

# Función de brillo: superficies rugosas en una y dos dimensiones

JOSUÉ ALVAREZ-BORREGO

*División de Física Aplicada, Departamento de Optica  
Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada  
Km. 107 Carretera Tijuana-Ensenada, Ensenada, B.C., México*

Recibido el 27 de febrero de 1995; aceptado el 9 de marzo de 1995

**RESUMEN.** Se deduce de una manera sencilla la función de brillo tanto en una como en dos dimensiones mediante la óptica geométrica. La función de brillo es de gran utilidad para calcular algunas propiedades estadísticas de la superficie marina por medio de fotografías aéreas y es responsable de la formación de los patrones de brillo que constituyen la imagen. Esta función relaciona las pendientes de la superficie con los patrones de brillo que forman a esta última.

**ABSTRACT.** Glitter function in one and two dimensions is derived via geometric optics. The glitter function is very important in the mathematical analysis for obtaining statistical properties of the sea surface using aerial photographs and describe the glitter patterns which create the image. This function gives the relationship between the slopes of the surface and the glitter patterns.

PACS: 42.79.Yd

## 1. INTRODUCCIÓN

Recientemente Alvarez-Borrego [1,3] ha presentado una nueva metodología para calcular algunas propiedades estadísticas de la superficie marina por medio de fotografías aéreas. Con cielo despejado, la imagen se forma con luz del sol reflejada por la frontera aire-agua. Dicha imagen muestra variaciones grandes de intensidad debido a las reflexiones especulares de la luz sobre la superficie; esta imagen recibe el nombre de patrón de brillo (Fig. 1). La relación entre la imagen formada por un sistema óptico en la película de la cámara fotográfica y el perfil de la superficie que refleja la luz hacia el detector es compleja. La relación entre las pendientes superficiales y la intensidad de la imagen es más directa y se puede representar por medio de una función que denominaremos la función de brillo. Empleando esta función encontraremos una relación entre la función de autocorrelación de las variaciones de intensidad en la imagen y la función de autocorrelación de las alturas de la superficie. Como un subproducto, se puede conocer también la variancia de las alturas de la superficie a partir de la variancia de las intensidades en la imagen [3].

Alvarez-Borrego [2,4] derivó en forma rigurosa, mediante teorías de difracción y de coherencia, la forma analítica de la función de brillo tanto en una como en dos dimensiones. Debido a la importancia que esta función de brillo tiene en el análisis de superficies marinas vía percepción remota, esta publicación tiene como objetivo derivar de nuevo esta función de brillo, pero de una manera mucho más simple. Para ello utilizaré la herramienta de la

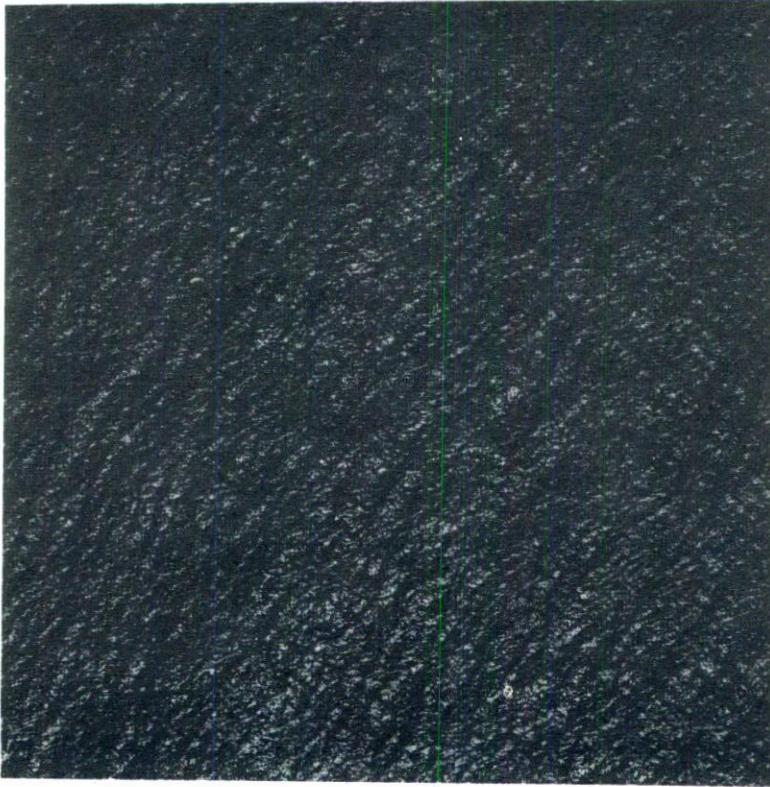


FIGURA 1. Imagen de un patrón de brillo de la superficie del mar.

óptica geométrica, de tal manera que pueda visualizarse la derivación de esta función de brillo sin necesidad de conocer las teorías rugosas de difracción y de coherencia.

Esta función analítica describe el brillo que se produce cuando la luz que proviene de la fuente se refleja sólo una vez en la superficie. De esta manera, puede observarse que la imagen de la superficie consiste de regiones brillantes y oscuras que forman un patrón de brillo. Este patrón es codificado en dos niveles escogiendo un umbral adecuado después de analizar el histograma de intensidad de la imagen. A los valores brillantes se les asigna el valor de uno y a las regiones oscuras se les asigna el valor de cero. Los patrones de brillo obtenidos en el plano imagen contienen información estadística de las alturas de la superficie, ya que, dependiendo de la pendiente local, la luz reflejada por cada punto de la superficie contribuirá o no a la imagen. Es claro, entonces, que estas fotografías tienen información de la distribución de pendientes superficiales, y es plausible suponer que ciertas propiedades estadísticas de la superficie pueden ser determinadas por medio de un análisis de dichas fotografías.

En este trabajo primeramente se describe la geometría del problema considerado. En este estudio están involucrados tres procesos aleatorios, relacionados entre sí: el perfil de la superficie,  $\zeta(x)$ ; sus pendientes,  $\Pi(x)$ ; y su imagen,  $i(x)$ . Como un segundo proceso se deriva, mediante la óptica geométrica, la función de brillo tanto en una como en dos dimensiones, la cual es responsable de la formación de los patrones de brillo que constituyen la imagen. Esta función relaciona las pendientes de la superficie con los patrones de brillo

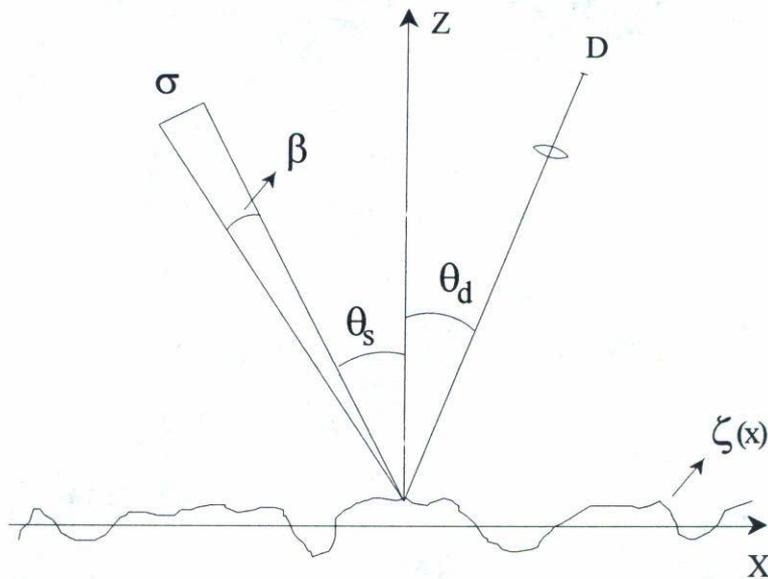


FIGURA 2. Diagrama esquemático de la situación física.

que la forman. En esta derivación no se está considerando transmisión de luz de un medio a otro sino simplemente la reflexión especular, tampoco es necesario un valor exacto de la amplitud de la luz reflejada, es por esto que los coeficientes de reflexión de Fresnel no son considerados. Además, no se tiene un intervalo exacto de los valores de pendiente válidos en esta aproximación, pero generalmente los intervalos en los cuales numéricamente el modelo ha sido aplicado con resultados satisfactorios ha sido de cero a uno en el valor de la pendiente. Para aplicaciones reales como en la superficie del mar, los intervalos de los valores de pendientes que se han encontrado mediante mediciones in situ ha sido de cero a 0.45. De tal manera que la aplicación del modelo al análisis estadístico de superficies reales como la superficie marina es viable.

## 2. DESCRIPCIÓN DE LA SITUACIÓN FÍSICA

La situación física se describe esquemáticamente en la Fig. 2. Se ilumina la superficie con una fuente incoherente y uniforme de extensión angular  $\sigma$ , y longitud de onda  $\bar{\lambda}$ . Se forma su imagen mediante un sistema óptico libre de aberraciones en el plano D. El ángulo de incidencia,  $\theta_s$ , se define como el ángulo entre la dirección de incidencia de la luz y la normal a la superficie promedio. Entonces, en la Fig. 1,  $\theta_s$  representa el ángulo de incidencia promedio que subtiende el sistema óptico de detección con la normal a la superficie promedio. La luz de la fuente se refleja en la superficie sólo una vez y, dependiendo de la pendiente, la luz reflejada contribuirá o no a la imagen de la superficie. La imagen consiste entonces de regiones brillantes y oscuras que forman un "patrón de brillo".

Los "patrones de brillo" obtenidos en el plano de la imagen contienen información sobre la topografía de la superficie. En el presente trabajo este patrón se codifica en una señal de

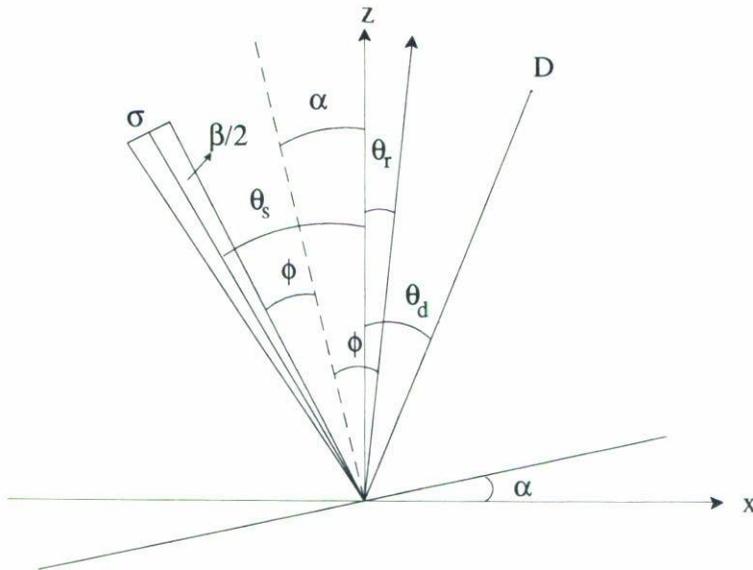


FIGURA 3. Geometría del experimento.

dos niveles. Cuando en la imagen tenemos un punto brillante, el valor que se le asigna es uno y cuando tenemos un punto oscuro, el valor asignado es cero. Esto se hace de acuerdo a un histograma que se obtiene de la imagen para determinar el umbral. De esta manera, el patrón de brillo que originalmente contenía varios valores de intensidad, se convierte en un patrón de brillo que adquiere sólo dos valores, unos y ceros. Esta manera de tratar la información es conveniente por varios motivos, entre otros, facilita el procesado de la información, y no requiere un intervalo dinámico grande del sistema de detección. En este punto, es pertinente notar que el problema de estimar el espectro o la correlación de procesos estocásticos a partir de procesos truncados de esta manera, ha sido estudiado por varios autores. En particular, podemos mencionar el trabajo pionero de Van Vleck y Middleton [5], y algunas aplicaciones recientes en el contexto de teoría de "speckle" por Pedersen [6], Ohtsubo [7] y Marron y Morris [8].

### 3. DERIVACIÓN DE LA FUNCIÓN DE BRILLO BASADA EN LA ÓPTICA GEOMÉTRICA

#### 3.1. Caso unidimensional

La Fig. 3 muestra en detalle la geometría del experimento y los diferentes ángulos involucrados. En esta figura,  $\alpha$  representa el ángulo entre el eje  $x$  y el plano tangente a la superficie en el punto  $(x_0, \zeta(x_0))$ ,  $\theta_d$  es el ángulo entre la vertical  $z$  y el eje óptico del sistema de detección y  $\theta_s$  es el ángulo entre la vertical y la posición media de la fuente. Los ángulos subtendidos por los diámetros de la fuente y el sistema de detección están representados por  $\beta$  y  $\delta d$ , respectivamente. El ángulo  $\theta_r$  representa el ángulo entre la dirección de un rayo proveniente del punto medio de la fuente reflejado especularmente y la vertical.

De esta figura se puede determinar el intervalo de ángulos que reflejan especularmente hacia el sistema de detección. Denotaremos el ángulo entre la posición media de la fuente y la normal a la superficie por  $\phi$ . Este ángulo puede escribirse de las siguientes dos maneras:

$$\phi = \theta_s - \alpha, \quad (1a)$$

$$\phi = \theta_r + \alpha. \quad (1b)$$

De estas dos igualdades se obtiene una expresión para el ángulo especular:

$$\theta_r = \theta_s - 2\alpha. \quad (2)$$

Debido a que la fuente tiene un tamaño finito, hay varias direcciones de incidencia que son reflejadas especularmente hacia la cámara. Las direcciones  $\theta_{os}$ , para las cuales hay rayos incidentes están determinadas por la condición

$$\theta_s - \frac{\beta}{2} \leq \theta_{os} \leq \theta_s + \frac{\beta}{2}; \quad (3)$$

es decir, que la función que describe angularmente a la fuente,  $\sigma(\theta_{os})$ , se puede escribir como

$$\sigma(\theta_{os}) = \text{rect} \left[ \frac{\theta_{os} - \theta_s}{\beta} \right], \quad (4)$$

donde  $\text{rect}(x)$  representa la la función rectángulo [9].

Para un punto en la superficie con pendiente  $\tan(\alpha)$ , y una dirección de incidencia,  $\theta_{os}$ , el ángulo de reflexión  $\theta = \theta_{os} - 2\alpha$ . Entonces, la proyección angular de esta fuente,  $\sigma_R(\theta)$ , después de la reflexión, será •

$$\theta_s - \frac{\beta}{2} - 2\alpha \leq \theta \leq \theta_s + \frac{\beta}{2} - 2\alpha, \quad (5a)$$

$$\sigma_R(\theta) = \text{rect} \left( \frac{\theta - \theta_r}{\beta} \right), \quad (5b)$$

en donde hemos tomado en cuenta la Ec. (2).

Por otro lado, la pupila del sistema de detección se puede representar por la función

$$P(\theta) = \text{rect} \left( \frac{\theta - \theta_d}{\delta d} \right). \quad (6)$$

La intensidad de luz,  $I$ , que llega al plano de detección  $D$  depende del traslape entre las funciones  $\sigma_R(\theta)$  y  $P(\theta)$ , y se puede aproximar como

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_R(\theta) P(\theta) d\theta. \quad (7)$$

En situaciones prácticas  $\delta d$  es mucho menor que  $\beta$  y podemos aproximar  $P(\theta) \approx \delta(\theta - \theta_d)$  donde  $\delta$  es la delta de Dirac, de manera que

$$I \approx \sigma_R(\theta_d) \approx \text{rect} \left( \frac{\theta_d - \theta_r}{\beta} \right) \tag{8}$$

Es decir, que tendremos luz en el plano imagen cuando

$$\theta_r - \frac{\beta}{2} \leq \theta_d \leq \theta_r + \frac{\beta}{2}, \tag{9}$$

y utilizando el hecho de que  $\theta_r = \theta_s - 2\alpha$ , tenemos que

$$\frac{\theta_s - \theta_d}{2} - \frac{\beta}{4} \leq \alpha \leq \frac{\theta_s - \theta_d}{2} + \frac{\beta}{4}. \tag{10}$$

Definiendo  $\Pi = \tan \alpha$ ,  $\gamma = (\theta_s - \theta_d)/2$  y  $\Pi_0 = \tan \gamma$ , y utilizando la relación  $\tan(\gamma \pm \frac{\beta}{4}) \approx \tan \gamma \pm (1 + \tan^2 \gamma) \frac{\beta}{4}$ , válida para  $\beta/4$  pequeños, obtenemos la siguiente condición para la pendiente:

$$\Pi_0 - (1 + \Pi_0^2) \frac{\beta}{4} \leq \Pi \leq \Pi_0 + (1 + \Pi_0^2) \frac{\beta}{4}. \tag{11}$$

Encontramos entonces la “función de brillo”,  $B(\Pi)$  que se puede escribir de la siguiente manera:

$$B(\Pi) = \text{rect} \left[ \frac{\Pi - \Pi_0}{(1 + \Pi_0^2)\beta/2} \right]. \tag{12}$$

La expresión (12) nos dice que la geometría del problema selecciona una región de las pendientes de la superficie y los codifica como puntos brillantes en la imagen  $i(x)$ . Una ilustración de los diferentes procesos se muestra en la Fig. 4.

### 3.2. Caso bidimensional

Para una superficie bidimensional, denotamos por  $\alpha_x$  y  $\alpha_y$  los ángulos que el eje  $x$  y el eje  $y$  hacen con el plano tangente a la superficie en un punto dado;  $\theta_d$  es el ángulo entre la vertical,  $z$  y el eje óptico del sistema de detección, y  $\theta_s$  es el ángulo entre la vertical y la posición media de la fuente. Los ángulos subtendidos por los diámetros de la fuente y el sistema de detección son representados por  $\beta$  y  $\delta d$ , respectivamente. Los ángulos de reflexión especular para las direcciones  $x$  y  $y$  están dados como

$$\begin{aligned} \theta_r &= \theta_s - 2\alpha_x, \\ \Theta_r &= \theta_s - 2\alpha_y. \end{aligned} \tag{13}$$

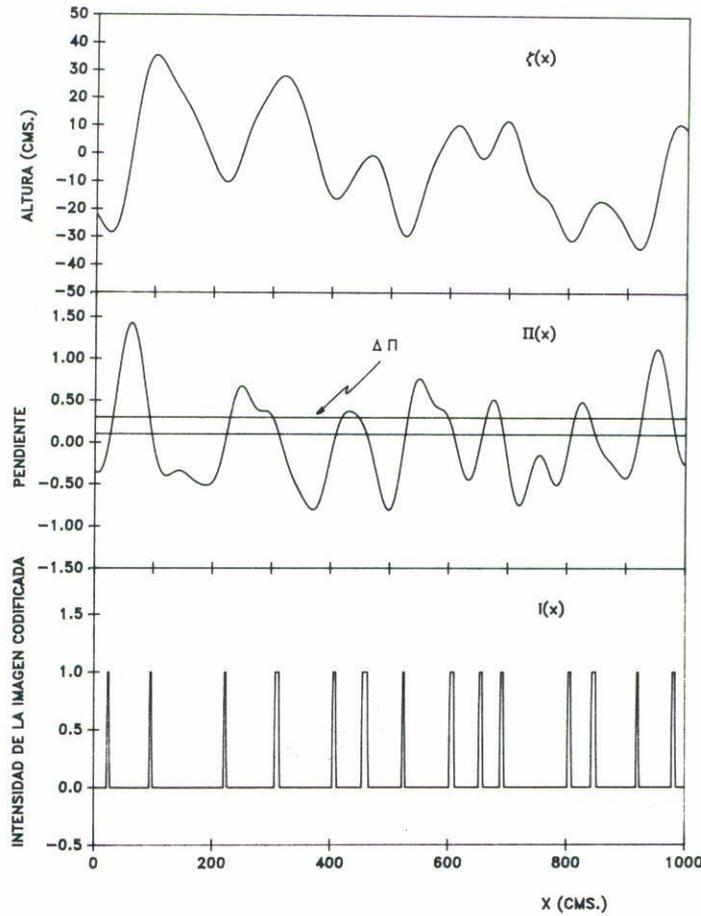


FIGURA 4. Los tres procesos involucrados mostrando la región seleccionada por  $B(\Pi)$ .

De nuevo, debido a que la fuente tiene un tamaño finito, no se tiene una sola dirección de incidencia sobre la superficie. Los intervalos angulares sobre los cuales tenemos luz incidente están dados por las condiciones

$$\theta_s - \frac{\beta}{2} \leq \theta_{os} \leq \theta_s + \frac{\beta}{2}, \tag{14a}$$

$$\theta_s - \frac{\beta}{2} \leq \Theta_{os} \leq \theta_s + \frac{\beta}{2}. \tag{14b}$$

Es decir, la función que describe angularmente a la fuente,  $\sigma(\theta_{os}, \Theta_{os})$ , se puede aproximar como

$$\sigma(\theta_{os}, \Theta_{os}) = \text{Circ} \left( \frac{\theta_{os} - \theta_s}{\beta}, \frac{\Theta_{os} - \theta_s}{\beta} \right), \tag{15}$$

en donde,  $\text{Circ}(x, y)$  representa la función círculo [9].

La proyección angular de esta fuente,  $\sigma_R(\theta, \Theta)$ , después de la reflexión, está dada por las condiciones

$$\theta_s - \frac{\beta}{2} - 2\alpha_x \leq \theta_{os} - 2\alpha_x \leq \theta_s + \frac{\beta}{2} - 2\alpha_x, \tag{16a}$$

$$\theta_s - \frac{\beta}{2} - 2\alpha_y \leq \Theta_{os} - 2\alpha_y \leq \theta_s + \frac{\beta}{2} - 2\alpha_y, \tag{16b}$$

que se pueden resumir como

$$\sigma_R(\theta, \Theta) = \text{Circ} \left( \frac{\theta - \theta_r}{\beta}, \frac{\Theta - \Theta_r}{\beta} \right). \tag{17}$$

Por otro lado, la pupila bidimensional del sistema de detección se puede representar por la función

$$P(\theta, \Theta) = \text{Circ} \left( \frac{\theta - \theta_d}{\delta d_x}, \frac{\Theta - \Theta_d}{\delta d_y} \right). \tag{18}$$

Como en el caso unidimensional, la intensidad de la luz,  $I$ , que llegará al plano de detección  $D$  depende del traslape entre las funciones  $\sigma_R(\theta, \Theta)$  y  $P(\theta, \Theta)$ , y se puede aproximar como

$$I = \int \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sigma_R(\theta, \Theta) P(\theta, \Theta) d\theta d\Theta. \tag{19}$$

En situaciones prácticas  $\delta d$  es mucho menor que  $\beta$  y podemos aproximar  $P(\theta, \Theta) \approx \delta(\theta - \theta_d)\delta(\Theta - \Theta_d)$ , de manera que

$$I \approx \sigma_R(\theta_d, \Theta_d) \approx \text{Circ} \left( \frac{\theta_d - \theta_r}{\beta}, \frac{\Theta_d - \Theta_r}{\beta} \right). \tag{20}$$

Es decir, que llegará luz al plano de detección cuando

$$\theta_r - \frac{\beta}{2} \leq \theta_d \leq \theta_r + \frac{\beta}{2}, \tag{21a}$$

$$\Theta_r - \frac{\beta}{2} \leq \Theta_d \leq \Theta_r + \frac{\beta}{2}, \tag{21b}$$

y utilizando el hecho de que  $\theta_r = \theta_s - 2\alpha_x$ ,  $\Theta_r = \theta_s - 2\alpha_y$ , tenemos que

$$\frac{\theta_s - \theta_d}{2} - \frac{\beta}{4} \leq \alpha_x \leq \frac{\theta_s - \theta_d}{2} + \frac{\beta}{4}, \tag{22a}$$

$$\frac{\theta_s - \Theta_d}{2} - \frac{\beta}{4} \leq \alpha_y \leq \frac{\theta_s - \Theta_d}{2} + \frac{\beta}{4}, \tag{22b}$$

de donde se puede observar que si el área de detección tiene simetría circular, los intervalos para  $\alpha_x$  y  $\alpha_y$  son iguales, en otras palabras,  $\theta_d = \Theta_d$ .

Definiendo  $\Pi_x = \tan \alpha_x$ ,  $\Pi_y = \tan \alpha_y$ ,  $\gamma = (\theta_s - \theta_d)/2$ , y  $\Pi_0 = \tan \gamma$  y utilizando la misma relación que en el caso unidimensional para  $\tan(\gamma \pm \beta/4)$ , obtenemos las siguientes condiciones para las pendientes:

$$\Pi_0 - (1 + \Pi_0^2) \frac{\beta}{4} \leq \Pi_x \leq \Pi_0 + (1 + \Pi_0^2) \frac{\beta}{4}, \quad (23a)$$

$$\Pi_0 - (1 + \Pi_0^2) \frac{\beta}{4} \leq \Pi_y \leq \Pi_0 + (1 + \Pi_0^2) \frac{\beta}{4}. \quad (23b)$$

Definimos entonces la "función de brillo",  $B(\Pi_x, \Pi_y)$ , como la función que determina la cantidad de luz que llega al plano de detección  $D$ , como función de las pendientes:

$$B(\Pi_x, \Pi_y) = \text{Circ} \left( \frac{\Pi_x - \Pi_0}{(1 + \Pi_0^2) \frac{\beta}{2}}, \frac{\Pi_y - \Pi_0}{(1 + \Pi_0^2) \frac{\beta}{2}} \right) \quad (24)$$

Al igual que la expresión (12), la Ec. (24) nos dice que la geometría del problema selecciona una región de las pendientes de la superficie, traduciendo estas pendientes en puntos brillantes en la imagen  $i(x, y)$ .

#### 4. CONCLUSIONES

Se derivó, mediante la óptica geométrica, la función de brillo para el caso uni y bidimensional. La función de brillo es responsable de la formación de los patrones de brillo que constituyen la imagen. Esta función relaciona las pendientes con los patrones de brillo que forman la imagen. A partir de la información del patrón de brillo es posible obtener información del espectro de energía o de la función de correlación de las alturas de la superficie.

#### REFERENCIAS

1. J. Alvarez-Borrego, *Journal of Geophysical Research-Oceans* **98** (1993) 10245.
2. J. Alvarez-Borrego, *Journal of Modern Optics* **40** (1993) 2081.
3. J. Alvarez-Borrego, *Journal of Modern Optics* **42** No. 2 (1995) 279.
4. J. Alvarez-Borrego, *Optics Communications* **113** (1995) 353.
5. J.H. Van Vleck y D. Middleton, *Proceedings IEEE* **54** (1966).
6. H.M. Pedersen, *Journal of the Optical Society of America* **A1** (1984) 850.
7. J. Ohtsubo, *Applied Optics* **24** (1985) 746.
8. J. Marron y G. Michael Morris, *Applied Optics* **25** (1986) 789.
9. Jack D. Gaskill, *Linear systems, Fourier transforms, and Optics*, John Wiley & Sons, New-York (1978) Chapter 3.