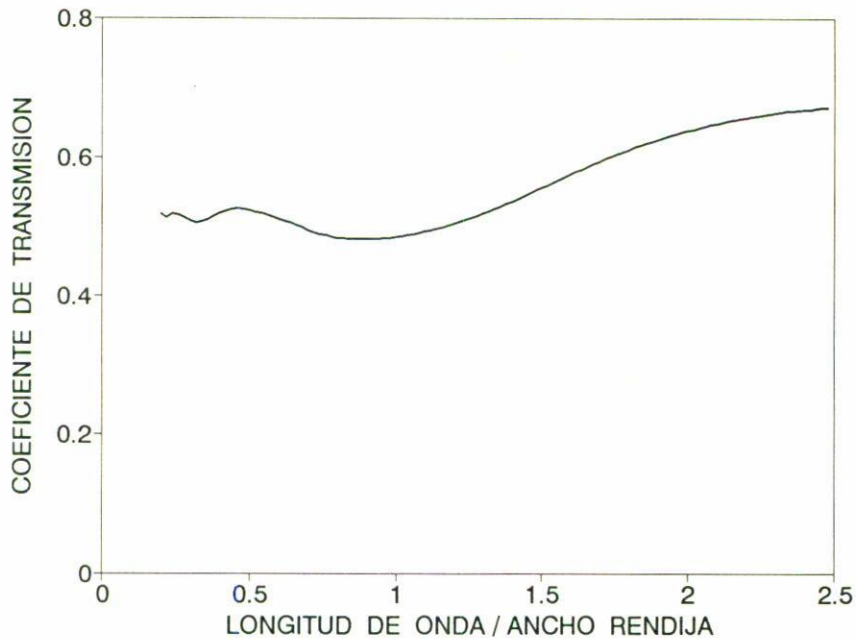


FIGURA 2. Coeficiente de transmisión en función de la longitud de onda (normalizada al ancho de la rendija): $L/l = 0.5355$, $d/l = 0.5$ y $b/l = 1.25$.

Este haz incide normalmente sobre la pantalla, tiene un ancho L y se fija su posición con respecto al eje Oy con el parámetro b (véase Fig. 1). Por lo tanto, la amplitud $A(\alpha)$ del campo incidente está dada por

$$A(\alpha) = \frac{L}{2} \exp(-i\alpha b) \exp\left(-\frac{\alpha^2 L^2}{8}\right). \quad (23)$$

Antes de llevar a cabo una explotación sistemática de nuestros programas numéricos se cuidó que el criterio de conservación de la energía se cumpliera. Observamos que con 10 coeficientes modales en cada una de las rendijas, este criterio se satisfacía con una precisión mejor que 10^{-4} , indicándonos esto que es posible garantizar los resultados al menos hasta la tercera cifra decimal, pudiendo mejorarse la precisión si se toman más coeficientes modales y más pasos de integración.

Hemos probado en un artículo previo [4] que en la región escalar la teoría de Rayleigh-Sommerfeld (TRS) da excelentes resultados. Para verificar nuestro programas numéricos comparamos en esta región nuestros resultados con la TRS. Obtuvimos una buena concordancia; en particular, se reprodujo la Fig. 3 de II con muy buena precisión.

En la Fig. 2 mostramos cómo varía el coeficiente de transmisión en función de la longitud de onda. Si se compara esta figura con la correspondiente del caso T.E. (Fig. 4 de II), se observará que existe una fuerte influencia de la polarización, principalmente para longitudes de onda grandes. Cuando la longitud de onda se aproxima a 0.2, el efecto de polarización desaparece debido a que nos acercamos a la región escalar.

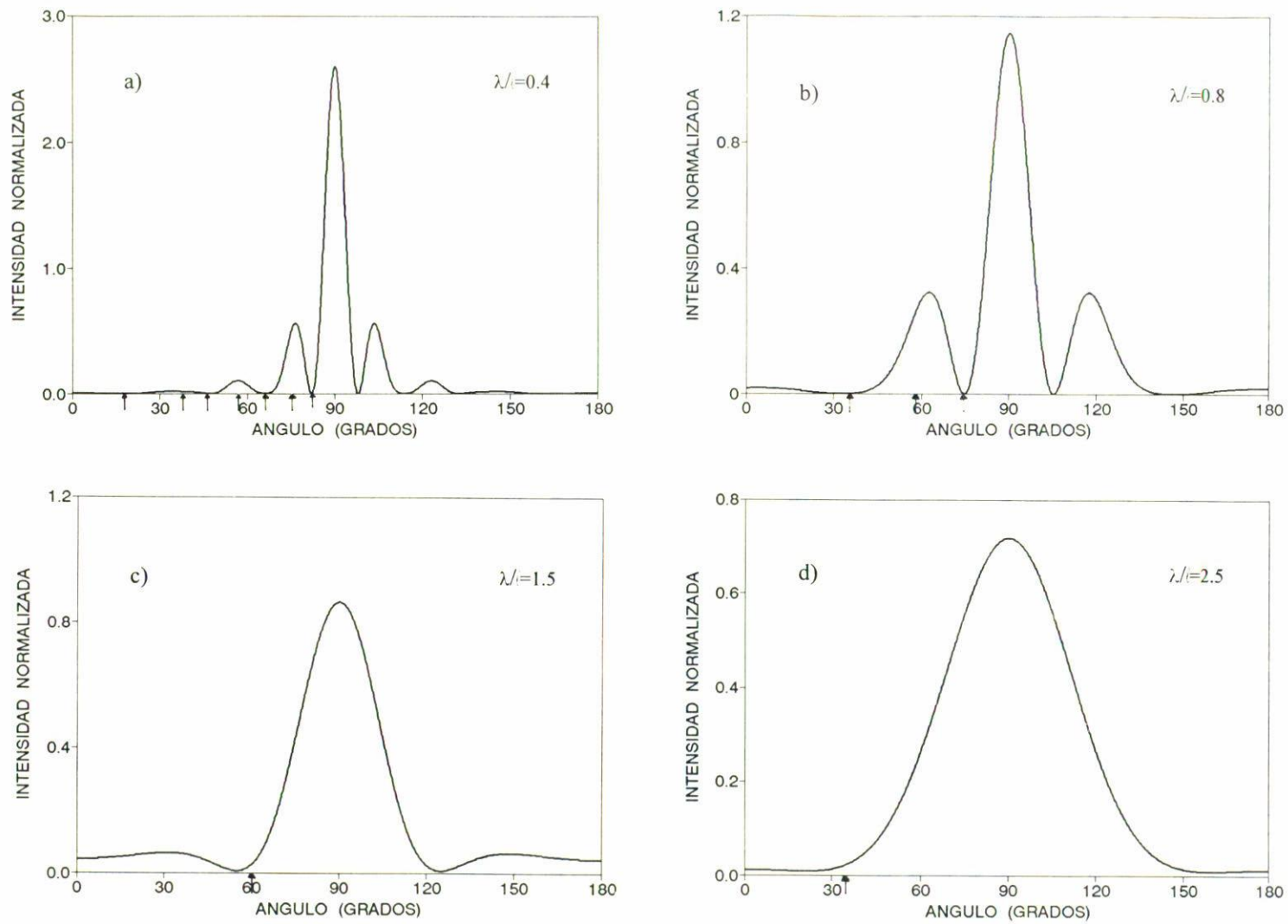


FIGURA 3. Patrones de difracción normalizados ($I(\theta)/I_0$) para dos rendijas. Mismos parámetros que en la Fig. 2 para: a) $\lambda/l = 0.4$, b) $\lambda/l = 0.8$, c) $\lambda/l = 1.5$, d) $\lambda/l = 2.5$.

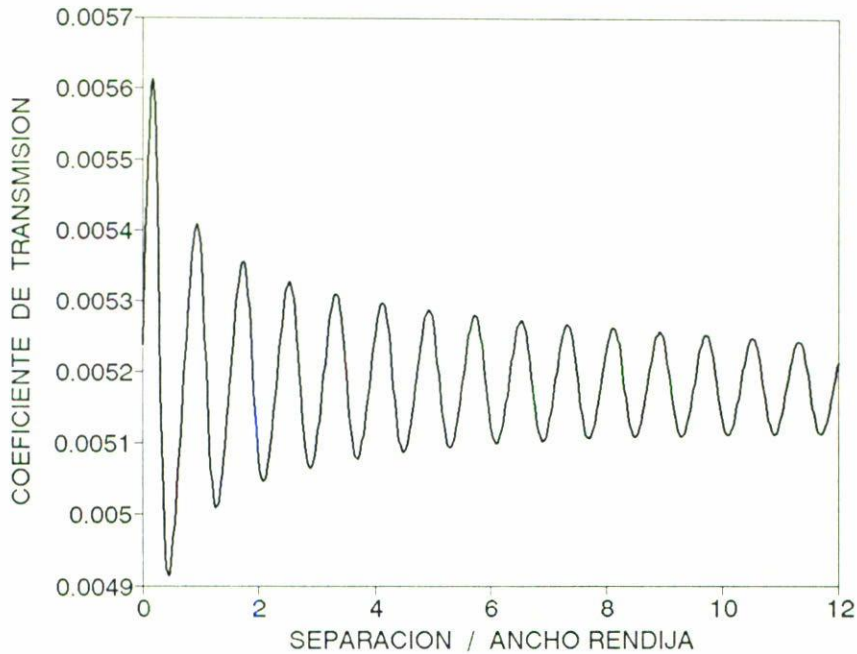


FIGURA 4. Acoplamiento entre dos rendijas. El coeficiente de transmisión en función de la separación de las rendijas (d/l), para $L/l = 500/\sqrt{2}$, $\lambda/l = 0.8$ y $b/l = 0.5$.

En la Fig. 3 mostramos la influencia de la longitud de onda en los patrones de difracción. La energía difractada está normalizada a la energía incidente. Los patrones de difracción para este caso T.M., son muy parecidos a los obtenidos en el caso T.E. (Fig. 5 de II), excepto cuando el ángulo de difracción se encuentra muy cerca de la pantalla (para $\theta = 0^\circ$ y 180°). Para estos valores angulares extremos el efecto de polarización es muy notorio. En la Fig. 3 señalamos con flechas pequeñas, para la parte izquierda de cada patrón, la posición de los máximos (salvo el máximo central) y mínimos, determinados mediante el método clásico de la diferencia de caminos ópticos [Ecs. (26) y (27) de II]. Concluimos de esta figura que la posición de los máximos y mínimos determinados mediante la diferencia de caminos ópticos está más de acuerdo con los resultados del caso T.M. que con los del caso T.E. En los extremos de los patrones de difracción (para $\theta = 0^\circ$ y 180°), en donde el efecto de polarización es más importante, el método clásico prefiere los resultados del caso T.M.

Por último, en la Fig. 4, presentamos la influencia de la separación de las rendijas (d/l) en el coeficiente de transmisión, es decir, esta figura nos muestra cualitativamente el acoplamiento entre rendijas. Las conclusiones generales son las mismas que las que se obtuvieron en el caso T.E., y son:

1. El acoplamiento da lugar a una función oscilante de amplitud decreciente conforme se incrementa la separación entre las rendijas.

2. En la región vectorial, la separación entre máximos o mínimos (período de oscilación) es precisamente la longitud de onda λ , si no se toma en consideración el primer máximo. Resultado que es independiente de la polarización y, por lo tanto, lo podemos considerar como un efecto de interferencia puro.

4. CONCLUSIONES

En este artículo hemos presentado una teoría rigurosa de la difracción por dos rendijas en una pantalla metálica de conductividad infinita e infinitamente delgada. La teoría fue hecha de tal manera que es adecuada para el estudio de la difracción de haces gaussiano. En un artículo previo de esta serie (II) se consideró el caso T.E. de polarización y en este trabajo lo completamos al considerar el otro caso de polarización fundamental, el caso T.M. Las teorías presentadas en estos dos artículos son totalmente independientes, no siendo posible expresar una en términos de la otra. Con estas dos soluciones independientes se dispone de la solución completa para una onda incidente gaussiana con polarización arbitraria. Se prueba que en la región vectorial el método clásico de diferencias de caminos ópticos para determinar la posición de los máximos y mínimos, está más de acuerdo con los resultados del caso T.M. que con los del caso T.E. Se muestra que el acoplamiento entre rendijas sigue un comportamiento muy parecido al del caso T.E.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo de COFFA-IPN.

REFERENCIAS

1. O. Mata-Mendez y F. Chávez-Rivas, *Rev. Mex. Fís.* **39** (1993) 706.
2. O. Mata-Mendez, *Opt. Lett.* **16** (1991) 1629.
3. O. Mata-Mendez, *Phys. Rev.* **B37** (1988) 8182.
4. O. Mata-Mendez y F. Chávez-Rivas, *Rev. Mex. Fís.* **39** (1993) 371.
5. O. Mata-Mendez, *Rev. Mex. Fís.* **38** (1992) 850.
6. T. Otsuki, *J. Opt. Soc. Am.* **A7** (1990) 646.
7. P. Fack, Thèse de 3e Cycle (1971), Université de Paris, Centre d'Orsay.