

# Susceptibilidad eléctrica en un sistema 1-D

CECILIA PEÑA DE LA MAZA Y P. VILLASEÑOR-GONZÁLEZ

*Instituto de Física "Manuel Sandoval Vallarta"*

*Universidad Autónoma de San Luis Potosí*

*Alvaro Obregón 64, 78000 San Luis Potosí, S.L.P., México*

Recibido el 12 de septiembre de 1994; aceptado el 12 de diciembre de 1994

**RESUMEN.** Se calcula la susceptibilidad eléctrica de una cadena formada por esferas metálicas inmersas en un medio dieléctrico constante. El cálculo se hace en la aproximación dipolar y en el límite cuasiestático. El sistema de ecuaciones que se obtiene para determinar el momento dipolar en cada esfera se descompone en dos partes: una función que depende directamente del modelo que se escoja para representar la polarizabilidad de las esferas y una matriz que depende de la forma como están distribuidas las esferas en la cadena. Los valores y los vectores propios de esta matriz determinan los estados resonantes del sistema. Las distribuciones que en este trabajo se analizan son 3: ordenada, cuasi-ordenada y desordenada.

**ABSTRACT.** We calculate the electric susceptibility for one linear chain of polarizable spheres embedded in a homogeneous host. The calculation is in the dipolar and quasi-static approximation. The dipolar moment of the system is splitting in two parts, one function that depend of the polarizability of the spheres and one matrix that depend of the distribution in the chain. The resonant states are specified by the eigenvectors and eigenvalues. We analyze three distributions order, quasicorder and disorder.

PACS: 78.65.-s; 77.55.+f; 78.20.Dj

## 1. INTRODUCCIÓN

Las propiedades ópticas de medios compuestos, formados por pequeñas partículas metálicas inmersas en un medio dieléctrico, han sido motivo de muchos y diferentes estudios tanto teóricos [1-8] como experimentales [9-12]. Desde principios de siglo el problema atrajo fuertemente la atención, debido a que los resultados experimentales no podían explicarse solamente haciendo una combinación lineal de las dos especies involucradas en la formación del medio compuesto. La primer teoría que trató de explicar las propiedades de estos medios fue desarrollada a principios de siglo por Maxwell-Garnett (MG) [1], y aún hoy en día todas las nuevas teorías creadas para explicar las propiedades ópticas de estos medios compuestos comparan sus resultados con la de MG [1,4,12,13], ya que ésta resulta ser el límite de cualquier teoría para bajas fracciones de llenado. A pesar de los múltiples trabajos que se han hecho, aún no se ha encontrado una solución definitiva al problema. Parte de la complejidad del problema se debe al hecho de que la disposición espacial de las partículas influye fuertemente en las propiedades ópticas [9]. La mayoría de las teorías desarrolladas para tratar estos sistemas son teorías de campo medio, y éstas tienen generalmente la característica de suavizar los efectos. Sin embargo, resolver el problema sin estas aproximaciones es un problema que está abierto.

En este trabajo se estudia un sistema unidimensional formado por pequeñas esferas de plata ( $\sim 100 \text{ \AA}$ ) inmersas en un medio dieléctrico constante  $\epsilon_h$ . El sistema está inmerso en un campo armónico de frecuencia  $\omega$ . El campo induce un dipolo en cada una de las esferas, por lo tanto, el campo sobre cada una de las esferas es el aplicado más el campo dipolar. En la Sec. 2 se presenta la teoría que permite hacer una separación entre el modelo que se escoja para representar la polarizabilidad de las esferas y la forma como éstas están arregladas. Además se obtiene la expresión para calcular numéricamente la susceptibilidad eléctrica (SE) del sistema. En la Sec. 3 se aplica la teoría a tres tipos de distribuciones de esferas en la cadena: ordenada, cuasi-ordenada y desordenada. Primero se aborda el caso de una cadena de esferas finita y ordenada. Se determina exactamente el momento dipolar en cada una de las esferas y se calcula la SE del sistema. Al graficar la parte imaginaria de la SE como función de la energía, además de estar presente el pico principal, aparecen picos secundarios que son consecuencia del hecho de que la cadena sea finita. Estos picos secundarios desaparecen cuando se incluyen condiciones periódicas (cadena infinita). En el proceso para estudiar el sistema desordenado, se analiza primero una cadena cuasi-ordenada finita. Y por último, se resuelve el problema de una cadena desordenada y se encuentra que la SE presenta un espectro que depende fuertemente de la distribución de las partículas y es difícil inferir un comportamiento definido para las diferentes distribuciones. Sin embargo, el promedio de la SE tiende a una curva suave bien definida que permite hacer un análisis para diferentes fracciones de llenado. En la Sec. 4 se presentan las conclusiones.

## 2. TEORÍA

Se supone una cadena de longitud  $L$ , formada por  $N$  esferas de radio  $a$  y constante dieléctrica  $\epsilon_s$ , dentro de un medio dieléctrico homogéneo con constante dieléctrica  $\epsilon_h$ . El sistema completo se encuentra dentro de un campo eléctrico que oscila con una frecuencia  $\omega$ , cuya longitud de onda  $\lambda = c/\omega$  es más grande que el radio  $a$  de las esferas así como de la separación media entre ellas. El campo eléctrico aplicado  $\vec{E}$  induce un momento dipolar en cada una de las esferas y este momento dipolar contribuye al campo local en las demás esferas, de tal manera que el momento dipolar de la  $i$ -ésima esfera, en la aproximación cuasiestática, puede escribirse como

$$\vec{p}_i = \alpha(\omega) \left[ \vec{E}_i^0 + \sum_j \vec{t}_{ij} \cdot \vec{p}_j \right], \quad (1)$$

donde  $\alpha$  es la polarizabilidad de una esfera aislada,  $\vec{E}_i^0 = \vec{E}/\epsilon_h$  es el campo inducido en el medio, aplicado en la  $i$ -ésima esfera,  $\epsilon_h$  es la constante dieléctrica del medio dieléctrico en el que están inmersas las esferas metálicas y  $\vec{t}_{ij} = (1 - \delta_{ij})\nabla_i\nabla_j(1/R_{ij})$  es el tensor de interacción dipolar, que para el caso de una dimensión puede escribirse como  $\vec{t}_{ij} = (3\hat{k}\hat{k} - \vec{I})/R_{ij}^3$ , donde  $\hat{k}$  es un vector unitario que apunta en la dirección del eje de la cadena,  $\vec{I}$  es la diada identidad y  $R_{ij} = |R_i - R_j|$ , donde  $R_i$  es la posición de la esfera  $i$ -ésima.

En el caso de tener un conjunto de esferas distribuidas a lo largo de una línea recta (cadena lineal), se pueden distinguir dos casos de interés: cuando el campo eléctrico es paralelo al eje de la cadena y cuando el campo es perpendicular. En este trabajo se supone que el campo es paralelo al eje de la cadena. La solución para el caso perpendicular es análoga.

Si se supone una cadena lineal, el sistema de ecuaciones (1) puede escribirse como

$$(I - sA)\hat{P} = I_c, \tag{2}$$

donde

$$A_{ij} = \frac{1 - \delta_{ij}}{|(Z_i - Z_j)/Z_0|^3}, \tag{3}$$

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \vdots \\ \hat{p}_N \end{pmatrix}, \quad \hat{I}_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s = \frac{\hat{\alpha}}{4} \left( \frac{f}{NZ_0} \right)^3 b; \tag{4}$$

$Z_i = R_i/L$  es la posición escalada de la esfera  $i$ -ésima  $0 \leq Z_i \leq 1$ ,  $Z_0 = (N-1)/(1-f/N)$ ,  $\hat{p}_i = p_i/\alpha E^0$  es el momento dipolar de la esfera  $i$ -ésima normalizado al momento dipolar de una esfera aislada,  $\hat{\alpha} = \alpha/a^3$  es la polarizabilidad de la esfera normalizada al cubo de su radio,  $f = 2Na/L$  es la fracción de llenado, que de acuerdo a esta definición es tal que  $0 < f < 1$ . El caso  $f = 0$  corresponde al de una esfera aislada y el caso  $f = 1$  corresponde al caso hipotético de que las esferas se tocan sin transferirse carga. Por último,  $b$  es el parámetro de dirección del campo eléctrico;  $b = 1$  si el campo es paralelo al eje de la cadena y  $b = -1/2$  si es perpendicular.

Escrita de esta forma la Ec. (2), se pueden distinguir dos contribuciones relevantes del problema: la función del modelo  $s$  y la matriz de distribución  $A$ . La primera depende del modelo que se escoja para representar la polarizabilidad de las esferas, así como de la fracción de llenado, y la segunda depende del número de esferas en la cadena y de la forma como están distribuidas.

Si se supone que  $U$  es una matriz unitaria que diagonaliza a la matriz de distribución  $A$ , el sistema de ecuaciones (2) puede escribirse como

$$\hat{p}_i = \sum_{j,k}^N \frac{U_{ik}U_{kj}^{-1}}{1 - s\lambda_k}, \tag{5}$$

donde  $\lambda_k$  son los valores propios de la matriz de distribución.

Para calcular la susceptibilidad eléctrica del sistema es necesario conocer el valor promedio del momento dipolar  $\langle p \rangle$ . Tomando el promedio de la Ec. (5) se obtiene

$$\langle \hat{p} \rangle = \sum_k^N \frac{F_k}{1 - s\lambda_k}, \tag{6}$$

donde  $F_k$  es la amplitud de oscilación del modo resonante  $k$ -ésimo, la cual está definida como

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{ij}^N U_{ik} U_{kj}^{-1}.$$

Del hecho de que la matriz  $U$  sea unitaria, la amplitud de oscilación puede escribirse como

$$F_k = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N U_{ik} \right)^2, \quad (7)$$

por lo tanto  $F_k > 0$ . Además puede demostrarse que  $F_k$  satisface la siguiente regla de suma:

$$\sum_{k=1}^N F_k = 1. \quad (8)$$

De la Ec. (6) se encuentra que los estados resonantes del sistema están dados por  $1 - s\lambda_k = 0$ , por lo tanto para una cadena de  $N$  esferas habrá  $N$  estados resonantes en el sistema, pero estos estados no son todos ópticamente activos, su amplitud de respuesta dependerá del valor de su amplitud de oscilación  $F_k$ .

Para bajas fracciones del llenado, esto es, para cuando  $f \rightarrow 0$ , la función del modelo  $s \rightarrow 0$ , así que el momento dipolar de la  $i$ -ésima esfera es

$$\hat{p}_i = \sum_{j,k} U_{ik} U_{kj}^{-1} = \sum_j \delta_{ij} = 1,$$

esto es, el momento dipolar de la  $i$ -ésima esfera tiende al valor que tendría una esfera aislada.

La SE del sistema  $\chi_e$  se define como la función respuesta entre el momento dipolar por unidad de volumen y el campo eléctrico en el medio; esto es,

$$P = n\langle p \rangle = \chi_e E^0,$$

donde  $n$  es el número de esferas por unidad de volumen. El volumen que se está considerando es el de un cilindro de longitud  $L$  y radio  $a$ , en donde están contenidas las  $N$  esferas, así que

$$n = \frac{N}{\pi a^2 L}.$$

De esta manera la SE puede escribirse como

$$\chi_e = \frac{f\hat{a}}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{F_k}{1 - s\lambda_k}. \quad (9)$$

Puede verse de esta expresión que la posición de los picos de absorción depende fuertemente de los valores propios de la matriz de distribución y que sólo es necesario especificar el modelo para la polarizabilidad de las esferas para poder determinar las frecuencias en las que se encuentran los estados resonantes. Rojas y Claro [7] hicieron un tratamiento similar para sistemas tridimensionales, después Brouers y Claro [14] plantean el problema unidimensional ordenado para aplicarlo al estudio de medios porosos.

En los cálculos de la susceptibilidad eléctrica que se presentan a continuación, se supone que la polarizabilidad de las esferas en la aproximación de dipolo puntual es

$$\alpha = a^3 \frac{\epsilon_s - \epsilon_h}{\epsilon_s + 2\epsilon_h}.$$

Y se asume el modelo de Drude para la constante dieléctrica de las esferas metálicas,

$$\epsilon_s = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i/\tau)},$$

donde  $1/\tau$  es la constante de amortiguamiento y  $\omega_p$  es la frecuencia de plasma de la esfera metálica. En los cálculos numéricos que se hacen en la Sec. 3 se usan  $\epsilon_h = 2.37$  (gelatina) y  $\omega_p\tau = 800$ , que es un valor grande, pero se usó este valor con el único propósito de resaltar los picos en la SE.

### 3. DISTRIBUCIONES

La teoría desarrollada en la sección anterior puede aplicarse a cualquier tipo de arreglo de esferas, sólo hay que especificar la posición de las esferas  $Z_i$ . En este trabajo se hace un análisis de las características principales de tres diferentes distribuciones: ordenada, casi-ordenada y desordenada.

#### 3.1. Distribución ordenada

La cadena ordenada ha sido una de las más estudiadas y reportadas en la literatura [5,16,17], sin embargo el análisis que se hace en este trabajo no ha sido reportado y creemos que es importante, dado que el conocimiento de las características que presentan esta distribución permitirán un entendimiento más detallado de cualquier otra distribución.

En esta distribución se acomodan  $N$  esferas equidistantemente sobre una línea de longitud  $L$ . En este arreglo la posición de las esferas está dada por

$$R_i = a + (i - 1) \left( \frac{1 - f/N}{N - 1} \right) L, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

y la posición escalada

$$Z_i = \frac{R_i}{L} = \frac{a}{L} + Z_0(i - 1), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

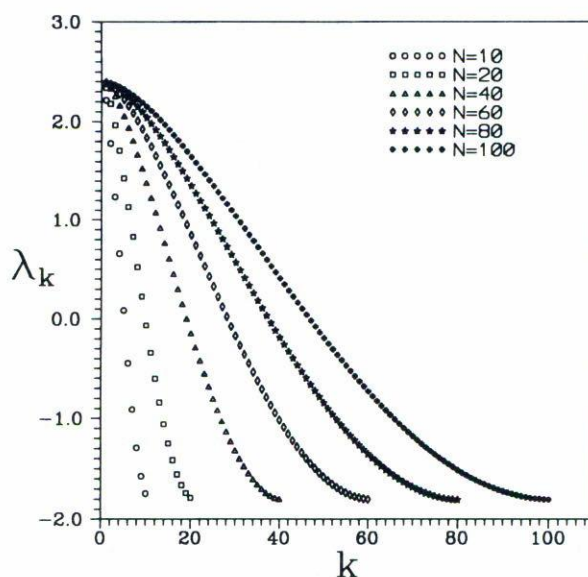


FIGURA 1. Los valores propios ( $\lambda_k$ ) de la matriz de distribución se arreglan en forma decreciente, luego se grafican en función de la posición que ocupan en el arreglo. Las gráficas son para  $N = 10, 20, 40, 60, 80, 100$  esferas en la cadena.

Los elementos de la matriz distribución [Ec. (3)] para este caso pueden escribirse de una manera muy simple:

$$A_{ij} = \frac{1 - \delta_{ij}}{|i - j|^3}.$$

Los elementos de la matriz distribución son independientes de la fracción de llenado y éstos dependen únicamente de la posición relativa entre las esferas, así como del número de esferas  $N$ , que es el que define el orden de la matriz. Definidos los elementos de la matriz distribución, los valores propios  $\lambda_k$  así como los vectores propios pueden determinarse. Los resultados se encuentran resumidos en la Fig. 1. Los valores propios se arreglan en forma decreciente y se representan gráficamente para diferente número de esferas en la cadena  $N = 10, 20, 40, 80$  y  $100$ . Existen dos cotas para los valores propios, el límite superior es  $\lambda_s = 2.4041$  y el inferior es  $\lambda_i = -1.803$ . Puede verse además que la distribución de valores es discreta y tiende a ser continua conforme  $N \rightarrow \infty$ . Lo importante de esta gráfica es que independientemente del número de esferas en la cadena los valores propios se encuentran en el intervalo  $-1.803 \leq \lambda_k \leq 2.4041$  y conforme aumenta  $N$ , el espaciamiento entre ellos es menor. Estos valores propios tienen asociados una amplitud de oscilación  $F_k$ , la cual proporciona información de la amplitud del pico de absorción. En la Fig. 2 se grafica la amplitud de oscilación correspondiente a cada valor propio  $\lambda_k$ , para diferente número de esferas en la cadena  $N = 10, 20, 40, 80$  y  $100$ . El número de estados resonantes diferentes de cero son  $N/2$ , debido a que existe simetría en el problema; esto es, la primera esfera tiene el mismo momento dipolar que la última, la segunda esfera tiene el mismo momento

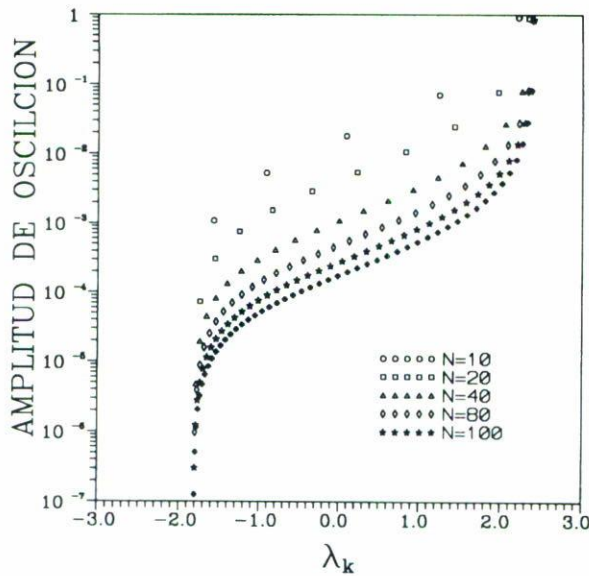


FIGURA 2. Se grafica la amplitud de oscilación en función de los valores propios ( $\lambda_k$ ) de la matriz de distribución, correspondiente a una cadena con  $N = 10, 20, 40, 80, 100$  esferas.

dipolar que la penúltima, etc. Esto hace que los valores propios de la matriz distribución tengan degeneración 2. Así mismo se observa que hay una resonancia principal y varias resonancias secundarias. La amplitud de oscilación de la resonancia principal corresponde al valor propio  $\lambda_s$  y las resonancias secundarias quedan distribuidas uniformemente en el intervalo  $\lambda_i < \lambda_k < \lambda_s$ . De la gráfica se ve que a medida que aumenta el número de esferas en la cadena, las resonancias secundarias vecinas a la resonancia principal se acercan y disminuyen la amplitud de oscilación. Esto puede entenderse debido a que  $F_k$  satisface la regla de suma [Ec. (8)] y si  $N$  aumenta, el número de amplitudes de oscilación también aumenta y por lo tanto los valores de los  $F_k$  deben de disminuir. En la Fig. 3 se muestra la parte imaginaria de la SE para cadenas con diferente número de esferas. Se puede observar lo anteriormente dicho, los picos secundarios disminuyen en amplitud conforme aumenta el número de esferas y la posición del pico principal se corre ligeramente hacia frecuencias más bajas conforme aumenta el número de esferas en la cadena. Si se comparan las gráficas de la parte imaginaria de la SE entre la cadena de 80 esferas y la de 100, se encuentra una diferencia que es imperceptible. Con el propósito de verificar que las cadenas con más de 80 esferas tienen prácticamente la misma gráfica para la parte imaginaria de la SE, se incluyen condiciones periódicas a la cadena. Se partió de una cadena con  $N = 60$  esferas, luego se toman cadenas de igual distribución (cadenas replica) a ambos lados de la cadena original. El momento dipolar en cualquier sitio de la cadena original toma en cuenta la interacción entre todos los vecinos que lo rodean hasta llegar a la imagen en las cadenas réplica. Al calcular la SE con este sistema se encontró que los resultados son prácticamente los mismos que para una cadena de 80 esferas.

Se calcula la SE para diferentes fracciones de llenado y se grafica su parte imaginaria como función de la frecuencia. Se encuentra que sólo aparece un pico simétrico que se

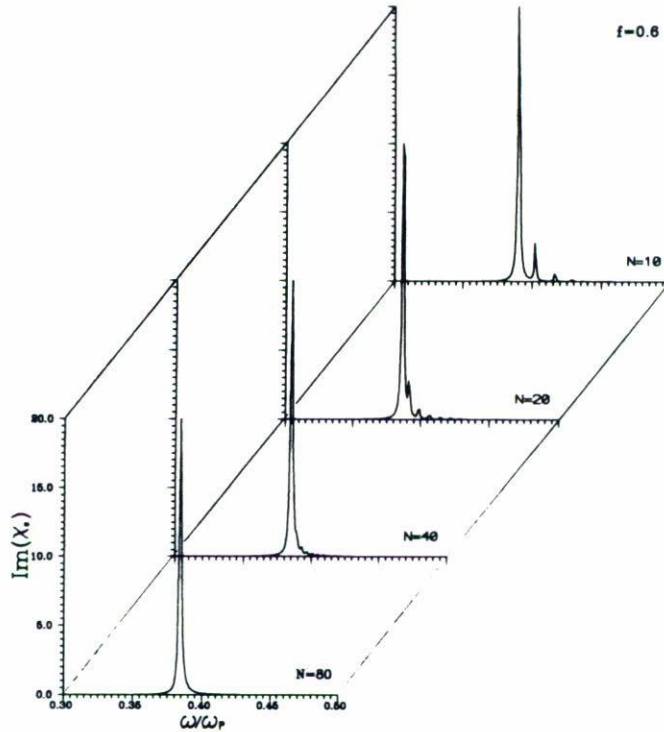


FIGURA 3. Se grafica la  $\text{Im}(\chi_e)$  contra la frecuencia  $\omega/\omega_p$  para una cadena ordenada y finita con diferente número de esferas en la cadena  $N = 10, 20, 40, 80$ . El valor de los parámetros usados en esta gráfica son:  $f = 0.6$ ,  $\epsilon_h = 2.37$ ,  $\omega_p\tau = 800$ . Los picos secundarios son consecuencia de que la cadena es finita.

recorre hacia frecuencias más bajas cuando la fracción de llenado aumenta. Este efecto está de acuerdo con las teorías de campo medio que se desarrollan para sistemas en tres dimensiones [1,2,4].

### 3.2. Distribución cuasi-ordenada

Al descubrir que la aleación AlMn en una fase sólida presenta simetría icosaédrica [17], tuvo lugar un intenso estudio sobre sistemas cuasi-periódicos. Estos sistemas están caracterizados por ser arreglos no-periódicos pero con una ley matemática que define la posición de los entes contribuyentes del sistema [18]. Por lo tanto, no son desordenados. Definimos nuestro sistema cuasi-periódico como una cadena formada por  $N_p$  puntos equidistantes separados una distancia  $R_0 = (L - 2a)/(N_p - 1)$ , en donde hay que acomodar  $N$  esferas. Al acomodar las esferas en los sitios de la red, cada sitio puede quedar vacío (V) o quedar ocupado (O). Una manera de construir estos sistemas es conocida como arreglo de Fibonacci. La regla de distribución para este caso es como sigue: se parte de las palabras O y VO, la nueva palabra se forma al unirle a la última palabra la penúltima,



y así sucesivamente hasta construir una palabra tan grande como se quiera. Las primeras palabras que se obtienen siguiendo esta regla son:

O  
 OV  
 OVO  
 OVOOV  
 OVOOVOVO  
 OVOOVOVOOVOV  
 OVOOVOVOOVOOVOVO.

La posición de las esferas para esta distribución puede escribirse como

$$Z_i = \text{Ent}[i(1 + r)] - 1 + a/L,$$

donde  $r = (1 + \sqrt{5})/2$  es el número de oro de Fibonacci y  $\text{Ent}[x]$  denota la parte entera de  $x$ . Cabe hacer la aclaración en este punto de que si  $r$  es un número racional  $r = a/b$ , la cadena es periódica y con periodo  $a + b$ .

Los elementos de la matriz distribución [Ec. (3)] para el caso cuasi-ordenado están dados por

$$A_{ij} = \frac{1 - \delta_{ij}}{|G_0(\text{Ent}[i(r + 1)] - \text{Ent}[j(r + 1)])|^3},$$

donde

$$G_0 = \frac{N - 1}{\text{Ent}[N(r + 1)] - 1}.$$

De la misma manera que la distribución ordenada, los elementos de matriz sólo dependen del número de esferas y de la posición relativa entre ellas y no de la fracción de llenado. Los valores propios de la matriz de distribución se arreglan en forma decreciente. En la Fig. 4 se grafican los valores propios en función de la posición que ocupan en el arreglo. Los rombos, cuadrados y círculos corresponden a las cadenas ordenadas, cuasi-ordenadas y desordenada, respectivamente. Los valores propios para la cadena cuasi-ordenada forman tres grupos y cada uno de estos grupos a su vez también forman tres grupos. Este fenómeno de autosimilaridad es característico de sistemas cuasi-ordenados. Además el intervalo en donde se encuentran los valores propios es más grande que para la cadena ordenada, esto se debe a que para una longitud fija  $L$ , si se van a distribuir  $N$  esferas con una secuencia en donde aparecen huecos de acuerdo a la distribución de Fibonacci, entonces es necesario distribuir  $N_p$  puntos en la longitud  $L(N_p = \text{Ent}[N(r + 1)] > N)$ ; por lo tanto, la separación entre los puntos de la red es menor y esto hace que la interacción dipolar entre sitios vecinos sea más grande y como consecuencia aumenta el intervalo de los valores que toman los valores propios. Por otro lado, el hecho de que la separación entre los puntos de la red disminuya limita a la fracción de llenado, ya que ahora el

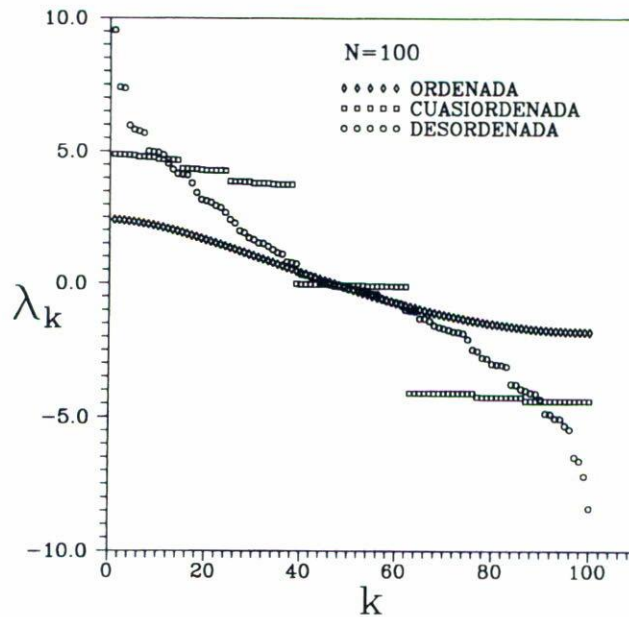


FIGURA 4. Los valores propios,  $\lambda_k$ , de la matriz de distribución se arreglan en forma decreciente, luego se grafican en función de la posición que ocupan en el arreglo. Las gráficas son para los arreglos: ordenado, cuasi-ordenado y desordenado. El número de esferas que se usó en cada arreglo fue de 100 y la fracción de llenado para el arreglo desordenado fue de  $f = 0.6$ .

máximo valor que puede tomar es  $f = 0.618$ , y a este valor corresponde el caso en que las esferas vecinas se tocan y el hueco es del tamaño justo para que quepa una esfera. En la Fig. 5 se muestra la parte imaginaria de la susceptibilidad eléctrica en función de  $\omega/\omega_p$  para diferentes fracciones de llenado. Como consecuencia de la distribución en tres grupos de los valores propios aparecen en la gráfica tres paquetes de picos que se separan conforme aumenta la fracción de llenado  $f$ . Para bajas fracciones de llenado el único pico de resonancia es el que corresponde al de una esfera aislada, cuando aumenta la fracción de llenado aumenta el radio de las esferas y, por lo tanto, aumenta la interacción dipolar y esto hace que se separen los picos.

### 3.3. Distribución desordenada

En esta distribución se acomodan las esferas inicialmente en los sitios de una red ordenada (en este caso habrá tantos puntos como esferas estemos considerando) y luego aleatoriamente se escoge una esfera y se mueve una distancia al azar, con el requisito de que no se traslape con sus vecinas, luego se escoge otra al azar y así se repite el proceso  $N^2$  veces con el propósito de que todas las esferas se muevan al menos una vez. Así creamos al final un sistema desordenado completamente al azar. En este caso los valores propios de la matriz distribución dependen directamente de la fracción de llenado y habrá un conjunto de valores propios para cada arreglo desordenado que se obtenga. En la Fig. 4 se muestra con círculos una distribución característica de valores propios para un arreglo arbitrario de esferas. Puede verse que aumenta aún más el intervalo en donde se encuentran los valores

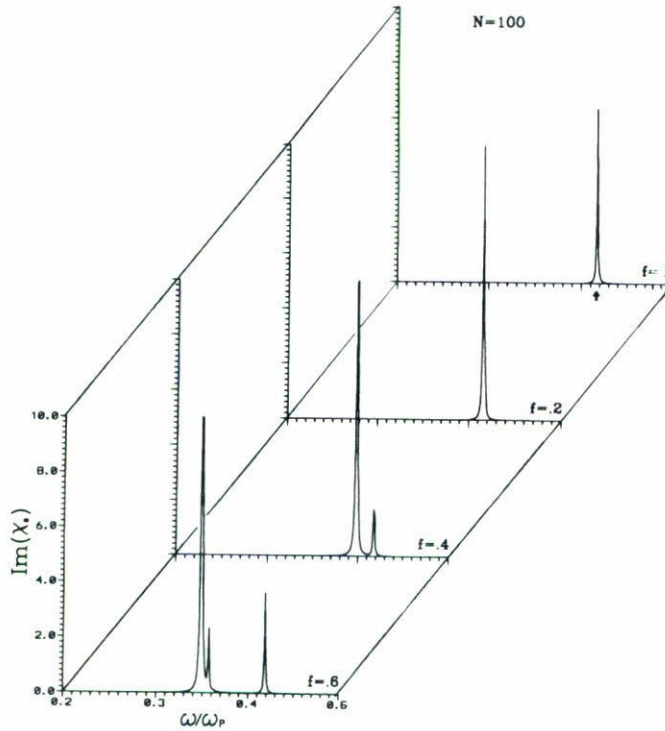


FIGURA 5. Se grafica la  $\text{Im}(\chi_e)$  contra la frecuencia  $\omega/\omega_p$  para una cadena cuasi-ordenada para diferentes fracciones de llenado  $f = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6$ . El valor de los parámetros usados en esta gráfica son:  $\epsilon_h = 2.37$ ,  $\omega_p\tau = 800$  y  $N = 100$ . La flecha en la gráfica  $f = 0.1$  corresponde a la posición de la resonancia de una esfera aislada.

propios. Esto se debe a que los centros de las esferas pueden ahora estar más cerca, sobre todo cuando la fracción de llenado es pequeña y esto origina que la interacción dipolar aumente. En la figura está representado el caso en que  $f = 0.6$ , la cual origina una dispersión moderada de valores propios.

De la misma manera como se hizo con la cadena ordenada, se impusieron condiciones periódicas al sistema para tratar de evitar el efecto de los extremos de la cadena. Se partió de una cadena con  $N = 60$  esferas, luego se hizo desorden y se tomaron cadenas de igual distribución (cadenas réplica) en ambos lados de la cadena original. En la Fig. 6 se muestra la parte imaginaria de la SE en función de la frecuencia para diferentes promedios en las configuraciones, esto es, la primera gráfica  $N_c = 1$  corresponde al cálculo de la susceptibilidad eléctrica de una configuración al azar de esferas. Para la gráfica con  $N_c = 5$  significa que se ha encontrado la susceptibilidad eléctrica para 5 configuraciones diferentes y se han promediado. Lo mismo se hace para las demás gráficas hasta llegar a  $N_c = 1000$ . Puede verse de esta secuencia de gráficas que la primera  $N_c = 1$  representa una distribución de picos completamente arbitraria. Si se calcula la susceptibilidad

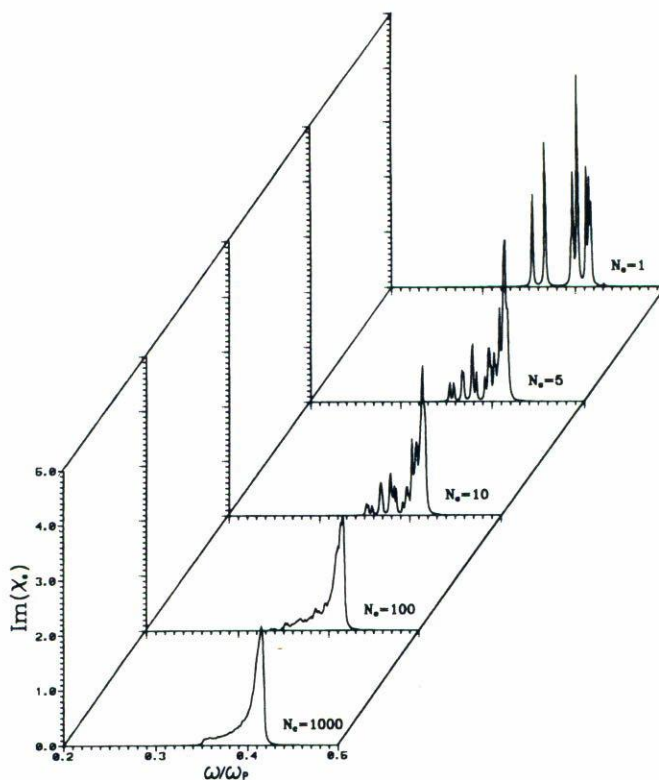


FIGURA 6. Se grafica el promedio de la  $\text{Im}(\chi_e)$  contra la frecuencia  $\omega/\omega_p$  para la cadena desordenada.  $N_c = 1, 5, 10, 100, 1000$  señala el número de configuraciones que se toman en el promedio. El valor de los parámetros usados en esta gráfica son:  $f = .3$ ,  $\epsilon_h = 2.37$ ,  $\omega_p\tau = 800$  y  $N = 60$ . Para  $N_c = 1000$  la  $\text{Im}(\chi_e)$  tiene una curva suave bien definida.

eléctrica para otra configuración se encuentra otra distribución de picos completamente diferente; sin embargo, cuando se toma el promedio sobre diferentes configuraciones, la susceptibilidad eléctrica tiende a una curva suave bien definida, como se puede ver para el caso  $N_c = 1000$ . Lo que indica este resultado es que el promedio converge. En la Fig. 7 se muestra la parte imaginaria de la SE en función de la frecuencia para diferentes fracciones de llenado. Para  $f = 0.1$  el pico corresponde al pico de resonancia de una esfera aislada. Esto se debe a que para esta fracción de llenado las esferas se encuentran tan separadas que la interacción dipolar entre ellas es despreciable y el único pico que se obtiene es el que corresponde al de una esfera aislada. Para  $f = 0.3$  hay una súbita subida y un ensanchamiento en el pico. A esta concentración la interacción dipolar es importante y la interacción entre las partículas desordenadas origina el ensanchamiento que presenta la gráfica. En las subsecuentes gráficas se ve que el ensanchamiento del pico se va haciendo cada vez mayor y el pico se va desapareciendo, esto sucede hasta la fracción de llenado

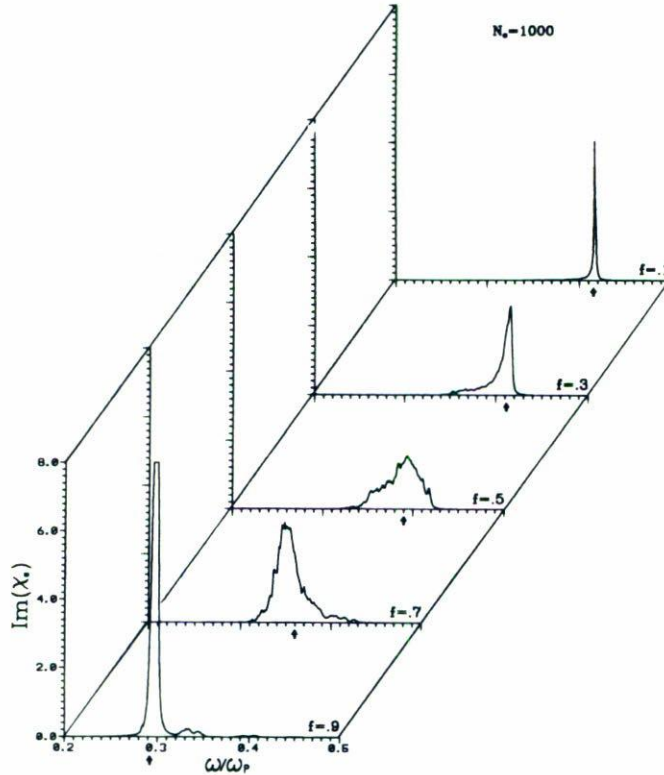


FIGURA 7. Se grafica el promedio de la  $\text{Im}(\chi_e)$  contra la frecuencia  $\omega/\omega_p$  para una cadena desordenada para diferentes fracciones de llenado  $f = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ . El valor de los parámetros usados en esta gráfica son:  $\epsilon_h = 2.37$ ,  $\omega_p\tau = 800$ ,  $N = 60$  y  $N_c = 1000$ . Se observa un movimiento del pico hacia un valor de la frecuencia más baja. Para  $f = 0.5$  el pico desaparece y esto corresponde al estado de mayor desorden.

$f = 0.5$ . A partir de esta fracción de llenado empieza a aparecer al mismo tiempo un pico principal que se corre hacia frecuencias más bajas y justo para  $f = 0.9$  casi se obtiene el pico que corresponde al caso ordenado. Esto se debe a la manera como se está produciendo el desorden ya que para fracciones de llenado tan grandes las esferas casi se tocan, así que se tiene muy poco espacio entre ellas para producir desorden.

#### 4. CONCLUSIONES

Partiendo del conocimiento de los valores propios de la matriz de distribución, se obtiene información sobre los picos de absorción asociados a la parte imaginaria de la susceptibilidad eléctrica. Se analiza el caso ordenado y se encuentra que el efecto de los extremos en una cadena finita sólo son importantes cuando ésta tiene un número relativamente

pequeño de esferas. Además encontramos que el corrimiento del pico de absorción es equivalente al que se obtiene con teorías de campo medio aplicado a sistemas tridimensionales. En el caso cuasi-ordenado se encuentra que los valores propios acusan el fenómeno de autosimilaridad, característico de estos sistemas. En el caso desordenado se encuentra que si bien el espectro de absorción parece no tener ningún comportamiento entendible, el promedio sí tiende a una curva suave bien definida. El ensanchamiento de los picos de absorción es debido al desorden del sistema, ya que este desorden origina que algunas esferas se encuentren muy próximas y esto produce una interacción dipolar grande que origina estados resonantes a menor frecuencia y el promedio de estas interacciones produce el ensanchamiento en los pisos.

#### AGRADECIMIENTOS

Queremos agradecer las valiosas observaciones y acertados comentarios de Rubén G. Barrera y W. Luis Mochán.

#### REFERENCIAS

1. J.C. Maxwell-Garnett, *Philos. Trans. R. Soc. London* **203** (1904) 385.
2. B.N.J. Pearsson and A. Liebsch, *Solid State Commun.* **44** (1982) 1637.
3. A. Liebsch and P. Villaseñor González, *Phys. Rev.* **B29** (1984) 6907.
4. R.G. Barrera, G. Monsivais and W.L. Mochán, *Phys. Rev.* **B38**, (1988) 5371.
5. R. Fuchs and F. Claro, *Phys. Rev.* **B39** (1989) 3875.
6. R.G. Barrera, G. Monsivais, W.L. Mochán and E. de Anda, *Phys. Rev.* **B39** (1989) 9998.
7. B. Rojas and F. Claro, *Phys. Rev.* **B34** (1986) 3730.
8. B. Cichocki and B.U. Felderhof, *J. Chem. Phys.* **90** (1989) 4960.
9. C.G. Granqvist and R.A. Buhrman, *J. Appl. Phys.* **47** (1976) 2200.
10. C.G. Granqvist and O. Hunderi, *Phys. Rev.* **B16** (1977) 3513.
11. K.D. Cumings, J.C. Garland, and D.B. Tanner, *Phys. Rev.* **B30** (1984) 4170.
12. Sung-Ik, T.W. Noh, J.R. Gaines, Y.H. Ko and E.R. Gaines, *Phys. Rev.* **B37** (1988) 2918.
13. W.T. Doyle, *Phys. Rev.* **B39** (1989) 9852.
14. F. Claro and F. Brouers, *Phys. Rev.* **B40** (1989) 3261.
15. J.M. Gerardy and Ausloos, *Phys. Rev.* **B22** (1979) 4950.
16. F. Claro, *Phys. Rev.* **B30** (1984) 4989.
17. D. Schechtman, I. Blech, D. Gratias and J.W. Cahn, *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984) 1951.
18. J.M. Luck and D. Petritis, *J. Stat. Phys.* **42** (1986) 289.