

# Diseño de sistemas ópticos, a tercer orden, usando las matrices de Yamaji

S. VÁZQUEZ-MONTIEL\*<sup>†</sup>, A. CORNEJO-RODRÍGUEZ<sup>†</sup> Y A. CORDERO-DÁVILA\*

<sup>†</sup>*Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica  
Apartado postal 216, 72000 Puebla, Pue., México*

*\*Facultad de Ciencias Físico Matemáticas  
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
Apartado postal 1151, Puebla, Pue., México*

Recibido el 30 de agosto de 1994; aceptado el 25 de enero de 1995

**RESUMEN.** Se plantea una analogía entre el método de diseño de sistemas ópticos a primer orden y el método de diseño a tercer orden. En el método tradicional de diseño a tercer orden se proponen parámetros estructurales y a partir de ellos se calculan las aberraciones; en el método que se desarrolla en este trabajo se proponen las aberraciones y a partir de ellas se calculan los parámetros estructurales. En el método que se está proponiendo se usan los conceptos debidos a Yamaji [1], pero se encuentran nuevos resultados para las lentes simples y los dobletes acromáticos cementados.

**ABSTRACT.** An analogy is established between the methods for designing an optical system to first and third order. While in the last one the aberrations are calculated from the structure parameters of the optical system, in this paper a method is developed where the starting point is a set of proposed aberrations, and from those values the structure parameters of the optical system are calculated. In order to develop the last method, the theory of Yamaji [1] was used, however new results were obtained for the case of a single lens and an achromatic cemented doublet.

PACS: 42.15.Eq; 02.60.Dc

## 1. ANTECEDENTES

Uno de los métodos tradicionales para diseñar sistemas ópticos a tercer o mayor orden, consiste en asignar parámetros estructurales como curvaturas, espesores y tipos de vidrio a los elementos del sistema óptico que satisfagan los requisitos de primer orden; a continuación se calculan las aberraciones de Seidel, o de mayor orden, y si están por arriba de las tolerancias establecidas, se modifican los parámetros estructurales y se repite el proceso en forma iterativa hasta que la corrección de las aberraciones sea satisfactoria.

Un método alternativo de diseño a tercer orden que aquí se propone, es el empleo de los conceptos y las matrices que Yamaji [1] desarrolló para diseñar sistemas *zoom* y que dan excelentes resultados en el diseño de sistemas ópticos convencionales (*no-zoom*).

## 2. ANALOGÍA CON EL DISEÑO A PRIMER ORDEN

Cuando se diseñan sistemas ópticos con lo que se denomina aproximación de primer orden, uno de los objetivos principales es calcular las potencias y las posiciones de las componentes, de tal manera que se cumpla con los requerimientos de posición y tamaño de la imagen, así como del tamaño del sistema. Posteriormente, los factores estructurales de cada componente pueden determinarse de manera independiente.

El método que proponemos para diseñar a tercer orden es análogo al mencionado, porque asignamos aberraciones a cada elemento, de tal manera que las aberraciones residuales del sistema completo se mantengan por debajo de los valores permisibles, y entonces se determinan los parámetros de construcción de cada elemento independientemente de los restantes.

En lo que sigue se plantea la metodología para implementar la propuesta mencionada en el párrafo anterior.

## 3. COEFICIENTES INTRÍNSECOS Y MATRIZ CARACTERÍSTICA

El conjunto de coeficientes del polinomio de aberraciones del frente de onda,  $W$ , obtenido cuando la pupila de entrada se encuentra en el primer plano principal (amplificación lateral de la pupila = 1) y cuando el objeto está en el infinito (amplificación del objeto = 0), representa al sistema óptico, perfectamente, en relación a sus propiedades óptico-geométricas para formar imágenes. Es decir, el conjunto de coeficientes de  $W$ , bajo las restricciones anteriores, puede considerarse como una extensión del concepto de potencia, ya que la potencia de un sistema óptico determina la posición y la amplificación de la imagen y los coeficientes de  $W$  determinan la calidad de la misma.

Adicionalmente, si se normalizan la potencia y la altura de incidencia del rayo marginal paraxial, y el ángulo de convergencia del rayo principal paraxial es  $-1$ , entonces con los coeficientes de  $W$  se obtiene la matriz [1]

$$S_0 = \begin{pmatrix} I_0 \\ II_0 \\ III_0 \\ IV_0 \\ V_0 \\ VI_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

que representa perfectamente al sistema óptico, donde  $I_0$ ,  $II_0$ ,  $III_0$ ,  $IV_0$ ,  $V_0$  y  $VI_0$  son los coeficientes correspondientes a la aberración esférica, coma, astigmatismo, Petzval, distorsión y esférica de la pupila, respectivamente, el valor 1 se incluye como séptimo término para agregar las cantidades de la región de primer orden.  $S_0$  se conoce como el *coeficiente intrínseco* y representa a los miembros del sistema óptico como entes aislados.

Similarmente, la matriz

$$S = \begin{pmatrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \\ \text{V} \\ \text{VI} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

representa al sistema óptico en uso real y los coeficientes se calculan sin las normalizaciones y condiciones anteriores.

La analogía planteada en la sección anterior se concreta con un operador  $A$  que expresa las condiciones de trabajo del elemento, de tal manera que

$$S = AS_0. \quad (3)$$

Las condiciones de trabajo tienen que ver con las normalizaciones impuestas. De entrada, la potencia no será uno y  $A$  debe transformar  $S_0$  en tal sentido. La pupila de entrada no estará en el primer plano principal, el objeto no estará, necesariamente, en el infinito, el rayo marginal no siempre incide a altura 1 y el rayo principal no siempre converge con ángulo  $-1$ . Por lo tanto  $A$  debe ser capaz de transformar  $S_0$  en  $S$ . Lo anterior indica que  $A$  debe incluir cuatro transformaciones lineales, tales que

$$A = A_N A_S A_O A_F; \quad (4)$$

$A_F$  transforma la potencia de un elemento,  $A_O$  y  $A_S$  reemplazan la posición del objeto y de la pupila de entrada, respectivamente, y finalmente se aplica  $A_N$  para garantizar que el rayo que incide en el elemento sea parte de un rayo pasando a través del sistema óptico completo. A la matriz  $A$  se le conoce como *matriz característica*.

A continuación se dan cada una de las matrices de transformación; una deducción de dichas matrices se debe a Vázquez [2].

Si  $f$  es la distancia focal real del elemento, entonces

$$A_F = \begin{pmatrix} \frac{1}{|f|^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{|f|^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{|f|} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{|f|} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Denotando con  $\ell$  la posición del objeto y definiendo

$$\varepsilon_p = \frac{1}{\ell}, \quad \rho_0 = \frac{1}{f^2}, \quad \sigma_0 = \frac{1}{f}, \quad (6)$$

se tiene

$$A_O = \begin{pmatrix} 1 & 4\varepsilon_p & 6\varepsilon_p^2 & 2\varepsilon_p^2 & 4\varepsilon_p^3 & \varepsilon_p^4 & -\varepsilon_p(\rho_0 + 3\varepsilon_p\sigma_0) \\ 0 & 1 & 3\varepsilon_p & \varepsilon_p & 3\varepsilon_p^2 & \varepsilon_p^3 & -\varepsilon_p\sigma_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\varepsilon_p & \varepsilon_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \varepsilon_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Si  $m$  es la amplificación del objeto y  $z$  representa la posición de la pupila de entrada respecto al primer plano principal, y definiendo

$$\gamma = \frac{\ell}{\ell - z}, \quad \varepsilon = z\gamma, \quad \rho = \frac{1}{f^2} \left( \frac{m + 1}{m - 1} \right), \tag{8}$$

se tiene que

$$A_S = \begin{pmatrix} \gamma^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon\gamma^2 & \gamma^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon^2 & 2\varepsilon & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\varepsilon^3}{\gamma^2} & \frac{3\varepsilon^2}{\gamma^2} & \frac{3\varepsilon}{\gamma^2} & \frac{\varepsilon}{\gamma^2} & \frac{1}{\gamma^2} & 0 & 0 \\ \frac{\varepsilon^4}{\gamma^4} & \frac{4\varepsilon^3}{\gamma^4} & \frac{6\varepsilon^2}{\gamma^4} & \frac{2\varepsilon^2}{\gamma^4} & \frac{2\varepsilon}{\gamma^4} & \frac{1}{\gamma^4} & \frac{\varepsilon^2}{\gamma^4}(\gamma\rho - 3\sigma_0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Finalmente tenemos

$$A_N = \begin{pmatrix} m_p^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_p^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_p^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_p^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

donde  $m_p$  es la amplificación de la pupila producida por los miembros a la izquierda del elemento de interés.

Obsérvese que  $A_F$ ,  $A_O$ ,  $A_S$  y  $A_N$  son matrices unitarias bajo las normalizaciones y condiciones impuestas al construir  $S_0$ .

Un sistema óptico compuesto por  $k$  miembros se presenta por

$$S = \sum_{i=1}^k A_i(S_0)_i, \tag{11}$$

donde ( $S_0$ ), representa al coeficiente intrínseco del  $i$ -ésimo elemento y  $A_i$  la matriz característica de tal elemento.

La Ec. (11) es un sistema de ecuaciones lineales que permite calcular los coeficientes intrínsecos de cada miembro si se conocen las matrices características y se asignan aberraciones al sistema óptico completo.

Partiendo de la información obtenida en la aproximación de primer orden se calculan las matrices características de cada miembro, y considerando cada uno de ellos como un sistema de  $\nu$  lentes delgadas en contacto, los elementos de  $S_0$ , se calculan como [1]

$$I_0 = \sum_{i=1}^{\nu} p_i, \quad (12.a)$$

$$II_0 = \sum_{i=1}^{\nu} q_i, \quad (12.b)$$

$$III_0 = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{f_i} = \pm 1, \quad (12.c)$$

$$IV_0 = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{n_i f_i}, \quad (12.d)$$

$$V_0 = 0, \quad (12.e)$$

$$VI_0 = 0, \quad (12.f)$$

donde  $f_i$  es la distancia focal de la  $i$ -ésima lente delgada, y para cada lente delgada tenemos

$$p = \frac{1}{4f^3}(g_1 X^2 - g_2 XY + g_3 Y^2 + g_4), \quad (13.a)$$

$$q = \frac{1}{2f^2}(g_5 X - g_6 Y), \quad (13.b)$$

con

$$X = \frac{c_1 + c_2}{c_1 - c_2}, \quad (14.a)$$

$$Y = \frac{u + u'}{u - u'}. \quad (14.b)$$

$X$  se conoce como el factor de forma,  $p$  y  $q$  son los coeficientes de Seidel de la aberración esférica y de la coma, respectivamente. Las  $g$  tienen una dependencia con el índice de

refracción,  $n$ , dada por

$$g_1 = \frac{n+2}{n(n-1)^2}, \quad g_2 = \frac{4(n+1)}{n(n-1)}, \quad (15.a)$$

$$g_3 = \frac{3n+2}{n}, \quad g_4 = \frac{n^2}{(n-1)^2}, \quad (15.b)$$

$$g_5 = \frac{n+1}{n(n-1)}, \quad g_6 = 2 + \frac{1}{n}. \quad (15.c)$$

Usando la notación convencional,  $c_1$  y  $c_2$  son las curvaturas de la lente,  $n$  es el índice de refracción,  $u$  y  $u'$  son los ángulos inicial y final del rayo marginal paraxial.

Como se observa,  $\text{III}_0$ ,  $\text{IV}_0$ ,  $\text{V}_0$  y  $\text{VI}_0$  están determinados por los parámetros de la región de primer orden (distancias focales e índices de refracción),  $\text{I}_0$  y  $\text{II}_0$  se calculan resolviendo el sistema de ecuaciones (11).

#### 4. CÁLCULO DE PARÁMETROS ESTRUCTURALES

Calculados  $\text{I}_0$  y  $\text{II}_0$  para cada miembro del sistema óptico, debe determinarse el número de elementos que forman cada miembro y a continuación se calculan los parámetros estructurales de cada elemento. En lo que sigue se dan las expresiones para el cálculo de los parámetros estructurales para los casos en que los miembros son dobletes en contacto, dobletes acromáticos cementados y lentes simples.

##### 4.1. Dobletes en contacto

Para dobletes en contacto, no necesariamente acromáticos ni cementados, las Ecs. (12.a), (12.b), (13.a) y (13.b) quedan como

$$\text{I}_0 = \frac{\phi_1^3}{4} G, \quad (16.a)$$

$$\text{II}_0 = \frac{\phi_1^2}{2} H, \quad (16.b)$$

donde  $G$  y  $H$  se definen como

$$G = (g_1)_1 X_1^2 + (g_1)_2 \phi^3 X_2^2 - (g_2)_1 X_1 - (g_2)_2 \phi^2 (\phi + 2) X_2 \\ + (g_3)_1 + (g_4)_1 + (g_4)_2 + \phi(\phi + 2)^2 (g_3)_2, \quad (17.a)$$

$$H = -(g_5)_1 X_1 - (g_5)_2 \phi^2 X_2 + (g_6)_1 + (g_6)_2 \phi(\phi + 2); \quad (17.b)$$

el segundo subíndice en las  $g$  indica la primera o la segunda lente del doblete,  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son sus potencias.

Para deducir las anteriores ecuaciones se consideró que

$$\phi = \frac{\phi_2}{\phi_1}, \quad (18)$$

$$Y_1 = -1, \quad (19.a)$$

$$Y_2 = -\left(1 + \frac{2}{\phi}\right). \quad (19.b)$$

Definiendo

$$\alpha = (g_1)_1 + ((g_1)_2 a^2 \phi^3), \quad (20.a)$$

$$\beta = -(g_2)_1 + a\phi^3 \left[ 2b(g_1)_2 + (g_2)_2 \left(1 + \frac{2}{\phi}\right) \right], \quad (20.b)$$

$$\begin{aligned} \gamma = & -G + (g_3)_1 + (g_4)_1 \\ & + \phi^3 \left[ (g_1)_2 b^2 + (g_2)_2 b \left(1 + \frac{2}{\phi}\right) + (g_3)_2 \left(1 + \frac{2}{\phi}\right)^2 + (g_4)_2 \right] \end{aligned} \quad (20.c)$$

y además

$$a = \frac{(g_5)_1}{(g_5)_2 \phi^2}, \quad (21.a)$$

$$b = \frac{1}{(g_5)_2 \phi^2} [H - (g_6)_1 - (g_6)_2 (\phi^2 + 2\phi)], \quad (21.b)$$

sustituyendo la Ec. (20) en la (17.a) y las Ecs. (21) en la (17.b), y resolviéndolas como ecuaciones simultáneas, se encuentran las expresiones que permiten calcular los factores de forma:

$$\alpha X_1^2 + \beta X_1 + \gamma = 0, \quad (22.a)$$

$$X_2 = -aX_1 - b. \quad (22.b)$$

Calculados los factores de forma, las curvaturas de las caras de cada lente del doblete se calculan con [3]

$$c_1 = \frac{(X_1 + 1)\phi_1}{2(n_1 - 1)}, \quad (23.a)$$

$$c_2 = \frac{(X_1 - 1)\phi_1}{2(n_1 - 1)}, \quad (23.b)$$

$$c_3 = \frac{(X_2 + 1)\phi_2}{2(n_2 - 1)}, \tag{23.c}$$

$$c_4 = \frac{(X_2 - 1)\phi_2}{2(n_2 - 1)}, \tag{23.d}$$

Como la Ec. (22.a) es de segundo grado, no siempre existe solución, eso depende de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , que a su vez dependen de  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $I_0$  y  $\Pi_0$ . Para que exista una solución real se requiere que

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0, \tag{24}$$

o, en términos de  $I_0$  y  $\Pi_0$ ,

$$4\alpha\gamma_1 I_0 \leq (\beta_1^2 - 4\alpha\gamma_3)\Pi_0^2 + (2\beta_1\beta_2 - 4\alpha\gamma_4)\Pi_0 + \beta_2^2 - 4\alpha\gamma_2, \tag{25}$$

donde

$$b_1 = \frac{2f_1^2}{(g_5)_2\phi^2}, \tag{26.a}$$

$$b_2 = -\frac{1}{(g_5)_2\phi^2} [(g_6)_1 + (g_6)_2(\phi^2 + (2\phi))], \tag{26.b}$$

$$\beta_1 = 2\phi^3 a(g_1)_2 b_1, \tag{27.a}$$

$$\beta_2 = 2\phi^3 a(g_1)_2 b_2 + \phi^3 a(g_2)_2 \left(1 + \frac{2}{\phi}\right) - (g_2)_1, \tag{27.b}$$

$$\gamma_1 = -4f_1^3, \tag{28.a}$$

$$\gamma_2 = (g_3)_1 + (g_4)_1 + \phi^3 \left[ (g_1)_2 b_2^2 + (g_2)_2 b_2 \left(1 + \frac{2}{\phi}\right) + (g_4)_2 + (g_3)_2 \left(1 + \frac{2}{\phi}\right)^2 \right], \tag{28.b}$$

$$\gamma_3 = (g_1)_2 \phi^3 b_1^2, \tag{28.c}$$

$$\gamma_4 = \phi^3 b_1 \left[ 2(g_1)_2 b_2 + (g_2)_2 \left(1 + \frac{2}{\phi}\right) \right]. \tag{28.d}$$

Considerando la desigualdad (25) en un sistema de coordenadas ortogonales con  $I_0$  y  $\Pi_0$  como ordenada y abcisa, respectivamente, tendremos al plano dividido en dos regiones que permiten de manera inmediata decidir si se acepta o no una solución del coeficiente intrínseco. Es decir, nos permite saber, inmediatamente, si existen las curvaturas que proporcionen las aberraciones deseadas.

#### 4.2. Dobletes acromáticos cementados

Las expresiones de la Sec. 4.1 permiten obtener las cuatro curvaturas correspondientes a las dos lentes en contacto. Sin embargo, no hay garantía de que  $c_2$  y  $c_3$  sean iguales, que es la condición para tener un doblete cementado. Usando las Ecs. (23), esta condición queda expresada como

$$\frac{(X_1 - 1)\phi_1}{n_1 - 1} = \frac{(X_2 - 1)\phi_2}{n_2 - 1}. \quad (29)$$

La condición de acromatismo, para un doblete, queda expresada como [3]

$$\phi_1 V_2 + \phi_2 V_1 = 0, \quad (30)$$

donde  $V_1$  y  $V_2$  son los números de Abbe de los vidrios de las componentes del doblete.

De las condiciones (29) y (30) se encuentra que los factores de forma deben estar relacionados por

$$X_2 = -\delta X_1 - (1 - \delta), \quad (31)$$

donde

$$\delta = \frac{V_1(n_2 - 1)}{V_2(n_1 - 1)}. \quad (32)$$

Siguiendo un esquema similar al de la Sec. 4.1 y sustituyendo la Ec. (31) en la  $G$  y  $H$  de las Ecs. (17) se tiene

$$I_0 = \frac{\phi_1^3}{4}(\omega_1 X_1^2 + \omega_2 X_1 + \omega_3), \quad (33)$$

donde

$$\omega_1 = (g_1)_1 + (g_1)_2 \phi^3 \delta^2, \quad (34.a)$$

$$\omega_2 = -(g_2)_1 + 2(g_1)_2 \phi^3 \delta(1 - \delta) + (g_2)_2 \phi^2 (\phi + 2)\delta, \quad (34.b)$$

$$\begin{aligned} \omega_3 = & (g_3)_1 + (g_4)_1 + (g_1)_2 \phi^3 (1 - \delta)^2 + (g_2)_2 \phi^2 (\phi + 2)(1 - \delta) \\ & + (g_3)_2 \phi (\phi + 2)^2 + (g_4)_2 \phi^3. \end{aligned} \quad (34.c)$$

También se tiene que

$$II_0 = \frac{\phi_1^2}{2}(\rho_1 X_1 + \rho_2), \quad (35)$$

donde

$$\rho_1 = -(g_5)_1 + (g_5)_2 \phi^2 \delta, \tag{36.a}$$

$$\rho_2 = (g_6)_1 + (g_5)_2 \phi^2 (1 - \delta) + (g_6)_2 \phi (\phi + 2). \tag{36.b}$$

Despejando  $X_1$  de la Ec. (33) tenemos que

$$X_1 = \frac{-\omega \pm \sqrt{\omega_2^2 - 4\omega_1(\omega_3 - 4f_1^3 I_0)}}{2\omega_1}, \tag{37}$$

donde  $f_1$  es la distancia focal de la primera lente del doblete, suponiendo que la distancia de todo el doblete es  $\pm 1$ . Sustituyendo la última ecuación en (35), obtenemos

$$I_0 = \frac{\omega_1 f_1}{\rho_1^2} \Pi_0^2 - \frac{1}{2f_1} \left( \frac{2\rho_2 \omega_1}{\rho_1^2} + \frac{\omega_2}{\rho_1} \right) \Pi_0 + \frac{1}{4f_1^3} \left( \frac{\omega_1 \rho_2^2}{\rho_1^2} + \frac{\omega_2 \rho_2}{\rho_1} + \omega_3 \right). \tag{38}$$

Esta igualdad indica que  $I_0$  tiene una relación no lineal con  $\Pi_0$ , y además significa que por cada miembro sólo se tiene una variable disponible, en lugar de dos. Adicionalmente, el sistema de ecuaciones (11) a resolver es de ecuaciones no lineales.

Resolviendo el sistema de ecuaciones (11), incluyendo la condición (38), se conocen los valores de las  $I_0$  de cada lente del sistema, entonces los factores de forma se calculan con (37) y (31). Finalmente, con las Ecs. (23) se tienen las curvaturas de las caras de las lentes del doblete.

Como en la Ec. (37) aparece una raíz cuadrada, no siempre existe una solución real, la condición para que exista tal solución es

$$I_0 \geq \frac{(4\omega_1 \omega_3 - \omega_2^2) \phi_1^3}{16\omega_1}. \tag{39}$$

Las expresiones (31), (37), (38) y (39) son nuevos resultados que permiten obtener dobletes cementados acromáticos con la cantidad de aberraciones monocromáticas deseada, de tal manera que el conjunto de dobletes que forma al sistema óptico esté bien corregido.

### 4.3. Lente simple

Para una lente simple, y considerando  $Y_1 = -1$  y  $\phi_1 = \pm 1$ , de las Ecs. (13) tenemos

$$I_0 = \pm \frac{1}{4} (g_1 X_1^2 - g_2 X_1 + g_3 + g_4), \tag{40}$$

$$\Pi_0 = -\frac{1}{2} (g_3 X_1 - g_6). \tag{41}$$

De las Ecs. (40) y (41) se obtiene

$$\pm I_0 = \frac{1}{4g_5^2} [4g_1 \Pi_0^2 + 2(g_2 g_5 - 2g_1 g_6) \Pi_0 + (g_1 g_6^2 - g_2 g_5 g_6 + g_3 g_5^2 + g_4 g_5^2)], \tag{42}$$

e igual que en la sección anterior las variables se reducen a una por lente y el sistema de ecuaciones (11) a resolver es no lineal.

Al obtener las  $I_0$  resolviendo el sistema de ecuaciones (11) junto con la condición (42), los factores de forma se calculan despejando  $X_1$  de (40), entonces

$$X_1 = \frac{g_2 \pm \sqrt{g_2^2 - 4g_1(g_3 + g_4 - 4I_0)}}{2g_1}, \quad (43)$$

y finalmente con las Ecs. (23) se obtienen las curvaturas de la lente.

Para que la Ec. (43) tenga solución real es necesario que

$$I_0 \geq \frac{4g_1(g_3 + g_4) - g_2^2}{16g_1}. \quad (44)$$

Las Ecs. (44) y (43) también son resultados nuevos, que permiten obtener la forma de una lente simple con la cantidad de aberraciones monocromáticas deseada.

## 5. EJEMPLOS

En esta sección se diseña un telescopio y dos oculares para ejemplificar el uso de las expresiones encontradas y la metodología propuesta.

### 5.1. Para dobletes en contacto

En este ejemplo se diseña un telescopio tipo Kepler, donde el objetivo y el ocular son dobletes acromáticos no cementados, pero sí en contacto; la amplificación es  $10\times$ , el objetivo es  $f/10$  y su distancia focal es 400 mm, la distancia focal del ocular es 40 mm y la separación entre las lentes es de 440 mm.

Del análisis a primer orden se sabe que para el objetivo, el objeto está en el infinito, la pupila sobre la lente y la amplificación de la pupila es 20. Para el ocular el objeto está en  $-40$  mm, la pupila en  $-440$  mm y la amplificación de la pupila es 20, para cada doblete se usan vidrios BK7 y F2 de Schott. Con todos estos valores se calculan los parámetros necesarios para cada una de las matrices de Yamaji, obteniéndose:

Para  $A_F$  del objetivo:  $f = 400$ .

Para  $A_F$  del ocular:  $f = 40$ .

Para  $A_0$  del objetivo:  $\varepsilon_p = 0$ ,  $\rho_0 = 6.25 \times 10^{-6}$ ,  $\sigma_0 = 0.0025$ .

Para  $A_0$  del ocular:  $\varepsilon_p = -0.025$ ,  $\rho_0 = 6.25 \times 10^{-4}$ ,  $\sigma_0 = 0.025$ .

Para  $A_S$  del objetivo:  $\gamma = 1$ ,  $\varepsilon = 0$ ,  $\rho = -6.25 \times 10^{-6}$ .

Para  $A_S$  del ocular:  $\gamma = -0.1$ ,  $\varepsilon = 44$ ,  $\rho = 6.25 \times 10^{-4}$ .

Para  $A_N$  del objetivo:  $m_p = 20$ .

Para  $A_N$  del ocular:  $m_p = 20$ .

TABLA I. Radios de curvatura del telescopio Kepler, sin optimizar.

Radios de curvatura	Objetivo mm	Ocular mm
$r_1$	170.1404	28.2573
$r_2$	-189.0830	-13.1108
$r_3$	-184.8546	-13.1277
$r_4$	-7442.6560	-42.6952

Con los datos anteriores se obtienen las matrices características de cada lente, dadas como

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.0025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0025 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0025 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.25 \times 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0.00025 & -0.001 & 0.0015 & 0.0005 & -0.001 & 6.25 \times 10^{-6} & -0.0005 \\ 0.00275 & -0.0085 & 0.009 & 0.003 & -0.0035 & 6.25 \times 10^{-6} & -0.003 \\ 0.03025 & -0.066 & 0.0415 & 0.0055 & -0.006 & 6.25 \times 10^{-6} & -0.0055 \\ 0 & 0 & 0 & 0.025 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3327 & -0.4235 & 0.099 & 0.033 & -0.0085 & 6.25 \times 10^{-6} & 0.242 \\ 3.6602 & -1.331 & 0.1815 & 0.0605 & -5.511 & 0.1375 & -3.093 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

que dan origen al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} I &= .0025 I_{01} + .00025 I_{02} - .001 II_{02} + .001357, \\ II &= .0025 II_{01} + .00275 I_{02} - .0085 II_{02} + .008142, \\ III &= .03025 I_{02} + .066 II_{02} + .042428, \\ V &= .33275 I_{02} - .4325 II_{02} + .364569. \end{aligned}$$

Asignando el valor cero a las aberraciones totales se obtiene como solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} I_{01} &= -.341193, & II_{01} &= -1.376573, \\ I_{02} &= -.665883, & II_{02} &= .337655. \end{aligned}$$

Con las soluciones anteriores y usando las Ecs. (22) se calculan los factores de forma, y con las Ecs. (23) se calculan los radios de curvatura que aparecen en la Tabla I.

TABLA II. Parámetros estructurales optimizados del telescopio Kepler.

	Radio mm	Separación mm	Diámetro apertura mm	Material
Objetivo	172.2775		40	
		5		BK-7
	-184.5897		40	
		0.2		aire
	-186.4786		40	
		2		F-2
	20931.3886		40	
Ocular		431.082		aire
	25.7439		16	
		5.5		BK-7
	-13.9798		16	
		0.2		aire
	-13.6475		16	
		1.5		F-2
		16		

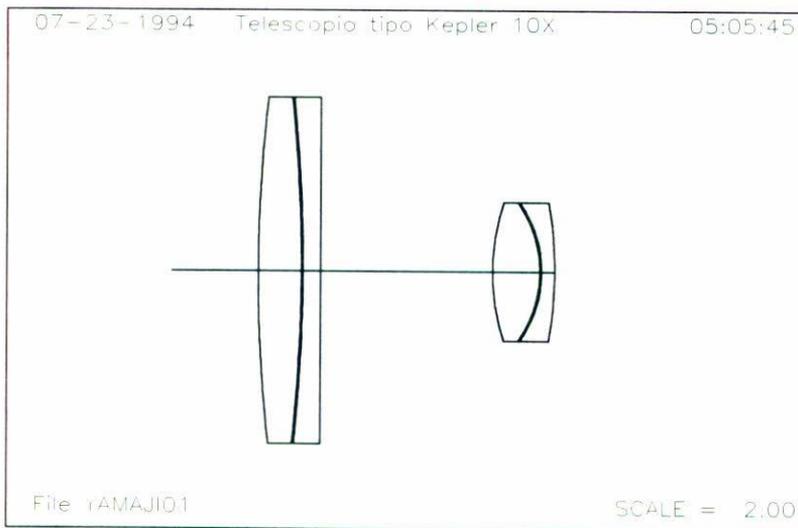


FIGURA 1A. Lentes de telescopio Kepler. La separación entre las lentes no corresponde a la escala del dibujo.

Asignando espesores y ajustando las separaciones de acuerdo a la posición de los planos principales, se optimiza el sistema usando el programa SIGMA PC Ver. 5.9, obteniéndose el diseño final, cuyos parámetros se dan en la Tabla II. El sistema óptico se esquematiza en

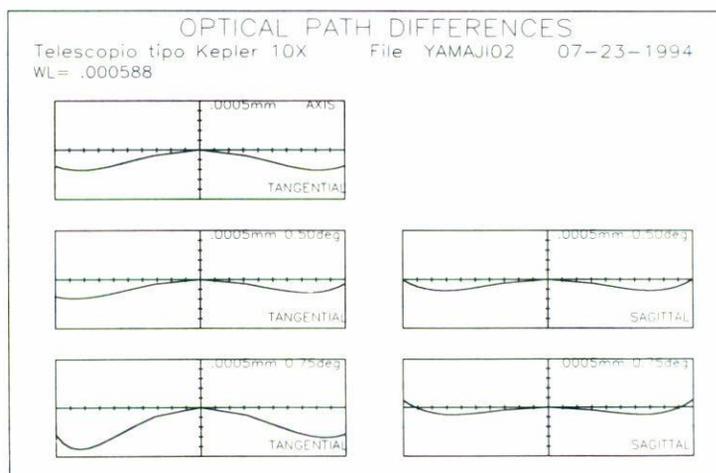


FIGURA 1B. Aberración transversal del telescopio Kepler en tres longitudes de onda, 486.1 nm, 587.6 nm y 656.3 nm. El eje horizontal representa a la pupila de entrada, el eje vertical el valor de la aberración.

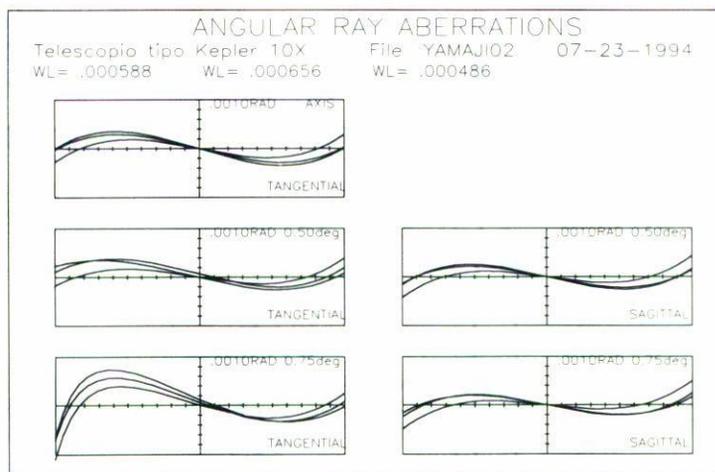


FIGURA 1C. Aberración del frente de onda del telescopio Kepler. El eje horizontal representa a la pupila de entrada, el eje vertical el valor de la aberración.

la Fig. 1.a, en las Figs. 1.b y 1.c se muestran las curvas de aberración angular en tres colores (486.1 nm, 587.6 nm y 656.3 nm) y la aberración del frente de onda, respectivamente. Nótese que aun para un campo de entrada de 1.6 grados la aberración cromática es menor a 1 minuto de arco, que es la resolución del ojo bajo condiciones ideales, y que el máximo tamaño de la imagen es de 3 minutos de arco, adicionalmente, el máximo OPD es  $0.75\lambda$ , donde  $\lambda = 500$  nm. Lo anterior indica que el telescopio diseñado tiene una corrección de las aberraciones que garantiza una aceptable calidad de la imagen.

TABLA III. Radios de curvatura del ocular Plossl, sin optimizar.

	radios (mm)	materiales
primera lente	36.5088	
		F-2
	14.0371	
	-46.3493	BK-7
segunda lente		aire
	18.4045	
		BK-7
	-25.9871	
		F-2
	186.2739	

### 5.2. Dobletes acromáticos cementados

Para este ejemplo se diseña un ocular de 24 mm de distancia focal del tipo Plossl, formado por dos dobletes acromáticos y cementados, de la misma distancia focal. Se considera una pupila de salida de 5 mm de diámetro colocada a 25 mm de la última lente, la distancia focal de cada doblete es de 48.1223 mm y la separación entre ellos es de 5.071 mm.

Del análisis a primer orden se obtiene que para la primera lente, el objeto está en el infinito, la pupila de entrada está a -25 mm y la amplificación de la pupila es 2.5. Para la segunda lente, el objeto está a +43.0513 mm, la pupila está a -58.2402 mm y la amplificación de la pupila es de 5.764. Los vidrios que se usan son nuevamente BK7 y F2 de Schott.

Las matrices que se obtienen con los datos anteriores, son

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.00035 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0014 & 0.00269 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0056 & -0.02159 & 0.02078 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.02078 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0224 & 0.1295 & -0.2493 & -0.0831 & 0.16 & 0 & 0 \\ 0.0897 & -0.6909 & 1.9949 & 0.6647 & -1.28 & 0.0256 & -1.0043 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0.0003 & 0.0014 & 0.0024 & 0.0008 & 0.0018 & 0.00001 & -0.0015 \\ -0.0013 & -0.0033 & -0.0013 & -0.0004 & 0.0022 & 0.00003 & -0.0035 \\ 0.0054 & 0.0032 & -0.0096 & -0.0101 & -0.0029 & 0.00009 & -0.0028 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0207 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0226 & 0.0308 & 0.0163 & 0.0054 & -0.0391 & 0.00029 & -0.0374 \\ 0.0935 & -0.3091 & 0.3831 & 0.1277 & 1.1633 & 0.0328 & -0.7126 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

TABLA IV. Parámetros estructurales optimizados del ocular Plossl.

	Radios mm	Separación mm	Diám. aber. mm	material
Primera lente	158.9655		17	
		2		F-2
	16.2285		17	
	-33.7658	9	17	BK-7
Segunda lente		.05		aire
	19.8409		17	
		9		BK-7
	-21.8753		17	
		2		F-2
	-75.2936		17	

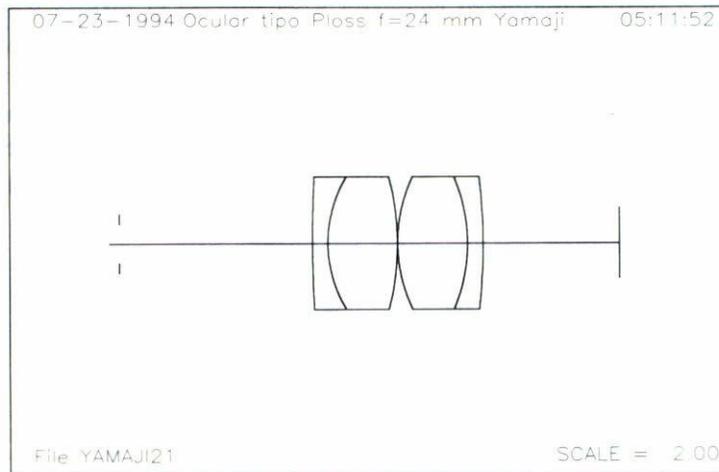


FIGURA 2A. Sistema óptico correspondiente al ocular Plossl, la luz incide de derecha a izquierda.

Como se tienen dos lentes sólo se dispone de dos variables, así que seleccionamos las dos primeras ecuaciones. Es decir, se corrige la aberración esférica y la coma únicamente. Por tanto, las ecuaciones serán

$$I = .00035 I_{01} + .00032 I_{02} + .00144 II_{02} + .00142,$$

$$II = -.00141 I_{01} + .00269 II_{01} - .00133 I_{02} - .00336 II_{02} + .00198.$$

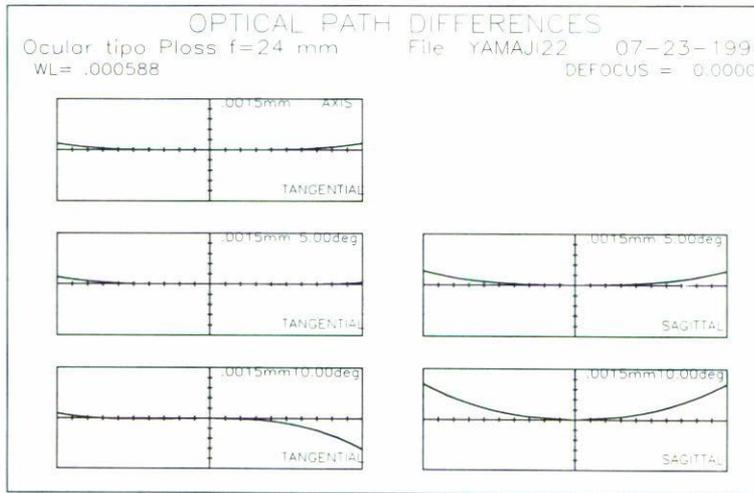


FIGURA 2B. Aberración transversal del ocular Plossl en tres longitudes de onda, 486.1 nm, 587.6 nm y 656.3 nm. El eje horizontal representa a la pupila de entrada, el eje vertical el valor de la aberración.

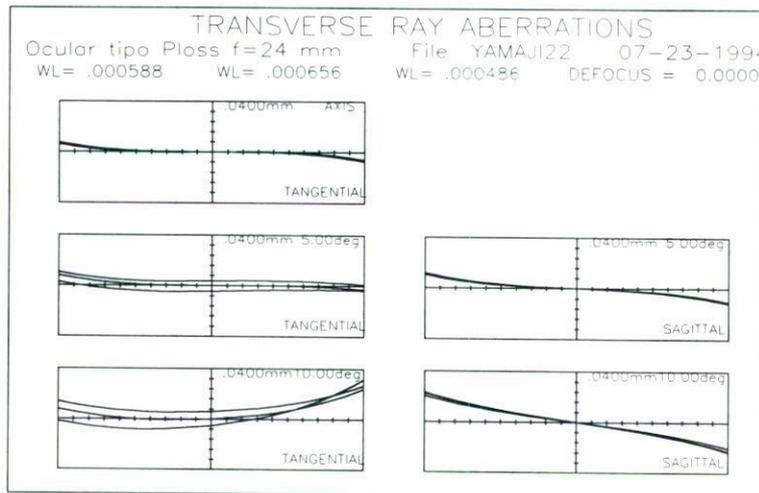


FIGURA 2C. Aberración del frente de onda del ocular Plossl. El eje horizontal representa a la pupila de entrada, el eje vertical el valor de la aberración.

Adicionalmente la Ec. (38) para cada lente queda como

$$I_{01} = .92641 II_{01}^2 - .38791 II_{01} - .43054,$$

$$I_{02} = .82641 II_{02}^2 - .09819 II_{02} - .82373.$$

Resolviendo simultáneamente las cuatro ecuaciones, y tomando las aberraciones totales

TABLA V. Radios de curvatura del ocular con lentes simples delgadas.

radios primera lente (mm)	radios segunda lente (mm)
29.0472	8.00493
-201.55754	10.7052

TABLA VI. Radios de curvatura y espesores del ocular con lentes simples.

	radios (mm)	separación (mm)
primera lente	28.9611	
		2
	-200.9602	
segunda lente	10.3487	
		3
	13.8397	

TABLA VII. Parámetros estructurales optimizados. Ocular de lentes simples.

Radios mm	Separación mm	Diám. aber. mm	Material
29.0472		13	
	2		BK-7
-201.5575		13	
	41.5		aire
8.00459		13	
	3		BK-7
10.7052		13	

con valor cero, se obtiene como solución

$$I_{01} = 1.39171, \quad II_{01} = -1.26867$$

$$I_{02} = 1.80833, \quad II_2 = -1.72622.$$

Usando las Ecs. (37), (31) y (23), se calculan los radios de curvatura que aparecen en la Tabla III.

A continuación se asignan espesores y se optimiza con SIGMA PC. Los parámetros finales se dan en la Tabla IV. El sistema se ilustra en la Fig. 2a, y en las Figs. 2.b y 2.c se dan las aberraciones transversales en tres colores y las del frente de onda, respectivamente. Obsérvese que para un campo de 20 grados la imagen de un punto tiene un tamaño máximo de 20  $\mu\text{m}$  y que la aberración cromática residual es despreciable, además, el máximo OPD es de  $2\lambda$ . Para un ocular los valores anteriores muestran que el diseño obtenido es adecuado.

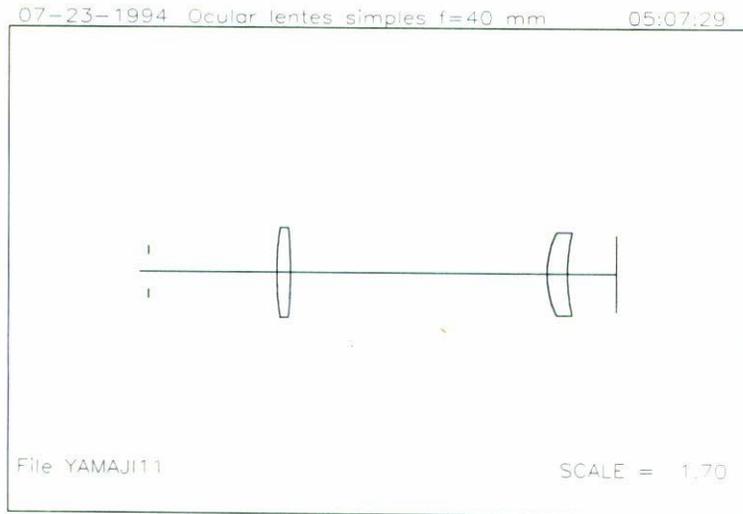


FIGURA 3A. Sistema óptico correspondiente al ocular de lentes simples, la luz incide de derecha a izquierda.

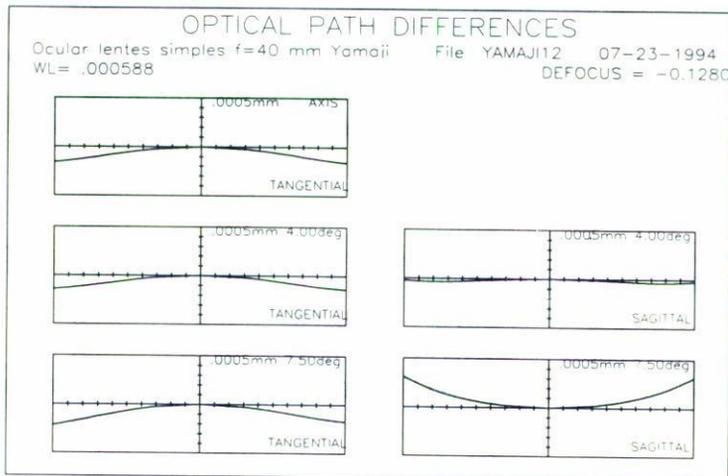


FIGURA 3B. Aberración transversal del ocular de lentes simples en tres longitudes de onda, 486.1 nm, 587.6 nm y 656.3 nm. El eje horizontal representa a la pupila de entrada, el eje vertical el valor de la aberración.

### 5.3. Lente simple

Para este ejemplo se seleccionó un ocular con dos lentes simples del mismo vidrio, BK7, y se acromatiza con la separación entre las lentes. La pupila de salida está a 18.75 mm de la última lente y su diámetro es de 5 mm. La lente del ojo tiene una distancia focal de 49.12614 mm y la de campo de 61.40767 mm, la separación entre ellas es de 34.38829 mm.

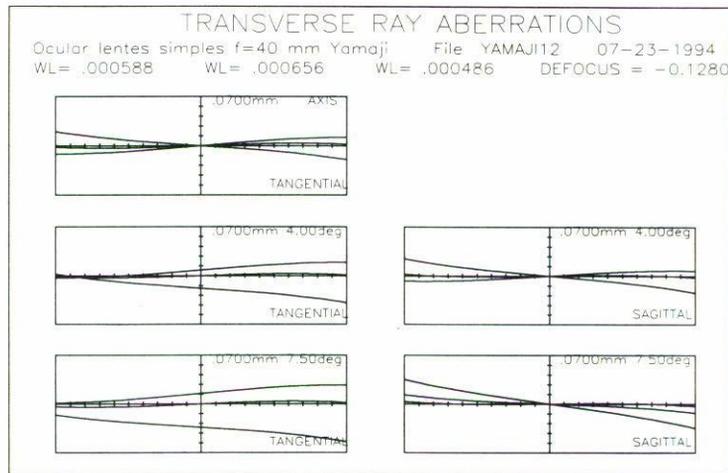


FIGURA 3C. Aberración del frente de onda para el ocular de lentes simples. El eje horizontal representa a la pupila de entrada, el eje vertical el valor de la aberración.

Con análisis a primer orden obtenemos para la primera lente, el objeto está en infinito, la pupila en  $-18.75$  y la amplificación de la pupila es 3. Para la segunda lente, el objeto está  $+14.73784$  mm, la pupila en  $-64.71957$  mm y la amplificación de la pupila es 10.35.

Con estos datos se calculan las matrices características

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.0109 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0056 & 0.0149 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0029 & -0.0155 & 0.0203 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0203 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0015 & 0.0121 & -0.0318 & -0.0106 & 0.0277 & 0 & 0 \\ 0.0008 & -0.0084 & 0.0331 & 0.0111 & -0.0289 & 0.0007 & -0.0166 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0.0009 & 0.0156 & 0.0979 & 0.0326 & 0.2721 & 0.0046 & -0.0528 \\ -0.0007 & -0.0088 & -0.0307 & -0.0102 & -0.0175 & 0.0008 & 0.0267 \\ 0.0006 & 0.0040 & 0.0015 & -0.0049 & -0.0158 & 0.002 & -0.0084 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0162 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0005 & -0.0007 & 0.0046 & 0.0015 & -0.0052 & 0.00003 & -0.0038 \\ 0.0004 & -0.0015 & 0.0022 & 0.0007 & 0.1088 & 0.0074 & -0.0206 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como en el ejemplo anterior, sólo disponemos de una variable por lente, por esto, nuevamente, seleccionamos únicamente las dos primeras ecuaciones que junto con las que

relacionan la aberración esférica con la coma nos dan el sistema

$$I = .01093 I_{01} + .00094 I_{02} + .01567 II_{02} + .06837,$$

$$II = -.00569 I_{01} + .01492 II_{01} - .00076 I_{02} - .00884 II_{02} - .01137,$$

$$I_{01} = .84213 II_{01}^2 - .23946 II_{01} + 2.06273,$$

$$I_{02} = .44213 II_{02}^2 - .23946 II_{02} + 2.06273.$$

Considerando  $I = .01735$  y  $II = 0$ , la solución del sistema de ecuaciones es

$$I_{01} = 2.04586, \quad II_{01} = 0.13872,$$

$$I_{02} = 85.18284, \quad II_{02} = -9.79375.$$

Los radios de curvatura calculados con las Ecs. (43) y (23) se dan en la Tabla V.

Asignando espesores y cambiando los radios de curvatura de tal manera que el factor de forma y la distancia focal no cambien [4], se tienen los radios de la Tabla VI. Optimizando con SIGMA PC, se obtienen los parámetros finales que se dan en la Tabla VII. El sistema óptico se muestra en la Fig. 3.a, y en las Figs. 3.b y 3.c se dan las curvas de aberraciones transversales para tres colores y del frente de onda, respectivamente. Puede notarse que la aberración cromática residual para un campo de 15 grados no es despreciable, que existe mucha distorsión y curvatura de campo. Recuérdese que solo se está corrigiendo la aberración esférica y la coma. Sin embargo, el tamaño máximo de la imagen de un punto es de  $35 \mu\text{m}$  y el máximo OPD es de  $0.5\lambda$ . Para un ocular de este tipo los valores anteriores son aceptables.

## 6. CONCLUSIONES

Se desarrolló la herramienta matemática y los conceptos para establecer la analogía entre el diseño a primer orden y el diseño a tercer orden. En particular, se estableció el procedimiento para el diseño con dobletes acromáticos cementados y con lentes simples que no fueron dados por Yamaji. Los ejemplos muestran que los diseños obtenidos con la metodología aquí desarrollada están muy cerca de los optimizados, y en todos los casos no se requirieron más de 10 iteraciones en la etapa de optimización.

## REFERENCIAS

1. K. Yamaji, *Progress in Optics*, Vol. VI, ed. E. Wolf, North-Holland Publ. Co., Amsterdam (1971) p. 105.
2. S. Vázquez-Montiel, "Diseño a tercer orden de un objetivo zoom para microscopio", Tesis de Maestría, INAOE, Tonanzintla Puebla (1991).
3. W.T. Welford, *Aberrations of the Symmetrical Optical System*, Academic Press, Londres (1974).
4. G.W. Hopkins, "Basic Algorithms for Optical Engineering", *Appl. Opt. and Optical Engineering*, Vol. IX, eds. R. Shannon y J. Wyant, Academic Pres, Nueva York (1983).