

## Caída libre y la figura de la Tierra

PEDRO MIGUEL RIPA

*Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada  
B.C., México. Internet: ripa@cicese.mx*

Recibido el 18 de marzo de 1994; versión corregida el 18 de agosto de 1994;  
aceptado el 14 de octubre de 1994

**RESUMEN.** La desviación hacia el oriente que sufre un cuerpo en caída libre fue utilizada como una prueba de la rotación terrestre. Se presenta la derivación que hizo Laplace de esta desviación, en la que utilizó la fuerza “de Coriolis”, la cual él había descubierto un cuarto de siglo antes, cuando el propio Coriolis todavía no había nacido. Se calcula el término dominante del desplazamiento meridional, debido a una minúscula curvatura del campo gravitatorio terrestre en la región de caída. Esta desviación es tan pequeña que el presente resultado es, desde un punto de vista práctico, una confirmación de la predicción de Laplace de un desplazamiento nulo hacia el ecuador. Se demuestra que para obtener este resultado, la acción de la componente no central del campo gravitatorio terrestre es fundamental. Finalmente, se incluyen una serie de problemas para facilitar la comprensión del estudiante.

**ABSTRACT.** The deflection towards the East that experiences a free-falling body has been used as a proof of Earth’s rotation. Laplace’s derivation of this deflection is presented, derivation in which he used the “Coriolis force”, which he had discovered a quarter of a century before, when Coriolis himself had not been born. The leading order term of the meridional deflection is calculated and confirmed to be negligible for all practical purposes, thereby confirming Laplace’s null prediction for this displacement. Finally, a series of problems are also included, to help the student understand the subject.

PACS: 01.40; 01.60; 03.20.+i

### 1. INTRODUCCIÓN

Si se deja caer un objeto desde la punta de una torre, a una altura  $z = h$ , su velocidad vertical crece linealmente con el tiempo, o sea  $\dot{z} = -gt$ , donde  $g$  es la aceleración de la gravedad (tomada como constante) y el signo negativo significa que el movimiento es hacia abajo. Integrando esta última ecuación obtenemos  $z = h - \frac{1}{2}gt^2$ , es decir, el cuerpo llega al suelo,  $z = 0$ , en un tiempo

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (1.1)$$

Por ejemplo, para una altura inicial de  $h = 1$  m, 100 m, 10 km y 1 Mm, el tiempo de caída predicho es  $t_c = 0.452$  s, 4.52 s, 45.2 s y 452 s, respectivamente. Este cálculo sencillo no tiene en cuenta ni el retardamiento debido a la fricción con el aire (Problema 1) ni la disminución de la atracción gravitatoria con la distancia a la Tierra (Problema 2).

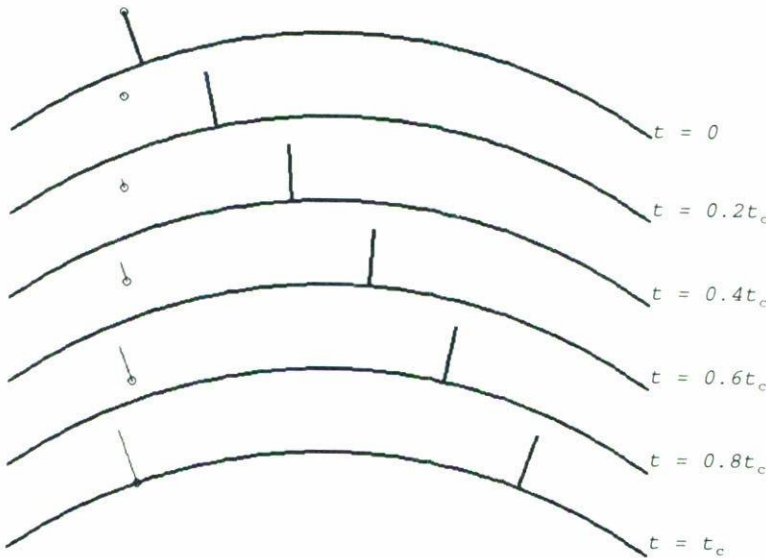


FIGURA 1. Argumento en contra de Copérnico, visto por una observadora inercial (fija al espacio absoluto): Mientras la Tierra gira hacia el este (derecha de la figura), la piedra sólo se mueve hacia el centro del planeta y por lo tanto aterriza al oeste del lugar de lanzamiento. En esta figura y otras similares, las dimensiones relativas han sido exageradas y distorsionadas a los efectos de mayor claridad.

Otros efectos no tomados en cuenta en este análisis sencillo son los debidos a la rotación terrestre; a ellos está dedicado este artículo.

Un tema que apasionó durante mucho tiempo a la humanidad es el de dónde aterriza el objeto: ¿lo hace en la base de la torre o es desviado debido al movimiento de la Tierra? En primer lugar, este experimento fue usado como un argumento en contra de la rotación terrestre [1]: Si la Tierra girara hacia el este mientras el cuerpo cae, entonces éste aterrizaría a una distancia enorme, hacia el poniente del punto donde se lo dejó caer (véase Fig. 1). ¿Cuál será esta distancia? Sea  $\Omega$  la velocidad angular de rotación terrestre y  $R$  el radio de la Tierra (por el momento, considerada una esfera perfecta). Un punto sobre el ecuador terrestre se mueve con respecto al espacio absoluto con una velocidad igual a  $\Omega R = (40 \text{ Mm})/(24 \text{ h}) = 463 \text{ m/s}$ , mientras que un punto a una latitud  $\vartheta$  se mueve con una velocidad de  $\Omega R \cos \vartheta$ . Si  $x$  es la coordenada horizontal hacia el este, de acuerdo a este argumento el cuerpo aterrizaría a una distancia

$$\Delta x = -R \cos \vartheta \Omega t_c = -\Omega R \cos \vartheta \sqrt{\frac{2h}{g}}, \tag{1.2}$$

de la posición original, donde el signo negativo corresponde a una desviación hacia el poniente. (Nótese que esta fórmula es válida aun teniendo en cuenta la esfericidad terrestre.) Esta distancia es muy grande: por ejemplo, para  $h = 1 \text{ m}$  o  $100 \text{ m}$  la magnitud de la deflexión en  $\vartheta = \pm 45^\circ$  es de ¡150 m o 1.5 km!.

Galileo [2] considera el argumento anterior utilizando la analogía de una piedra dejada caer desde la punta del mástil de un barco: de acuerdo a él, “de la caída de la roca en el

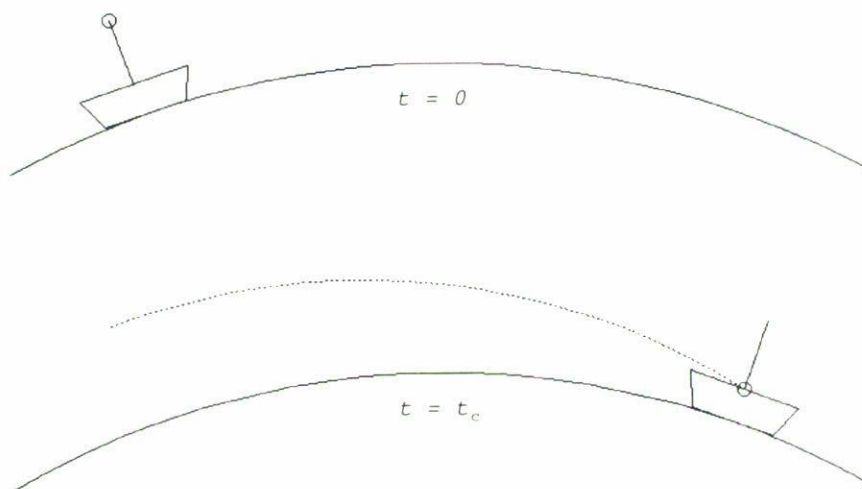


FIGURA 2. Primera parte del contrargumento de Galileo: Una piedra arrojada desde la punta del mástil no cae hacia la popa, sino que sigue al barco y aterriza exactamente en su base.

pie del mástil se infiere que el barco está quieto, y de que caiga separado se deduce que el barco está en movimiento”; luego concluye que “de la caída de una roca al pie de la torre se debe necesariamente inferir la inmovilidad del globo terrestre”. Galileo pasa luego a rebatir este argumento, deduciendo el principio de inercia (constancia, en ausencia de fricción, de la velocidad horizontal) [3], con base en una serie de experimentos pensados (los *Gedankenexperimente* de Mach). Luego muestra que, al ser liberada, la piedra tiene la misma velocidad horizontal que el barco, por lo que de acuerdo a ese principio “la roca siempre cae en el mismo lugar del barco, ya sea que éste esté quieto o moviéndose con la velocidad de le[s] plazca” (véase Fig. 2), es decir, lo acompaña en su movimiento, a pesar de que la fricción con el aire tendería a frenarla un poco. Igualmente, razona Galileo, un cuerpo dejado caer desde lo alto de una torre sigue a la Tierra en su movimiento (y en este caso el aire también la sigue), por lo que en vez de la predicción (1.2) tenemos

$$\Delta x = 0, \quad (1.3)$$

con todo y que la Tierra está girando (véase Fig. 3). Finalmente concluye Galileo en 1632: “ya que la misma causa es buena para la Tierra o el barco, nada puede ser inferido sobre el movimiento o reposo de la Tierra del hecho que la piedra caiga siempre en forma perpendicular [a la horizontal, llegando] al pie de la torre”.

Algo más de un siglo antes, Leonardo Da Vinci ya afirmaba que “la piedra arrojada desde una torre no golpea el costado de la torre antes de llegar al piso” [4], o sea, desde el punto de vista de un terrícola el movimiento es vertical y rectilíneo. Sin embargo, en la época de Newton, medio siglo después de Galileo y un siglo y medio después de Leonardo, todavía no se aceptaba completamente la idea de la rotación terrestre. A fines de 1679 Newton le escribe a Hooke, sugiriéndole utilizar el experimento de caída libre para demostrar la rotación terrestre, basado en el siguiente razonamiento [5]: La punta de la torre desde donde se inicia la caída libre está un poquito más alejada del eje de la

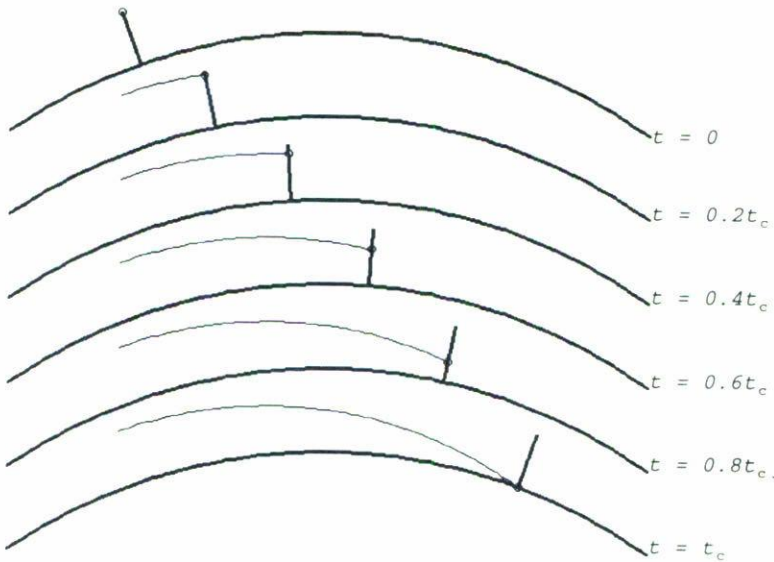


FIGURA 3. Segunda parte del contrargumento de Galileo: De igual forma la piedra sigue a la Tierra y aterriza en la base de la torre. Con el experimento de caída libre no se puede discernir, de acuerdo a Galileo, si la Tierra gira o no.

Tierra que la base de la misma, por lo que se mueve un poquito más rápido que ésta con respecto al espacio absoluto. Concretamente, en el instante en que se suelta a la piedra, la piedra tiene una velocidad de  $\Omega(R + h) \cos \vartheta$ , respecto del espacio absoluto, mientras que la base se mueve con una velocidad de  $\Omega R \cos \vartheta$ . Como en la caída libre la componente horizontal de la velocidad no cambia (de acuerdo al razonamiento de Newton), el exceso de velocidad  $\Omega h \cos \vartheta$  redundará en que la piedra se adelante a la torre aterrizando con una deflexión neta hacia el oriente de  $\Delta x = \Omega h \cos \vartheta t_c$ , o sea

$$\Delta x = \Omega \cos \vartheta \sqrt{\frac{2h^3}{g}}, \tag{1.4}$$

respecto del punto ubicado justo por debajo del lugar de lanzamiento (este punto puede ser determinado con el auxilio de una plomada). Esta deflexión predicha por Newton es muy pequeña, porque así lo son tanto el tiempo de caída como el exceso de velocidad  $\Omega h \cos \vartheta$ . Por ejemplo, para la Torre de Pisa [6] esta cantidad es igual a tres milímetros por segundo (unos escasos diez metros por hora o aproximadamente el doble de la velocidad de crucero de un caracol).

El 6 de enero de 1680 Hooke le escribe a Newton diciéndole que ha logrado hacer exitosamente el experimento, mediante una caída de 9 metros dentro de una catedral. Concretamente, en tres caídas diferentes Hooke dice haber observado una deflexión de unos 8 mm hacia el oriente y una desviación *aún mayor hacia el sur* [5]. Sin embargo, para esa altura y en esa latitud de deflexión debe ser mucho menor (del orden de un tercio de milímetro), por lo que el resultado de Hooke es probablemente un error experimental; además, y más importante, el razonamiento de Newton es *incorrecto*, como también lo es la fórmula (1.4).

## 2. LAPLACE Y LA FÓRMULA CORRECTA DE LAS DESVIACIONES

Al principio del siglo pasado la realidad de la rotación terrestre ya era generalmente aceptada y aparentemente varios investigadores habían realizado el experimento de caída libre u opinado sobre la predicción teórica de la deflexión hacia el oriente y sobre si debía haber o no una desviación adicional hacia el ecuador (como había predicho y supuestamente verificado Hooke). En 1803 Laplace [7] publica la teoría correcta de la caída libre (que inmediatamente veremos) utilizando lo que luego se conocería por fuerza “de Coriolis”. Laplace había descubierto esa fuerza un cuarto de siglo antes, al formular la teoría correcta de las mareas [8]. El trabajo de Gustave Coriolis [9] fue publicado 57 y 32 años más tarde que los de Laplace, por lo que es injusto que los efectos de la rotación terrestre sean conocidos por el nombre de aquél y no por el de Laplace.

Por otra parte, la forma en que Laplace deriva las fórmulas de movimiento en un sistema de rotación y cómo toma en cuenta la deformación de la Tierra respecto de una esfera perfecta, son muy didácticas, por lo que merecen ser destacadas. Lo que hace Laplace es conceptualmente muy sencillo: escribe el principio de trabajos virtuales en coordenadas cartesianas fijas al espacio absoluto  $(X, Y, Z)$ , pero a su vez relaciona éstas con coordenadas esféricas fijas a la Tierra  $(\lambda, \vartheta, r)$  en la forma

$$\begin{aligned} X &= r \cos \vartheta \cos(\lambda + \Omega t), \\ Y &= r \cos \vartheta \operatorname{sen}(\lambda + \Omega t), \\ Z &= r \operatorname{sen} \vartheta. \end{aligned} \tag{2.1}$$

El eje  $Z$  está en la dirección del eje terrestre (no considero aquí el movimiento de traslación de la Tierra) y los ejes  $(X, Y)$  están en el plano ecuatorial, pero fijos al espacio absoluto. Por otra parte, la coordenada  $r$  es igual a la distancia del objeto al centro de la Tierra,  $\vartheta$  es la “latitud geocéntrica” (que no es exactamente la verdadera latitud, como veremos más adelante) y  $\lambda$  es la longitud con respecto a un meridiano que rota con el planeta (*v.gr.*, el de Greenwich); coordenadas esféricas fijas al espacio absoluto son en cambio  $(\lambda + \Omega t, \vartheta, r)$ .

Laplace hace dos cosas que, por simplicidad, no haré aquí: en primer lugar, incluye el efecto de fricción con el aire (mediante una fuerza  $\mathbf{F}_{\text{fr}}$  que es proporcional al cuadrado de la rapidez y no a su primera potencia como en el Problema 1). En segundo lugar, considera una forma más general de la forma de la Tierra,  $r = R(\lambda, \vartheta)$ , que la de un esferoide de revolución,  $r = R(\vartheta)$ , que es la que usaremos aquí (o sea, en este artículo el eje de rotación es también uno de simetría).

Laplace trabaja con lo que ahora se conoce como principio de “trabajos virtuales” (o de D’Alembert-Lagrange),  $\delta \mathbf{X} \cdot (\ddot{\mathbf{X}} - \mathbf{F}_{\text{fr}}) + \delta V = 0$ , donde  $V$  es el potencial de atracción gravitatoria (nótese que estoy trabajando con cantidades “por unidad de masa”). Yo prefiero utilizar el lagrangiano  $L = T - V$ , donde  $T (= \dot{\mathbf{X}}^2/2)$  es la energía cinética, y derivar las ecuaciones de Euler-Lagrange [10]. Ambos métodos son equivalentes y pueden ser escritos en *cualquier* sistema de coordenadas [11]. La astucia de Laplace consiste en obtener las ecuaciones de movimiento en las coordenadas fijas a la Tierra  $(\lambda, \vartheta, r)$  utilizando formalmente el principio de trabajos virtuales en el sistema inercial  $(X, Y, Z)$ .

Calculando  $T = \dot{\mathbf{X}}^2/2$  de (2.1) y suponiendo que la atracción terrestre es independiente de la longitud, se obtiene facilmente

$$L = \frac{1}{2}(r^2 \cos^2 \vartheta (\dot{\lambda} + \Omega)^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + \dot{r}^2) - V(\vartheta, r). \tag{2.2}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange [11] correspondientes a este lagrangiano pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 + \sigma_2 u_3 - \sigma_3 u_2 &= f_3 u_2 - f_2 u_3, \\ \dot{u}_2 + \sigma_3 u_1 - \sigma_1 u_3 &= f_1 u_3 - f_3 u_1 - r\Omega^2 \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta}, \\ \dot{u}_3 + \sigma_1 u_2 - \sigma_2 u_1 &= f_2 u_1 - f_1 u_2 + r\Omega^2 \cos^2 \vartheta - \frac{\partial V}{\partial r}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

Aceleración
Coriolis
Centrífuga
Gravitatoria

donde

$$\begin{aligned} (u_1, u_2, u_3) &:= (r \cos \vartheta \dot{\lambda}, r \dot{\vartheta}, \dot{r}), \\ (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &:= (-u_2/r, u_1/r, u_1 \tan \vartheta/r), \\ (f_1, f_2, f_3) &:= (0, 2\Omega \cos \vartheta, 2\Omega \operatorname{sen} \vartheta). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Las  $u_j$  son las tres componentes del vector velocidad  $\mathbf{u}$  (medido desde la Tierra) correspondientes a las coordenadas ortogonales  $(\lambda, \vartheta, r)$ , los  $\sigma_j$  son coeficientes geométricos cuyo significado será explicado inmediatamente, y las  $f_j$  son las componentes del doble del vector de rotación  $\mathbf{f}$ . Nótese que las componentes de la aceleración, en el lado izquierdo, se escriben utilizando las derivadas temporales  $\dot{u}_j$  y unos términos geométricos, los cuales aparecen debido a que las coordenadas  $(\lambda, \vartheta, r)$  no son rectilíneas. Por ejemplo, un movimiento rectilíneo y uniforme *no* corresponde a  $(\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3) = (0, 0, 0)$  y, efectivamente, para movimiento libre en un sistema inercial,  $\Omega = 0$  y  $\nabla V = 0$ , el sistema (2.3) muestra que  $(u_1, u_2, u_3)$  deben variar con  $t$ . El primer término del lado derecho es la fuerza de Coriolis, igual al producto vectorial  $\mathbf{u} \times \mathbf{f}$ , el siguiente es la fuerza centrífuga y el último la atracción gravitatoria de la Tierra (la única fuerza real en este caso; las dos primeras existen por estar trabajando en un sistema en rotación y desaparecen al hacer  $\Omega = 0$ ). Nótese que estas fuerzas salen “automáticamente” del lagrangiano, sin necesidad de utilizar el difícil concepto de “derivada temporal absoluta de un vector medio en un sistema en rotación”, de hecho, sin siquiera necesitar el concepto de velocidad angular.

Las ecuaciones del sistema (2.3) son algo complicadas, pero por el momento se pueden simplificar considerando coordenadas cartesianas apropiadas para puntos cercanos a uno en la superficie de la Tierra. Si este origen corresponde a  $\lambda = \lambda_0, \vartheta = \vartheta_0$ , y  $r = r(\vartheta_0)$  ( $=: R_0$ ), estas coordenadas están dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &:= R_0 \cos \vartheta_0 (\lambda - \lambda_0), \\ x_2 &:= R_0 (\vartheta - \vartheta_0), \\ x_3 &:= r - R_0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

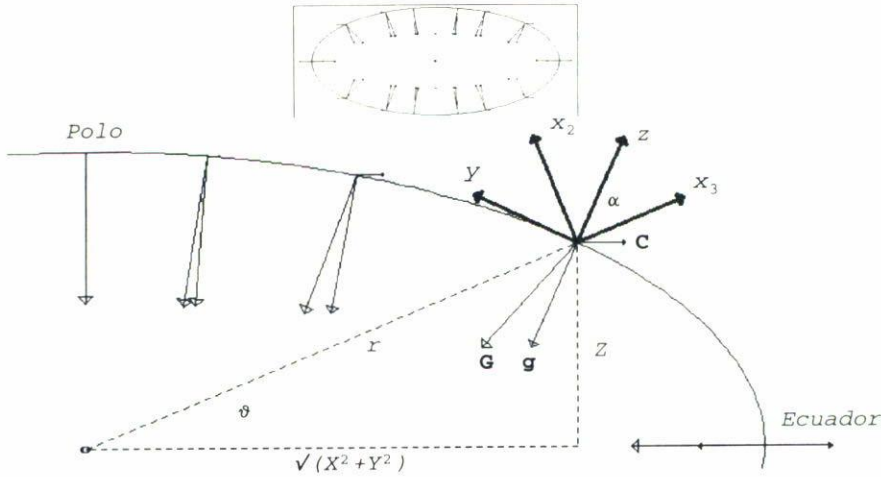


FIGURA 4A. Sistemas de coordenadas y fuerzas en un esferoide de revolución. El peso  $g$  es la suma vectorial de la atracción gravitatoria  $G$  y la fuerza centrífuga  $C$ . A su vez,  $g$  actúa en la dirección de la vertical local, la que forma un ángulo  $[\vartheta + \alpha(\vartheta)]$  con el plano ecuatorial. Las flechas gruesas indican los dos sistemas de coordenadas cartesianas utilizados en la proximidad de un punto de la superficie.

Reemplazando en el lagrangiano (2.2) y conservando hasta términos de segundo orden en  $x$  y  $\dot{x}$  se obtiene las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_1 &= f_3 \dot{x}_2 - f_2 \dot{x}_3, \\
 \ddot{x}_2 &= -f_3 \dot{x}_1 + C_2 + G_2, \\
 \ddot{x}_3 &= f_2 \dot{x}_1 + C_3 + G_3,
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Aceleración
Coriolis
Centrífuga
Gravitatoria

donde  $f$ ,  $C$  y  $G$  son campos uniformes, es decir, los de (2.3) evaluados en  $[\lambda, \vartheta, r] = [\lambda_0, \vartheta_0, R_0]$ .

Nótese que debido a que  $R'(\vartheta) \neq 0$ , aunque la dirección del eje  $x_1$  es horizontal y hacia el oriente, la del eje  $x_2$  no es exactamente horizontal hacia el norte ni tampoco la del eje  $x_3$  es exactamente hacia arriba. De hecho, los ejes  $x_2$  y  $x_3$  forman un ángulo  $\alpha(\vartheta_0)$  con la horizontal y vertical, respectivamente, como se muestra en la Fig. 4. (Esta gráfica corresponde a un elipsoide de MacLaurin [13] cercano al de máxima rotación). Para calcular  $\alpha(\vartheta)$  consideremos un desplazamiento infinitesimal hacia el norte sobre la horizontal, es decir, a lo largo de  $r = R(\vartheta)$ :  $d\mathbf{r} = r d\vartheta \hat{\mathbf{x}}_2 + dr \hat{\mathbf{x}}_3 \equiv R(\vartheta) d\vartheta \hat{\mathbf{x}}_2 + R'(\vartheta) d\vartheta \hat{\mathbf{x}}_3$ , donde  $\hat{\mathbf{x}}_2$  y  $\hat{\mathbf{x}}_3$  son vectores unitarios. En la Fig. 4 se ve fácilmente que  $d\mathbf{r} = |d\mathbf{r}| \cos \alpha \hat{\mathbf{x}}_2 - |d\mathbf{r}| \sin \alpha \hat{\mathbf{x}}_3$ , por lo que igualando componentes es

$$\tan \alpha = -\frac{R'(\vartheta)}{R(\vartheta)}. \tag{2.7}$$

La verdadera latitud, por ejemplo la medida por un navegante, está definida por el ángulo que forma la vertical con el plano ecuatorial y por lo tanto es igual a  $\vartheta + \alpha(\vartheta)$

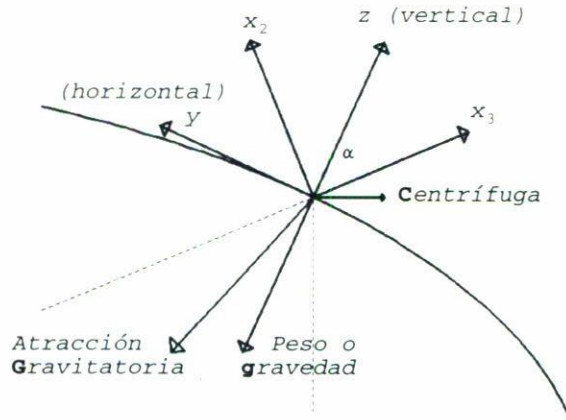


FIGURA 4B. Detalle. Nótese que en la dirección de  $\nabla\vartheta$  (la del eje  $x_2$ ) tanto  $\mathbf{C}$  como  $\mathbf{G}$  tiene una componente hacia el ecuador, mientras que en la dirección horizontal (la del eje  $y$ ) la componente de  $\mathbf{G}$  es hacia el polo. En la dirección horizontal,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{G}$  están en equilibrio, por definición. La deformación del planeta, respecto de una esfera perfecta, se manifiesta en el ángulo  $\alpha$  entre las direcciones vertical y radial y en el hecho que la atracción gravitatoria  $\mathbf{G}$  no sea exactamente radial. Las fuerzas mostradas en ambas partes de esta figura corresponden a un esferoide de McLaurin con  $\epsilon \approx 1/3$ .

y no  $\vartheta$ . Ésta una definición *geométrica* de vertical y horizontal; se necesita también una definición *estática* de estas direcciones para poder entender mejor al sistema (2.6). Para eso, consideramos el caso de un objeto en reposo *con respecto a la Tierra*, es decir, girando con velocidad angular  $\Omega$  con respecto al espacio absoluto. La fuerza de Coriolis que experimenta ese cuerpo es nula (ya que su velocidad relativa a la Tierra es igual a cero), por lo que el objeto sólo está sujeto a las fuerzas centrífuga  $\mathbf{C}$  y de atracción  $\mathbf{G}$ , más alguna otra fuerza (vertical) que lo mantenga quieto. Por ejemplo, en el caso de una plomada, la tensión del hilo contrarresta a  $(\mathbf{C} + \mathbf{G})$  y por lo tanto la dirección vertical es la de  $-(\mathbf{C} + \mathbf{G})$  (véase Fig. 4). Otro ejemplo (que lleva al mismo resultado) es el de un cuerpo apoyado en una superficie horizontal y sin fricción: para que la reacción normal de la superficie pueda contrarrestar a  $(\mathbf{C} + \mathbf{G})$  es necesario que éste sea perpendicular a la horizontal.

La suma (vectorial) de las fuerzas centrífuga y gravitatoria es lo que llamamos el “peso específico” o gravedad  $\mathbf{g} := \mathbf{C} + \mathbf{G}$ ; de ambos ejemplos deducimos que

$$\begin{aligned}
 -r\Omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} &= -g \sin \alpha = \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2, \\
 r\Omega^2 \cos^2 \vartheta - \frac{\partial V}{\partial r} &= -g \cos \alpha = \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

en  $r = R(\vartheta)$ , donde  $g(\vartheta) = |\mathbf{g}|$ . Nótese que el campo de gravedad es también derivable de un escalar, el llamado “geopotencial”,  $\mathbf{g} = -\nabla(V - r^2\Omega^2 \cos^2 \vartheta/2)$ .

Laplace [7] utilizó las coordenadas del sistema (2.6) y su relación con la forma de la Tierra, dada por (2.7) y (2.8), para derivar el valor correcto de los desplazamientos



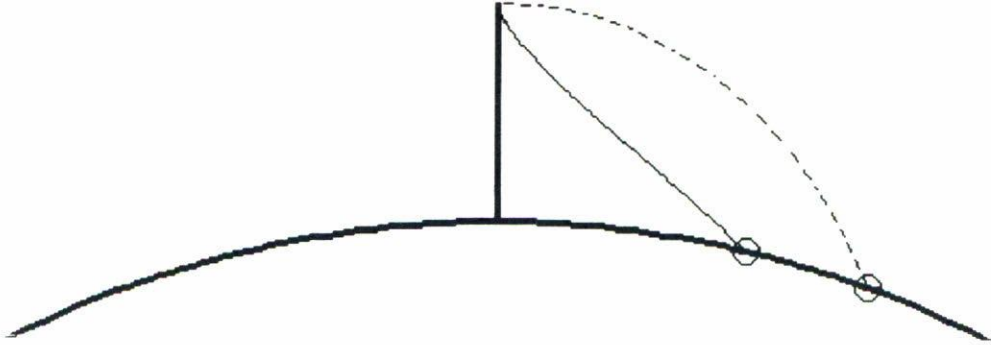


FIGURA 5. Desviación en caída libre hacia el oriente (derecha de la figura) vista por un observador fijo a la Tierra. Línea cortada: predicción (incorrecta) de Newton. Línea llena: predicción correcta de Laplace. Nótese que la separación entre el objeto y la torre aumenta como el cuadrado del tiempo y no es proporcional a éste, como implica el razonamiento de Newton.

horizontales que se producen en una caída libre, en la forma siguiente. Las condiciones iniciales son  $(x_1, x_2, x_3) = (0, h \operatorname{sen} \alpha, h \operatorname{cos} \alpha)$  y  $\dot{\mathbf{x}} = 0$ . En cuanto a las ecuaciones de movimiento, Laplace agrega al lado derecho del sistema (2.6) un término de fricción con el aire,  $-K|\dot{x}_3|\dot{\mathbf{x}}$ , que es una muy buena aproximación de  $-K|\dot{\mathbf{x}}|\dot{\mathbf{x}}$ , ya que el movimiento es prácticamente vertical:  $|\dot{x}_3| \gg |\dot{x}_1|, |\dot{x}_2|$ . Luego desprecia el término  $f_2\dot{x}_1$  en la tercera ecuación y los proporcionales a  $f_3$  y en las dos primeras ecuaciones. De esta forma obtiene para el movimiento en la dirección radial la ecuación  $\ddot{x}_3 = -K|\dot{x}_3|\dot{x}_3 - g \operatorname{cos} \alpha$  (donde  $g$  y  $\alpha$  son considerados constantes), la que resuelve en forma analítica. Para la primera coordenada obtiene  $\ddot{x}_1 = -K|\dot{x}_3|\dot{x}_1 - f_2\dot{x}_3$ , ecuación que también logra resolver conociendo  $\dot{x}_3(t)$ , encontrando de esa forma una expresión para  $\Delta x = x_1(t_c) - x_1(0)$ , que en el caso sin fricción ( $K = 0$ ) se reduce a

$$\Delta x = \frac{2\Omega \operatorname{cos} \vartheta}{3} \sqrt{\frac{2h^3}{g}}. \tag{2.9}$$

Por ejemplo, para  $h = 100$  m y  $\vartheta = \pm 45^\circ$  es  $\Delta x = 1.5$  cm. Nótese que esta fórmula corresponde a  $2/3$  de la predicción (1.4) de Newton, la que es en realidad incorrecta (véase Fig. 5); más adelante voy a explicar porqué.

Finalmente, con la relación (2.8) la ecuación para la segunda coordenada toma la forma  $\ddot{x}_2 = -K|\dot{x}_3|x_2 - g \operatorname{sen} \alpha$ : ya que Laplace había resuelto  $\ddot{x}_3 = -K|\dot{x}_3|\dot{x}_3 - g \operatorname{cos} \alpha$ , deduce rápidamente  $\Delta x_2 = \Delta x_3 \tan \alpha$ , o sea

$$\Delta x_2 = -h \operatorname{sen} \alpha. \tag{2.10}$$

Este número es bastante grande; por ejemplo, para  $h = 100$  m y  $\vartheta = \pm 45^\circ$  es  $\Delta x_2 = \mp 34$  cm. Sin embargo, este valor no implica un desplazamiento hacia el ecuador, pues la coordenada  $x_2$  no es exactamente horizontal (véase Fig. 4). De hecho, la coordenada horizontal hacia el norte está dada por  $y := \operatorname{cos} \alpha x_2 - \operatorname{sen} \alpha x_3$ , por lo que del resultado  $\Delta x_2 = \tan \alpha \Delta x_3$  Laplace deduce en realidad

$$\Delta y = 0, \tag{2.11}$$

en contra de todos los que habían predicho y/o creían haber observado un desplazamiento hacia el ecuador similar a  $\Delta x$ .

Para referencia futura, voy a dejar sentada la solución de Laplace para el movimiento en el plano vertical/meridional, para el caso sin fricción ( $K = 0$ ):

$$r(t) \approx R_0 + h \cos \alpha - \frac{g \cos \alpha t^2}{2} \tag{2.12}$$

y

$$\vartheta(t) \approx \vartheta_0 + \frac{h \operatorname{sen} \alpha}{R_0} - \frac{g \operatorname{sen} \alpha t^2}{2R_0}. \tag{2.13}$$

Nótese que la latitud geocéntrica inicial,  $\vartheta(0)$ , no es igual a la de la base de la torre,  $\vartheta_0$ , sino que hay una pequeña corrección hacia el polo más cercano,  $\operatorname{sen} \alpha h/R_0$ , debido a que las direcciones vertical y radial no coinciden exactamente (véase Fig. 4). Pequeña pero importante, ya que es la responsable de la diferencia entre (2.10) y (2.11).

### 3. CAMBIO A LAS COORDENADAS DEL “LABORATORIO”

El valor grande de  $\Delta x_2$  en (2.10) es sólo el reflejo de usar las coordenadas cartesianas  $(x_1, x_2, x_3)$  ligadas a las esféricas por (2.5). Sin embargo ese sistema no es el más natural cerca de un punto de la superficie terrestre: es claramente más didáctico trabajar con las direcciones horizontales y vertical como coordenadas. Realizando la rotación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_0 & -\operatorname{sen} \alpha_0 \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha_0 & \cos \alpha_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

con  $\alpha_0 = \alpha(\vartheta_0)$ , el eje  $x$  es horizontal y hacia el oriente, el eje  $y$  es horizontal y hacia el norte, y el eje  $z$  es vertical hacia arriba. Efectuando la misma rotación en las ecuaciones de movimiento (2.6) se obtiene

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= f\dot{y} - \tilde{f}\dot{z}, \\ \ddot{y} &= -f\dot{x}, \\ \ddot{z} &= \tilde{f}\dot{x} - g, \end{aligned} \tag{3.2}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}$   
 Aceleración      Coriolis      Gravedad

donde

$$\begin{aligned} f &:= 2\Omega \operatorname{sen}(\vartheta_0 + \alpha_0), \\ \tilde{f} &:= 2\Omega \cos(\vartheta_0 + \alpha_0), \end{aligned} \tag{3.3}$$

son las componentes vertical y horizontal hacia el norte del doble de la velocidad angular terrestre.

El sistema (3.2) —o el (2.6)— tiene una solución exacta (véanse Problemas 3 y 4); sin embargo, es más ilustrativo resolver el problema de caída libre en forma iterativa, en potencias de  $\Omega$ , ya que  $\Omega t_c$  es pequeño. Además, se puede despreciar a  $\alpha_0$  en las definiciones (3.3) de  $f$  y  $\tilde{f}$ , pues es  $\alpha_0 = 0(\Omega^2)$ , como se demostrará más adelante. Pasemos ahora a resolver (3.2), con la condición inicial de velocidad nula, con respecto a la Tierra, y  $(x, y, z) = (0, 0, h)$ .

En primer lugar, en la tercera ecuación en (3.2) se puede despreciar el término  $\tilde{f}\dot{x}$ , ya que es  $O(\Omega^2)$ . De esta forma tenemos  $\ddot{z} = -g$  cuya solución, que ya utilizamos, es  $z = h - gt^2/2$ ; este resultado da el tiempo de caída (1.1). Luego, despreciando  $f\dot{y}$  en la primera ecuación de (3.2), tenemos  $\ddot{x} = -\tilde{f}z$ , cuya solución es  $x = \tilde{f}gt^2/3!$ , ecuación que predice un desplazamiento neto hacia el oriente de  $\tilde{f}gt_c^3/3!$ , que es precisamente el resultado (2.9) de Laplace. Por último, de la segunda ecuación en (3.2),  $\ddot{y} = -f\dot{x} = -f\tilde{f}gt^2/2!$ , integrando dos veces resulta  $y = -f\tilde{f}gt^4/4!$ , lo que representa un minúsculo desplazamiento hacia el ecuador igual a  $\Delta y = -f\tilde{f}gt_c^4/4!$ , es decir

$$\Delta y = -\frac{2}{3} \text{sen } \vartheta \cos \vartheta \frac{\Omega^2 h^2}{g}, \tag{3.4}$$

en vez de (2.11). Este valor es en realidad muy pequeño; por ejemplo, para  $h = 100$  m y  $\vartheta = \pm 45^\circ$  es ¡ $\Delta y = \mp 2 \mu\text{m}$ ! (existen bacterias mucho más grandes que esta distancia).

Este valor fue obtenido suponiendo un campo  $\mathbf{g}$  uniforme en el sistema (3.2) y no es la única contribución dominante al desvío meridional: hay otra parte, igualmente minúscula, debida a que las direcciones vertical y radial no coinciden exactamente. La latitud geocéntrica a lo largo de la torre ( $x = y = 0, 0 \leq z \leq h$ ) varía como —véanse Fig. 4 y Ecs. (2.12)–(2.13)—

$$\vartheta(z) = \vartheta_0 + \text{sen } \alpha z/R + O(z/R)^2; \tag{3.5}$$

por ejemplo para la punta de la torre ( $z = h$ ), esta expresión da el valor de  $\vartheta(0)$  de (2.13). La orientación de la gravedad  $g$  es la del eje  $z$  en la base de la torre, por construcción. Sin embargo, *si la torre es exactamente recta*,  $\mathbf{g}$  tendrá una pequeña componente hacia el ecuador para  $z > 0$ ; esta componente es igual a  $-g \text{sen}[\vartheta(z) - \vartheta_0]\hat{\mathbf{y}} \approx -g \text{sen } \alpha(z/R)\hat{\mathbf{y}}$  por lo que la ecuación meridional horizontal (3.2b) debe ser modificada a

$$\ddot{y} = -f\dot{x} - g \text{sen } \alpha z/R. \tag{3.6}$$

Finalmente, utilizando  $z = h - gt^2/2$  y  $\dot{x} = -\tilde{f}z$  e integrando hasta  $t = t_c$  resulta

$$\Delta y = -\frac{2}{3} \text{sen } \vartheta \cos \vartheta \frac{\Omega^2 h^2}{g} - \frac{5}{6} \text{sen } \alpha \frac{h^2}{R}. \tag{3.7}$$

Ambas contribuciones son  $O(\Omega^2)$  y minúsculas, por lo que no se debe ver a este resultado como una corrección importante sino más bien como una confirmación de la fórmula (2.11) de Laplace.

4. LA FORMA DE LA TIERRA

Un resultado interesante es que para obtener los desplazamientos horizontales (2.9) y (2.11), *no se necesita conocer el valor de  $\alpha$* ; sólo usamos el hecho de que es  $O(\Omega^2)$ . Sin embargo, las relaciones (2.9) y (2.11) son válidas aun para un valor grande de  $\alpha$ , el de un esferoide muy deformado, como el de la Fig. 4, siempre y cuando se utilice la verdadera latitud  $\vartheta + \alpha$ , como en las definiciones de (3.3), y no la “latitud geocéntrica”  $\vartheta$ . De todos modos, sea  $\alpha$  pequeño o no, la transformación (3.1) es fundamental para llegar al sistema (3.2), donde no hay fuerza de gravedad en las direcciones horizontales.

Aunque la forma de la Tierra [12] difiere muy poco de la de una esfera, esa deformación es fundamental para compensar la fuerza centrífuga en una superficie horizontal. Por otra parte, la deformación hace que el campo gravitatorio no sea exactamente central, es decir,  $r^{-1}\partial V/\partial\vartheta$  en (2.8) no es nulo sino, como veremos, similar en magnitud a la componente  $\vartheta$  de la fuerza centrífuga  $r\Omega^2 \text{sen } \vartheta \text{cos } \vartheta$ .

En primer lugar vamos a calcular el campo gravitatorio  $\mathbf{G} = -\nabla V$  de un planeta homogéneo con la forma de un elipsoide de revolución de elipticidad  $e$  muy pequeña, la que luego vamos a relacionar con la velocidad de rotación  $\Omega$ , de manera que la gravedad  $\mathbf{g} = -\nabla(V - r^2\Omega^2 \text{cos}^2 \vartheta/2)$  sea vertical en todo punto de la superficie (véase Fig. 4). Esta relación fue correctamente calculada por primera vez por Newton [13] integrando explícitamente la fuerza de un elipsoide de revolución. Aquí emplearemos un método más sencillo, basado en el hecho de que el potencial gravitatorio de un cuerpo homogéneo es tal que su laplaciano es cero fuera del cuerpo e igual a una constante no nula dentro de él.

La elipticidad se define por  $e := 1 - R_p/R_e$ , donde  $R_p$  y  $R_e$  son los radios (distancia al centro del planeta) polar y ecuatorial [14]. Para un elipsoide de revolución es

$$R(\vartheta) \sim R_*[1 + eP(\vartheta)], \tag{4.1}$$

donde  $P(\vartheta) = \text{cos}^2 \vartheta - \frac{2}{3}$ ,  $R_*$  es el radio de un planeta esférico de igual volumen, y el símbolo  $\sim$  indica que la expresión es válida a  $O(e^2)$ . De la relación geométrica (2.7) obtenemos el ángulo entre la vertical y la dirección hacia el centro del planeta como

$$\alpha(\vartheta) \sim 2e \text{sen } \vartheta \text{cos } \vartheta. \tag{4.2}$$

En el Problema 5 se muestra que el potencial gravitatorio de este elipsoide puede ser escrito en la forma

$$V(r, \vartheta) \sim \begin{cases} \frac{g_* r^2}{2R_*} [1 - \kappa_i e P(\vartheta)] + \text{cte.}, & r < R(\vartheta), \\ -\frac{g_* R_*^2}{r} [1 + \kappa_e e P(\vartheta)(R_*/r)^2], & r > R(\vartheta), \end{cases} \tag{4.3}$$

donde  $g_*$  es el peso específico que tendría en su superficie,  $r = R_*$ , el planeta sin deformar [15]. Los coeficientes  $\kappa_i$  y  $\kappa_e$  son determinados exigiendo que el gradiente de  $V$  sea

continuo en la superficie. Concretamente, en  $r = R(\vartheta)$  es

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r} &\sim g_*[1 + (1 - \kappa_i)eP(\vartheta)] \sim g_*[1 + (3\kappa_e - 2)eP(\vartheta)], \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} &\sim g_*\kappa_i e \sin \vartheta \cos \vartheta \sim 2g_*\kappa_e e \sin \vartheta \cos \vartheta, \end{aligned} \tag{4.4}$$

de donde resulta fácilmente  $\kappa_i = 6/5$  y  $\kappa_e = 3/5$ .

La importancia de la rotación es medida por el coeficiente

$$\epsilon := \frac{R_*\Omega^2}{g_*}. \tag{4.5}$$

El paso siguiente es encontrar el valor de  $\epsilon$  asociado a la elipticidad  $e$ , o sea, tal que se satisfagan (2.7) y (2.8), o sea la relación de  $\alpha(\vartheta)$  con la forma de la Tierra y con la dirección de la gravedad  $g$ . Hay dos formas de ver la correspondencia entre  $\epsilon$  y  $e$ . Podemos pensar que el planeta es líquido y nos preguntamos cuál es la rotación  $\Omega$  capaz de producir la elipticidad  $e$ . También podemos pensar que el planeta es sólido pero sin fricción, y nos preguntamos cuál es la elipticidad  $e$  que produce una fuerza hacia los polos tal que un cuerpo pueda rotar con velocidad angular  $\Omega$ , es decir, tal que se vea quieto en el sistema no-inercial de un terrícola. Para hallar la respuesta reemplazamos la expresión (4.4) de la fuerza gravitatoria en la (2.8); usando  $\kappa_e = 3/5$  se obtiene

$$\begin{aligned} -r\Omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - \frac{6}{5}eg_* \sin \vartheta \cos \vartheta &= -g \sin \alpha, \\ r\Omega^2 \cos^2 \vartheta - g_*[1 - \frac{1}{5}ep(\vartheta)] &= -g \cos \alpha, \end{aligned} \tag{4.6}$$

En esta ecuación el ángulo  $\alpha$  debe ser tal que la componente horizontal del peso es nula,  $\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{y}} \equiv 0$ . Reemplazando el valor (4.2) de  $\alpha$ , debido a la elipticidad terrestre, en la primera ecuación, se obtiene el resultado de Newton

$$e = \frac{5}{4}\epsilon. \tag{4.7}$$

Otra forma equivalente de encontrar esta relación es exigiendo que el geopotencial  $V - r^2\Omega^2 \cos^2 \vartheta/2$  sea constante en  $r = R(\vartheta)$ .

Usando estos resultados en la primera de las ecuaciones (4.6) se ve que la componente  $\vartheta$  de la fuerza gravitatoria,  $-r^{-1}\partial V/\partial \vartheta$ , es 3/2 veces mayor que la correspondiente componente de la fuerza centrífuga,  $-r\Omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta$ ; el cambio del campo gravitatorio debido a la deformación del planeta es muy importante (véase Fig. 4b). En cuanto a las componentes radiales, usando  $\cos \alpha \sim 1$  y (4.7) en la segunda de las Ecs. (4.6), se encuentra que la gravedad en un punto cualquiera de la superficie del planeta está dada por

$$g(\vartheta) \sim \underbrace{g_*(1 + \epsilon/6) - g_*(\epsilon/4) \cos^2 \vartheta}_{\text{Gravitación}} - \underbrace{g_*\epsilon \cos^2 \vartheta}_{\text{Centrífuga}}. \tag{4.8}$$

Por lo tanto, en lo que se refiere a las *variaciones* del peso con la latitud, la fuerza centrífuga es cuatro veces más importante que la parte de la gravitatoria debida a la deformación del planeta. Esta ecuación es consistente con la obtenida por Laplace [8] en 1778:

$$g(\vartheta) = g_e(1 + \frac{5}{4}\epsilon \sin^2 \vartheta), \tag{4.9}$$

donde  $g_e$  es el peso específico en el ecuador, sólo que la deducción de Laplace es más general, ya que no supone un planeta simétrico, es decir, utiliza  $r = R(\lambda, \vartheta)$  en vez de la aproximación  $r = R(\vartheta)$  usada aquí.

En su libro sobre la fuerza de Coriolis, Stommel y Moore [16] presentan el cálculo de la deformación de la Tierra debido a Huygens [17], en el cual se comete el error de suponer  $\partial V/\partial \vartheta = 0$  a la hora de calcular y se obtiene un ángulo  $\alpha(\vartheta)$  que es 2/5 del correcto. Sin embargo, Stommel y Moore llegan de todos modos al resultado correcto de las desviaciones horizontales, Ecs. (2.9) y (2.11), ya que sólo se necesita saber que  $\alpha = O(\Omega^2)$  para obtenerlos.

Para la Tierra [18] es  $R_e \approx 6378.2$  km y  $R_p \approx 6356.8$  km, por lo que  $e \approx 1/298$  y  $R_* = \sqrt[3]{R_e^2 R_p} \approx 6371.1$  km. Por otra parte, con  $g_* \approx 9.82$  m/s<sup>2</sup> es  $\epsilon \approx 1/290$  que con (4.7) predice una elipticidad de  $5\epsilon/4 \approx 1/232$ , que es un 28% mayor que la observada. Esta discrepancia es atribuida a la distribución inhomogénea de masa (véase Problema 6), y constituía una preocupación en la época de Laplace, cuando se quería establecer un sistema de pesas y medidas lo más “universal” posible. De (4.2) se ve que el valor máximo de  $|\alpha|$  es igual a  $e$  (y ocurre en  $\vartheta = \pm 45^\circ$ ). Para la elipticidad de la Tierra este ángulo es de tan sólo 11.5 minutos de arco; es por eso que, desde un punto de vista práctico, se puede trabajar en una geometría esférica  $(\lambda, \vartheta, r)$  *ignorando* al mismo tiempo la componente  $\vartheta$  de  $\mathbf{g}$ . Desde el punto de vista conceptual, sin embargo, la diferencia entre los dos sistemas de coordenadas relacionados por (3.1) es fundamental.

Con los resultados de esta sección podemos evaluar la importancia relativa de ambas contribuciones al desplazamiento meridional (3.7): de (4.2) es  $\sin \alpha \sim 2e \sin \vartheta \cos \vartheta$ , por lo que, usando la definición (4.5), la razón entre el primer y segundo término en el lado derecho de (3.7) es igual a  $2\epsilon/5e$ . Por ejemplo, para un planeta homogéneo es  $2\epsilon/5e = 8/25$ , en virtud de la relación (4.7) de Newton, es decir la contribución de  $\Delta y$  debida al ángulo entre  $\mathbf{g}$  y la dirección de la torre, Ec. (3.5), es 3.125 veces mayor que la debida a la fuerza de Coriolis en el plano horizontal (segundo *versus* primer término en el lado derecho de (3.6)). Sumando ambos términos en (3.7), para un planeta homogéneo se obtiene

$$\Delta y = -\frac{11}{4} \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\Omega^2 h^2}{g}. \tag{4.10}$$

(Esta fórmula fue verificada analítica y numéricamente.) A pesar del factor  $33/8 = 4.125$  respecto de (3.4) esta desviación sigue siendo muy pequeña (por ejemplo, para  $h = 100$  m y  $\vartheta = \pm 45^\circ$  es  $\Delta y = \pm 7.5 \mu\text{m}$ ), por lo que la predicción (2.11) de Laplace está más que confirmada. Sin embargo, es interesante saber que la predicción obtenida con coordenadas cartesianas en la Sec. 3 no es del todo correcto, pues aun para un desplazamiento tan pequeño la no uniformidad del campo  $\mathbf{g}$  es importante.

## 5. LA EXPLICACIÓN DE UNA OBSERVADORA INERCIAL

Hasta el momento hemos visto cómo fue Laplace, en sus estudios del movimiento de las aguas [8] y los cuerpos en caída libre [7], quien dio la formulación correcta de la mecánica en un planeta en rotación, en términos de coordenadas fijas al planeta. Concretamente, Laplace descubrió la fuerza “de Coriolis” antes de que éste publicara su trabajo [9] y mostró que la fuerza centrífuga aparece sólo en las definiciones de la dirección vertical y de la gravedad efectiva locales. Aunque esta descripción de los fenómenos, en un sistema fijo a la Tierra, es claramente la más sencilla, es justo preguntarse cómo los explica una observadora inercial, fija al espacio absoluto, quien no utiliza ni la fuerza de Coriolis ni la centrífuga, sino sólo la fuerza gravitatoria  $\mathbf{G} = -\nabla V$  para calcular el movimiento.

Para responder esta pregunta, se puede utilizar un sistema de coordenadas esféricas fijas al espacio absoluto, las que son

$$(\lambda', \vartheta', r') = (\lambda + \Omega t, \vartheta, r). \quad (5.1)$$

En adelante suprimiré la prima de  $\vartheta'$  y  $r'$ , ya que en este caso particular los valores de estas coordenadas coinciden con los de  $\vartheta$  y  $r$ . Para obtener el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento hasta hacer  $\Omega = 0$  en las Ecs. (2.2), (2.3) y (2.4), con  $V(\vartheta, r)$  de (4.3). Del hecho que  $V$  no depende de  $\lambda$  se deriva fácilmente la ley de conservación del momento angular en la dirección del eje simetría  $Z$ :

$$M_Z = r^2 \cos^2 \vartheta \dot{\lambda}' = \text{cte.}; \quad (5.2)$$

en función de las variables del sistema no-lineal es  $M_Z = r^2 \cos^2 \vartheta (\dot{\lambda} + \Omega) = r \cos \vartheta (u_1 + r\Omega \cos \vartheta)$ . Nótese que para obtener el teorema (5.2) es necesario para  $\dot{\lambda}' = \sec \vartheta u_1' / r$ ; no se puede aproximar a  $r$  por  $R$ : al hacer el tratamiento del problema desde el punto de vista del sistema inercial la geometría esférica es fundamental.

En el instante en que la piedra es dejada caer, su velocidad angular respecto del sistema inercial es  $\dot{\lambda}' = \Omega$ , ya que ésta es la de todos los puntos fijos al planeta. Luego la longitud  $\lambda'(t)$  puede ser hallada integrando la Ec. (5.2), es decir,

$$\lambda'(t) = \lambda_0 + \Omega \int_0^t \frac{r^2(0) \cos^2 \vartheta(0)}{r^2(s) \cos^2 \vartheta(s)} ds. \quad (5.3)$$

Aunque la variación de  $\dot{\lambda}'$  está determinada por las de  $r$  y  $\vartheta$ , comparando (2.12) con (2.13) se ve fácilmente que la influencia de  $\vartheta(t)$  es un factor de  $O(\alpha) = O(e)$  inferior a la de  $r(t)$ . La explicación de la observadora inercial es entonces muy sencilla: al acercarse a la Tierra,  $r(t) < r(0)$ , el cuerpo en caída libre aumenta su velocidad angular,  $\dot{\lambda}'(t) > \Omega$ , y es por eso que se adelanta a la torre,  $\lambda' > \Omega t$ , la que por estar fija a la Tierra tiene una velocidad angular  $\Omega$  (véase Fig. 6). Cuantitativamente, de (2.12) y (5.3) es

$$\lambda'(t) = \lambda(t) + \Omega t \approx \lambda_0 + \Omega t + \frac{\Omega g_0 t^3}{3R_0}. \quad (5.4)$$

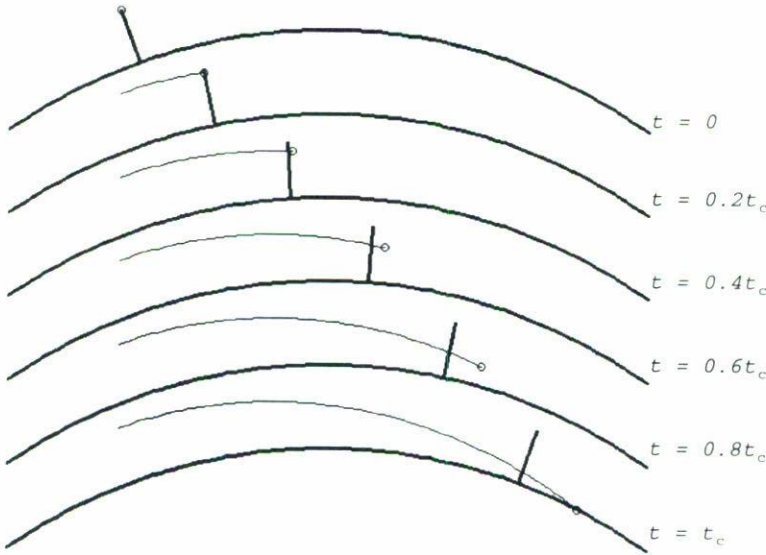


FIGURA 6. Explicación inercial de la desviación hacia el oriente. Conservación del momento angular (*v.gr.*, segunda Ley de Kepler) hace que la velocidad angular absoluta de la piedra aumente al acercarse al centro de la Tierra, y por lo tanto se adelanta a la base, cuya velocidad angular es constante. La desviación es por lo tanto muy pequeña al principio, lo que se aprecia muy bien en la Fig. 5. La predicción (incorrecta) de Newton utilizaba conservación de la velocidad horizontal.

Como la longitud de la torre en el sistema inercial es  $\lambda' = \lambda_0 + \Omega t$ , el valor de  $R_0 \cos \vartheta_0 (\lambda' - \lambda_0 - \Omega t)$  [ $= R_0 \cos \vartheta_0 (\lambda - \lambda_0)$ ] en  $t = t_c$  da la desviación hacia el oriente observada por un terrícola; usando  $t_c$  de (1.1) es fácil ver que se obtiene la fórmula (2.9) de Laplace.

Podría pensarse que la trayectoria de la piedra es un arco de una órbita kepleriana clásica, pero no es así. La explicación de una observadora inercial está basada en la conservación de la componente  $M_Z$  del momento angular en la dirección del eje de rotación (y de simetría). Las otras dos componentes del momento angular ( $M_X, M_Y$ ) no se conservan, ya que la fuerza gravitatoria no es exactamente central  $\partial V / \partial \vartheta \neq 0$ : Si las tres componentes del momento angular se conservaran, la trayectoria estaría contenida en un plano y su proyección sobre la esfera ( $\lambda', \vartheta$ ) sería un arco de círculo máximo, que corresponde a

$$\Delta \vartheta \approx -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \vartheta_0 \cos \vartheta_0 (\Delta \lambda')^2 \tag{5.5}$$

(véase problema 7). Sin embargo, las soluciones (2.13) para  $\vartheta(t)$  y (5.4) para  $\lambda'(t)$  indican

$$\Delta \vartheta = -\frac{e}{\epsilon} \operatorname{sen} \vartheta_0 \cos \vartheta_0 (\Delta \lambda')^2, \tag{5.6}$$

por lo que la no conservación de las componentes  $X$  y  $Y$  del momento angular es relativamente importante. Por ejemplo, para el caso de un planeta homogéneo la observadora observa un valor de  $\Delta \vartheta$  que es igual a 5/2 del que corresponde a círculo máximo (véase



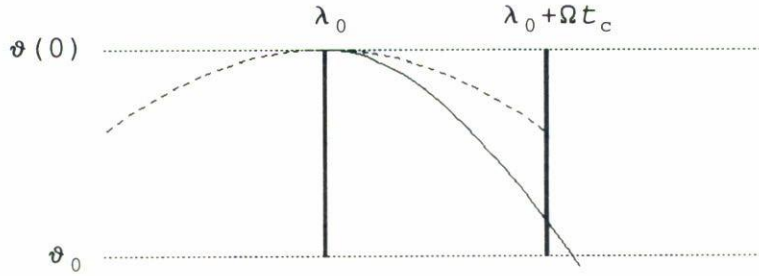


FIGURA 7. Trayectoria de caída libre en las coordenadas de longitud  $\lambda'$  y latitud  $\vartheta$  de una observadora inercial; la proyección de la torre en este plano es indicada con línea gruesa. El punto de vista es en la dirección radial (eje  $x_3$  de la Fig. 4) y no en la dirección de la torre (eje  $z$  en aquella figura). Las líneas de puntos son paralelos de latitud:  $\vartheta_0$  para la base de la torre y  $\vartheta(0)$  para su punta. La línea cortada indica un arco de círculo máximo, que es la trayectoria que tendría el objeto si el campo  $\mathbf{G}$  fuera exactamente radial (en cuyo caso se conservarían las tres componentes del momento angular). Las escalas han sido grandemente distorsionadas por claridad; las distancias típicas son: entre los paralelos  $R_0[\vartheta_0 - \vartheta(0)] = O(\text{dm})$ , desplazamiento zonal  $R_0 \cos \vartheta_0 \Omega t_c = O(\text{km})$ , neta al oriente  $\Delta x = R_0 \cos \vartheta_0 [\lambda'(t_c) - \lambda_0 - \Omega t_c] = O(\text{cm})$ , y desviación neta hacia el ecuador  $\Delta y = R_0[\vartheta(t_c) - \vartheta_0] = O(10 \mu\text{m})$ .

Fig. 7). Es importante recordar que este valor de  $\Delta\vartheta$  es precisamente el necesario para dar el desplazamiento meridional (prácticamente) nulo, es decir, la Ec. (2.11) de Laplace.

El error de Newton, que lleva a la expresión incorrecta (1.4), fue suponer que era la velocidad “horizontal” ( $r \cos \vartheta \dot{\lambda}'$ ) y no el momento angular ( $r^2 \cos^2 \vartheta \dot{\lambda}'$ ) lo que se mantenía constante. El desplazamiento hacia el oriente en el sistema inercial ( $R \cos \vartheta \Omega t_c$ ) no es demasiado grande (uno o dos kilómetros), por lo que es instructivo también analizar el problema en coordenadas cartesianas inerciales ( $x', y', z'$ ) tales que el eje  $z'$  coincide inicialmente con la dirección de la torre. Arnol'd [5] señala que al desplazamiento hacia el oriente debido a la diferencia de velocidad horizontal de la base y la punta de la torre (considerado por Newton) hay que agregarle otro desplazamiento hacia el poniente, debido al cambio de orientación de la fuerza de atracción gravitatoria  $\mathbf{G}$ . Es fácil ver que en el orden más bajo la ecuación de movimiento de la piedra es

$$\ddot{x}' = -x' g_*/R_0. \tag{5.7}$$

Usando las condiciones iniciales  $x'(0) = 0$  y  $\dot{x}'(0) = \Omega(R_0 + h) \cos \vartheta$  se obtiene fácilmente

$$x'(t) \approx \Omega R_0 \cos \vartheta t + \Omega \cos \vartheta \left( ht - \frac{gt^3}{3!} \right). \tag{5.8}$$

El primer término del lado derecho es igual al desplazamiento de la base de la torre, por lo que el segundo es la deflexión que sufre la piedra: entre paréntesis se observan las dos contribuciones mencionadas por Arnol'd. Al evaluar el segundo término en  $t = t_c$  se obtiene nuevamente el  $\Delta x$  dado por la fórmula (2.9) de Laplace. (Arnol'd señala que podría ser que la contribución negativa fuera mayor que la considerada por Newton y la desviación neta fuera hacia el poniente, pero desde el punto de vista de la conservación del momento angular (5.3), esto no es posible.)

## 6. CONCLUSIONES

Laplace [7-8] mostró la forma más sencilla de derivar las ecuaciones de la mecánica en un planeta en rotación: escribir el principio de trabajos virtuales (o, mejor aún, el lagrangiano) formalmente en coordenadas cartesianas en un sistema inercial, pero a su vez escribir a éstas en función de coordenadas esféricas en el sistema en rotación. En esta forma las fuerzas centrífuga y la que ahora se conoce como “de Coriolis” aparecen automáticamente. Laplace también mostró que la fuerza centrífuga se emplea solamente en la redefinición de la dirección vertical y gravedad locales; la variación de la fuerza gravitatoria debida a la deformación de la Tierra (respecto de una esfera perfecta) es igualmente importante. Laplace también calculó correctamente ambas componentes del desvío, respecto de la vertical, que sufre un cuerpo en caída libre. La observación del desplazamiento, pequeño pero medible, hacia el oriente, había sido sugerido por Newton como una prueba de la rotación terrestre. Sin embargo, el razonamiento de Newton (conservación de velocidad horizontal en vez de la componente del momento angular en la dirección del eje terrestre) era incorrecto y resulta en un valor demasiado grande por un factor de 3/2. Finalmente, Laplace también demostró que el desplazamiento meridional es nulo, contra lo que Hooke había predicho y tanto él como los que le siguieron había creído observar. Usando coordenadas cartesianas locales se predice un valor minúsculo pero incorrecto de este desplazamiento, debido a la fuerza horizontal de Coriolis. Esta fuerza sí es responsable de la precesión del péndulo de Foucault, que es el experimento que terminó de convencer a los escépticos de la rotación terrestre.

El problema de la caída libre está caracterizado por cinco parámetros pequeños: el ángulo  $\alpha$  entre la vertical local y la dirección al centro de la Tierra, la elipticidad  $e$  de la Tierra, la razón  $\epsilon$  entre las fuerzas centrífugas y gravitatoria en el ecuador, el ángulo  $\nu$  que gira el planeta durante el tiempo de caída, y la altura relativa de la torre  $\mu$ , o sea

$$\alpha = -\tan^{-1} \left( \frac{R'(\vartheta)}{R(\vartheta)} \right), \quad e = 1 - \frac{R_p}{R_e}, \quad \epsilon = \frac{R\Omega^2}{g}, \quad \nu = \Omega t_c, \quad \mu = \frac{h}{R}. \quad (6.1)$$

Logicamente, no todos estos parámetros son independientes:  $\alpha$  es del orden de  $e$  por una simple razón de geometría (4.2); luego  $e$  es del orden de  $\epsilon$ , pues en la horizontal debe haber un balance entre las fuerzas gravitatoria y centrífuga (4.7); finalmente, la fórmula (1.1) del tiempo de caída indica  $\nu^2 = 2\epsilon\mu$ . Valores típicos corresponden a las relaciones

$$1 \gg \alpha \sim e \sim \epsilon \gg \nu \gg \mu. \quad (6.2)$$

La enorme desviación hacia el poniente, cuya ausencia se esgrimía como un argumento en contra de la rotación terrestre, es del orden de  $\nu R$ ; en cambio, la pequeña deflexión  $\Delta x$  hacia el oriente, predicha por Newton y corregida por Laplace, es del orden de  $\nu h$ . El cambio de latitud durante la caída corresponde a una distancia  $\Delta x_2$  del orden de  $\alpha h \sim \epsilon h$ ; sin embargo, el desplazamiento horizontal hacia el ecuador  $\Delta y$  es muchísimo menor, del orden de  $\epsilon\mu h$ , por lo que para todos los efectos prácticos se lo puede considerar nulo, como dedujo Laplace.

Hooke fue el primero en realizar el experimento de caída libre para verificar la realidad de la rotación terrestre, además de afirmar haber medido una desviación hacia el ecuador

*mayor* que aquél hacia el oriente. Sin embargo, el valor de  $\Delta x$  para el experimento de Hooke es de 0.3 mm, por lo que no pudo haberlo detectado. Laplace propone en su artículo [7] el utilizar el pozo de 54 m existente en el Observatorio de París; el pozo que señala fue hecho expresamente para experiencias de este tipo. Luego de calcular la desviación hacia el oriente de la fórmula (2.9) dice que “el acuerdo de este resultado con la experiencia mostrará el movimiento de rotación de la Tierra”. Para esa época (comienzo del siglo pasado) aparentemente varios investigadores habían intentado el experimento: El Editor de la revista dice que Guglielmini lo había hecho en 1791, desde una altura  $h = 78$  m, midiendo  $\Delta x = 1.8$  cm y  $\Delta y = -1.1$  cm. Aunque no se cita la latitud, la deflexión hacia el oriente es del orden de un factor 2 demasiado grande y la desviación hacia el ecuador es inmensa frente a la predicción teórica de la Ec. (4.10). También Hezenberg hizo en 1802 el experimento en Hamburgo desde una altura  $h = 76$  m, obteniendo  $\Delta x = 8.8$  m y  $\Delta y = -3.4$  mm; el primer valor es muy cercano a la predicción teórica y el segundo es demasiado grande, como ya se señaló.

Estos experimentos son poco precisos y sospechosamente cercanos a los prejuicios del momento (en particular, una desviación considerable hacia el ecuador, que Laplace demostró ser incorrecta). G. Bruhat [19] indica que la experiencia fue hecha más cuidadosamente por Reich, en el pozo de una mina de Freyberg ( $\vartheta = 51^\circ$ ) en 1831, con una caída considerablemente mayor que los anteriores,  $h = 158$  m (recuérdese que  $\Delta x$  aumenta como la potencia  $3/2$  de  $h$ ). En este experimento ya hay resultados estadísticos: 106 caídas dieron una desviación entre 2.79 cm y 2.87 cm; la predicción teórica es de 2.74 cm.

No fue sino hasta 1851, cuando Foucault hizo su célebre experimento con el péndulo, en que se disipó cualquier duda que hubiera sobre la realidad de la rotación terrestre. La genialidad de Foucault consiste en que en su experimento, y a diferencia del mucho más difícil de caída libre, los efectos de la rotación terrestre, aunque pequeños, se acumulan. En la notación de este capítulo, para el experimento de Foucault es  $\nu = O(1)$  en vez del de la rotación (6.2).

## PROBLEMAS

Problema 1. Mejorar el análisis que lleva a la Ec. (1.1) agregando una fuerza de fricción proporcional a la velocidad, es decir, resolviendo  $\ddot{z} + \dot{z}/\tau = -g$ ,  $z(0) = h$  y  $\dot{z}(0) = 0$ , donde  $\tau$  es una constante de decaimiento. Demostrar que el resultado de la Ec. (1.1) para el tiempo de caída cambia sensiblemente para alturas superiores a  $g\tau^2$ . ¿Cómo se modifican los ejemplos presentados luego de la Ec. (1.1) si la fricción es tal que  $g\tau^2 = 100$  m?

Problema 2. Mejorar el análisis que lleva a la Ec. (1.1) teniendo en cuenta que la atracción gravitatoria disminuye como el cuadrado de la distancia al centro de la Tierra ( $R + z$ ), donde  $R$  es el radio de la Tierra. Para resolver la ecuación

$$\ddot{z} = \frac{-gR^2}{(R + z)^2},$$

conviene primero demostrar que se conserva la energía

$$\frac{1}{2}\dot{z}^2 = \frac{gR^2}{R+z} - \frac{gR^2}{R+h}$$

y luego hacer el cambio de variables  $z(t) = h - (R+h)\cos^2\zeta(t)$ . *Respuesta:*  $t_c$  está dado por el valor de la fórmula (1.1) multiplicado por  $\zeta_0 \csc(2\zeta_0) + \sec(\zeta_0)/2$ , donde  $\tan^2\zeta_0 = h/R$ . ¿Cómo se modifican los ejemplos presentados luego de la Ec. (1.1)? N.B.: Tomar  $R = (40 \text{ Mm})/2\pi = 6.36 \text{ Mm}$ .

Problema 3. La Ec. (2.6) puede ser escrita en la forma  $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{g} - 2\Omega\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{x}}$ , donde  $\mathbf{g}$  es uniforme (hacia abajo) y  $\mathbf{n}$  es un vector unitario ( $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ ) en la dirección del eje de rotación terrestre. Encontrar la solución exacta para una condición inicial arbitraria,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  y  $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0$ , demostrando en primer lugar que

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \mathbf{n} t - \mathbf{n} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{n})(1 - \cos 2\Omega t) + \mathbf{s} \times \mathbf{n} \sin 2\Omega t,$$

donde  $\mathbf{s} := \mathbf{v}_0 - \mathbf{g} \times \mathbf{n}/2\Omega$ , y luego integrando en el tiempo.

Problema 4. En base a los resultados del problema anterior, con  $\mathbf{n} = (0, \cos(\vartheta + \alpha), \sin(\vartheta + \alpha))$  y  $\mathbf{g} = -g(0, 0, 1)$ , resolver los problemas de caída libre,  $\mathbf{x}(0) = (0, 0, h)$  y  $\dot{\mathbf{x}}(0) = (0, 0, 0)$ , y el de un cuerpo que es arrojado desde el suelo hacia arriba de manera que llegue a la altura  $h$ ,  $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$  y  $\dot{\mathbf{x}}(0) = (0, 0, \sqrt{2gh})$ . ¿Cómo se compara el  $\Delta x$  de ambos casos?

Problema 5. Demostrar que las expresiones (4.1) y (4.3) son exactas para un planeta esférico y homogéneo,  $e \equiv 0$ , que el volumen correspondiente a  $r \leq R(\vartheta)$  en (4.1) es igual a  $\frac{4}{3}\pi R_*^3 + O(e^2)$ , y que

$$\nabla^2 \left( \frac{g_* r^2}{2R_*} \right) = \frac{3g_*}{R_*},$$

mientras que

$$\nabla^2(r^2 P(\vartheta)) = \nabla^2(r^{-1}) = \nabla^2(r^{-3} P(\vartheta)) = 0 \quad (r \neq 0).$$

En consecuencia, (4.3) es una forma correcta para el potencial gravitatorio dentro y fuera de la Tierra.

Problema 6. Considérese un planeta levemente inhomogéneo, con la forma de un elipsoide de revolución (4.1); el potencial gravitatorio en el exterior y cerca de su superficie está dado por la segunda línea de (4.3). Debido a las inhomogeneidades, los parámetros  $e$  y  $\epsilon$  no están relacionados por (4.7), sino que deben ser considerados independientes. Mostrar que la condición de verticalidad de la gravedad, Ecs. (2.7) y (2.8), requiere

$$\epsilon = 2e(1 - \kappa_e),$$

y que la gravedad local está dada por

$$g(\vartheta) = g_*[1 + (3\kappa_\epsilon - 2)e(\cos^2 \vartheta - \frac{2}{3}) - \epsilon \cos^2 \vartheta].$$

Evaluar estas expresiones para el caso de la Tierra:  $e \approx 1/298$ ,  $g_* \approx 9.82 \text{ m/s}^2$  y  $\epsilon \approx 1/290$ .

Problema 7. Utilizar coordenadas esféricas inerciales  $(\lambda'', \vartheta'', r)$ , tales que la base de la torre esté sobre su ecuador, es decir en  $(\lambda'', \vartheta'', r) = (0, 0, R_0)$ . La transformación entre coordenadas se encuentra fácilmente haciendo una rotación de  $\vartheta_0$  de los ejes cartesianos  $(X, Y, Z)$  a nuevos ejes  $(X'', Y'', Z'')$  y utilizando (2.1); el resultado es

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos(\lambda' - \lambda_0) \\ \cos \vartheta \sin(\lambda' - \lambda_0) \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta_0 & 0 & -\sin \vartheta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta_0 & 0 & \cos \vartheta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \vartheta'' \cos \lambda'' \\ \cos \vartheta'' \sin \lambda'' \\ \sin \vartheta'' \end{pmatrix},$$

donde, a su vez,  $\lambda' = \lambda + \Omega t$ . Mostrar que las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{cases} u_1'' := r \cos \vartheta'' \dot{\lambda}'' \\ u_2'' := r \dot{\vartheta}'' \\ u_3'' := \dot{r} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \dot{u}_1'' + \sigma_2'' u_3'' - \sigma_3'' u_2'' = -r^{-1} \sec \vartheta'' \frac{\partial V}{\partial \lambda''} \\ \dot{u}_2'' + \sigma_3'' u_1'' - \sigma_1'' u_3'' = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta''} \\ \dot{u}_3'' + \sigma_1'' u_2'' - \sigma_2'' u_1'' = -\frac{\partial V}{\partial r} \end{cases},$$

donde  $(\sigma_1'', \sigma_2'', \sigma_3'') = (-u_2''/r, u_1''/r, u_1'' \tan \vartheta''/r)$  y tal que  $V$  está dado por la segunda línea en (4.3), con

$$P(\vartheta) = \frac{1}{3} - (\cos \vartheta_0 \sin \vartheta'' + \sin \vartheta_0 \cos \vartheta'' \cos \lambda'')^2.$$

El momento angular inicial está en la dirección del eje  $Z''$ . Demostrar que la componente en esa dirección *no* se conserva, es decir,

$$\dot{M}_{Z''} = -\frac{\partial V}{\partial \lambda''} \neq 0,$$

donde  $M_{Z''} = r^2 \cos^2 \vartheta'' \dot{\lambda}''$ .

Finalmente, demostrar que si las tres componentes del momento angular se conservarían sería  $\vartheta''(t) = 0$  y que esta órbita corresponde a un círculo máximo sobre la esfera  $(\lambda', \vartheta, R_0)$ , para el que, en el orden más bajo en  $\lambda''$  se cumple (5.5).

#### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue apoyado por el CONACYT (México) mediante el proyecto 1282-T9204. Estoy muy agradecido a A. Dessier facilitarme el artículo de Laplace de la Ref. [7], A.C.

Galles por llamarme la atención sobre el libro de Koyré de la Ref. [1] y el artículo de Bruhat [19], y a Julio Sheinbaum y Federico Graef por una lectura crítica del manuscrito.

## REFERENCIAS

1. Copérnico, en *De revolutionibus orbium coelestium* (1543); lo cita como un argumento de Ptolomeo. Véase también A. Koyré, *Chute des corps et Mouvement de la Terre*, Librairie Philosophique J. Vrin, París, Francia (1973).
2. G. Galilei Linceo, *Dialogo* (1632). Traducción al inglés por Stillman Drake, con prólogo de Albert Einstein, University of California Press, Segunda edición (1967).
3. Le ley de inercia de Galileo corresponde a un movimiento circular, alrededor del centro de la Tierra.
4. Véase biografía de Leonardo da Vinci en *Dictionary of Scientific Biography*, C.C. Gillispie (Ed.), VIII Charles Scribner's sons New York (1971).
5. V.I. Arnol'd, *Huygens and Barrow, Newton and Hooke: pioneers in mathematical analysis and catastrophe theory from involvents to quasicrystals*, Birkhäuser (1990) (traducción del ruso).
6. 57 m de altura y una latitud de 44°N; la velocidad de la base, respecto del espacio absoluto, es unos 330 m/s.
7. P.S. Laplace, *Bull. Soc. Philomatique Paris* **3** (1803) 109.
8. P.S. Laplace, *Mém. Acad. R. Sci.* (Paris) (1778) 75. Véase también: P.M. Ripa, "Laplace y 'Los Geómetras'", *Ciencia Hoy* (Argentina/Uruguay), **28** (Diciembre 1994) (en prensa). P.M. Ripa, *La Increíble Historia de la Malentendida Fuerza de Coriolis*, Fondo de Cultura Económica, México (aparecerá en 1995 en la colección La Ciencia desde México).
9. G.G. Coriolis, *J. Éc. Roy. Polyt.* (Paris) **15** (1835) 142.
10. Una ventaja de usar el lagrangiano es que sólo hay que calcular las primeras derivadas de (2.1).
11. V.I. Arnol'd, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* Second Edition, Springer Verlag (1989) (traducción del ruso).
12. Por "forma de la Tierra" (llamada "geoide") se entiende la que tomaría un mar *en reposo* con respecto al planeta. Esto es explícitamente reconocido cuando se dan las alturas de ciudades y montañas en "metros por encima del nivel del mar". (Está claro que el terreno sólido sí difiere algo de la geoide y, en particular, el suelo no es siempre horizontal). Hay una pequeña diferencia entre la geoide y el nivel *medio* del mar, debido a las corrientes medias, que corresponde a un equilibrio entre la fuerza de Coriolis y la de presión.
13. S. Chandrasekhar, *Ellipsoidal figures of equilibrium*, Yale Univ. Press, New Haven London (1969).
14. No confundir con la excentricidad, la cual se define por  $\epsilon^2 := 1 - R_p^2/R_c^2$  y es por lo tanto igual a  $2e - e^2$ .
15.  $g \cdot R_p^2$  es igual al producto de la constante de gravitación universal por la masa del planeta.
16. H.M. Stommel y D.W. Moore, *An Introduction to the Coriolis Force*, Columbia Univ. Press. New Yor, (1989).
17. I. Todhunter, *A history of the Mathematical Theories of attraction and the figure of the Earth*, Volumen I y II, Dover Publications Inc., New York (1962).
18. D. King-Hele, *Science* **192**, (1976) 1293.
19. G. Bruhat, *Cours de Mécanique Physique*, Masson, Paris (1934).