

# Decaimiento de vórtices barotrópicos en el plano $f$

R.F. GARCÍA SÁNCHEZ Y J. OCHOA

*Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada  
22800 Ensenada, Baja California, México.*

Recibido el 29 de septiembre de 1994; aceptado el 21 de abril de 1995

**RESUMEN.** Se examina analíticamente, en su aproximación lineal, el decaimiento por fricción de un vórtice barotrópico simétrico en un océano no acotado lateralmente y de fondo plano. Las ecuaciones que describen la evolución se obtienen por medio de una expansión perturbativa de las ecuaciones de Navier-Stokes adimensionales, con base en los números pequeños de Ekman y Rossby. A partir del sistema se obtienen las ecuaciones que dictan la evolución tanto para la superficie libre como para la velocidad azimutal, cuyas soluciones quedan en términos de integrales de funciones de Bessel. En la ecuación para la vorticidad potencial se observan claramente los tres efectos presentes en la aproximación lineal. Dos de ellos provocan compresión o estiramiento de las líneas de vórtice: el bombeo de Ekman, producto de la fricción del fondo, y el movimiento de la superficie libre. El tercer efecto está dado por la difusión lateral de vorticidad. Estos tres efectos han sido discutidos en la literatura, pero no se habían incorporado todos en la solución, como sucede en este trabajo. Se muestran explícitamente estos efectos en el ejemplo de un vórtice cuya elevación inicial de la superficie libre es gaussiana. Se presenta también la reducción del sistema, y su solución, a un modelo de gravedad reducida. En éste, el bombeo de Ekman desaparece al permitirse el deslizamiento sin fricción sobre la capa inerte.

**ABSTRACT.** We examine analytically, within the linear approximation, the decay by friction of an azimuthal symmetric barotropic vortex in a flat bottomed and laterally unbounded ocean. The governing equations are obtained, using the smallness of the Ekman and Rossby numbers, by a perturbation technique on the dimensionless version of the Navier-Stokes equations. Closed equations for either the surface elevation or azimuthal velocity component, with solutions via the Fourier-Bessel transform, follow from the system. Three effects are left in the linear approximation, best described in the potential vorticity equation. Two of these effects have to do with the shrinking or stretching of the water column: the first one is the bottom Ekman pumping, which is the result of the bottom friction, and the second one is the rate of change of the surface elevation. The third effect is the lateral diffusion of vorticity by viscous processes. All these three effects have been described in the literature but a solution including them all is the contribution of this work. These effects are explicitly shown in an example of a vortex with a surface elevation initially gaussian. For completeness, the reduction of the system and its integral solution for a reduced gravity model is also shown. In this model the bottom Ekman pumping disappears since the active upper layer is allowed to slip without friction over the motionless lower layer.

PACS: 66.20.+d; 92.40.Cy; 47.32.-y

## 1. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de técnicas observacionales y el incremento de mediciones en el océano, puso de manifiesto la presencia de una gran cantidad de estructuras vorticales o remolinos.

Dada su relevancia en flujos geofísicos de gran escala, el estudio de éstas ha tenido un gran auge en los últimos 30 años.

Por medio de estudios analíticos, numéricos, de experimentos en laboratorio y observaciones directas, se han logrado importantes avances en el entendimiento de la dinámica general de vórtices. Los principales temas tratados hasta ahora son: su formación, su propagación, su estabilidad, el forzamiento producido por el viento, su intercambio de calor con la atmósfera, el efecto debido a la topografía, la disipación de su energía y el campo de velocidad circundante. Hopfinger y van Heijst [1] presentan una revisión de trabajos realizados en algunas de esas direcciones.

Uno de los rasgos más sorprendente de los remolinos oceánicos observados es que persisten por largos períodos. Por ejemplo, Elliot [2] estima que el tiempo típico de vida de un remolino en el Golfo de México es de un año; McWilliams [3] señala que los remolinos del Mediterráneo tienen una mayor persistencia y estima que son de dos a tres años; Joyce [4], en una revisión de trabajos realizados en el sistema de la Corriente del Golfo, señala que el tiempo de vida de remolinos en esta región oscila entre dos y nueve meses.

Aunque existen varios mecanismos que pueden contribuir a la persistencia o destrucción de un vórtice oceánico [5,6,7], el objetivo en este trabajo es estudiar la evolución y decaimiento de un vórtice cuando la fricción (viscosidad) juega el papel fundamental. Para ello se utiliza un modelo cuasigeostrófico barotrópico, donde la ecuación básica es aquella que gobierna la vorticidad potencial, en un océano con fondo plano ilimitado lateralmente y en el plano  $f$ .

En la aproximación lineal, la evolución del vórtice se manifiesta por una redistribución continua de su momento angular, debida principalmente a procesos viscosos. Existen dos procesos viscosos diferentes: (i) difusión radial de vorticidad, que produce un cambio en la distribución de vorticidad en la escala de tiempo difusivo  $T_h = L^2/\nu_h$ , y (ii) cambios en la vorticidad debido al bombeo de Ekman en el fondo. La escala de tiempo asociada a este último mecanismo, llamada escala de tiempo de Ekman [8,9], es  $T_v = (2H^2/f\nu_v)^{1/2}$ . Aquí  $L$  es la escala horizontal del vórtice,  $H$  es la escala de profundidad,  $f$  es el parámetro de Coriolis,  $\nu_h$  y  $\nu_v$  son las viscosidades horizontal y vertical del fluido, respectivamente. En un flujo de gran escala la difusión de momento, por turbulencia de menor escala, es diferente en la horizontal que en la vertical, por lo tanto, en modelos para estudios de fenómenos de gran escala, es común la utilización de coeficientes  $\nu_h$  y  $\nu_v$  diferentes [9].

La importancia relativa de ambos procesos está dada por la razón entre sus escalas de tiempo, que es igual a  $\alpha = T_v/T_h = \lambda_h\lambda_v^{-1/2}$ , con  $\lambda_h = 2\nu_h/fL^2$  y  $\lambda_v = 2\nu_v/fH^2$  los números de Ekman horizontal y vertical, respectivamente. Dependiendo de los valores que toman estos parámetros se han planteado modelos para analizar el decaimiento de un vórtice cuando uno de los dos procesos viscosos es significativamente más relevante. Así, por ejemplo, en condiciones de laboratorio, donde se logra evitar turbulencia y se reproducen importantes rasgos de interés para el estudio de la circulación oceánica de gran escala, se tiene:  $\nu_h = \nu_v = \nu$  y  $\alpha = (H/L)^2\lambda^{1/2}$ , con  $\lambda = 2\nu/fH^2$ ; como en estos experimentos  $H/L = O(1)$  y  $\lambda \ll 1$ , la circulación de Ekman, producto de la fricción del fondo, es el proceso dominante en la evolución del vórtice [1,8,10]. Por supuesto, aquí  $f$  es dos veces la velocidad angular del tanque que contiene al fluido. Por otro lado, en el estudio de decaimiento de remolinos en el océano el efecto de la capa de Ekman se desprecia y se considera que la difusión horizontal de momento es el proceso que domina

en su evolución [11]. Así, por ejemplo, para modelar el decaimiento, en las Refs. [12,13,14] se utilizan modelos de capas que incluyen los efectos horizontales de fricción y desprecian el flujo vertical de momento entre ellas.

En aras de generalizar, en este trabajo se deduce la aproximación lineal que incluye los dos procesos viscosos para examinar analíticamente la evolución de un vórtice barotrópico simétrico en el plano  $f$ . Esto es, el decaimiento del vórtice se produce tanto por el efecto de la fricción del fondo, representado por una condición sobre la velocidad vertical en el tope de la capa de Ekman, como por el efecto de la difusión horizontal de momento en el interior (alejado de la capa de Ekman del fondo). Un tercer efecto lineal, que también se incluye en el modelo, aparece al considerar la anomalía del nivel superficial en la redistribución radial de volumen. Cada uno de los tres efectos lineales mencionados se han tratado anteriormente en la literatura, ya sea en forma separada o combinando dos de ellos; en este estudio se presenta la formulación y solución del problema lineal de decaimiento que los incluye a todos y recupera como casos particulares los previamente publicados.

La presentación del trabajo se organiza como sigue. En la Sec. 2 se formula el problema y se arriba al sistema de ecuaciones que rige la evolución del vórtice. La solución se presenta en la Sec. 3, donde también se discute un ejemplo. La evolución de un vórtice en un modelo de gravedad reducida es dada en la Sec. 4. En la Sec. 5 se discute el decaimiento del vórtice a través de la ecuación de vorticidad y por último, las conclusiones son dadas en la Sec. 6.

## 2. MODELO

Las ecuaciones de movimiento, expresadas en coordenadas cilíndricas, para un flujo con simetría azimutal de un fluido homogéneo sobre un plano horizontal que rota con velocidad angular  $\frac{1}{2}f$  constante ( $f$ : parámetro de Coriolis) alrededor del eje  $z$ , perpendicular al plano y en la dirección de la gravedad, son

$$\frac{Du}{Dt} - \frac{v^2}{r} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu_h D^2 u + \nu_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{1a}$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} + fu = \nu_h D^2 v + \nu_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \tag{1b}$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu_h \nabla^2 w + \nu_v \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \tag{1c}$$

y la ecuación de continuidad o de conservación de volumen es

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru) = 0. \tag{1d}$$

Los operadores que aparecen son

$$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z}, \tag{2}$$

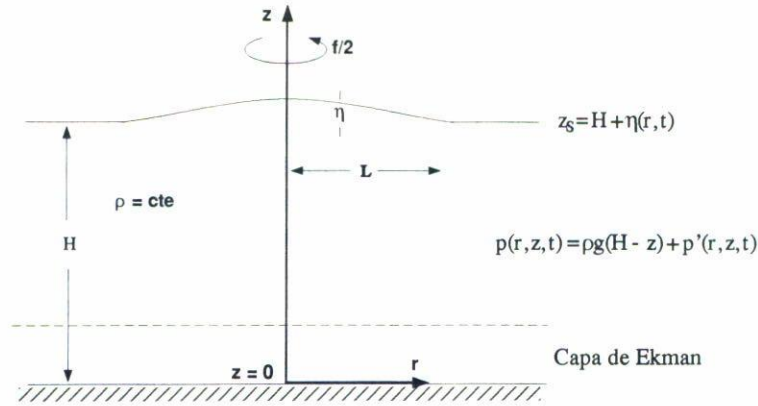


FIGURA 1. Diagrama esquemático del modelo bajo estudio señalando escalas y sistema de coordenadas.

$$\nabla^2 := \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad \text{y} \quad D^2 := \nabla^2 - \frac{1}{r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \right].$$

En esta notación,  $u$ ,  $v$  y  $w$  son las componentes de velocidad radial, azimutal y vertical, respectivamente,  $\rho$  es la densidad (uniforme) del fluido,  $g$  es la aceleración debida a la gravedad;  $\nu_h$  y  $\nu_v$  son los coeficientes (constantes) de viscosidad turbulenta horizontal y vertical, respectivamente;  $r$ ,  $z$  y  $t$  son las variables independientes que denotan las coordenadas radial, vertical y el tiempo, respectivamente. La coordenada vertical aumenta en dirección contraria a la aceleración de la gravedad y  $z = 0$  coincide con el fondo plano. La presión,  $p$ , está dada por la suma de una presión hidrostática de referencia  $\rho g(H - z)$ , y la parte dependiente del tiempo y el espacio, asociada con la presencia del vórtice,  $p'(r, z, t)$ :

$$p(r, z, t) = \rho g(H - z) + p'(r, z, t). \tag{3}$$

El fluido está confinado en la región

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq z \leq z_s = H + \eta(r, t), \tag{4}$$

donde  $z_s(r, t)$  es la posición de la superficie libre con  $\eta(r, t)$  su deformación por la presencia del vórtice ( $z_s = H$ ,  $\eta = 0$ , en ausencia del vórtice). Una representación esquemática del modelo, geometría y coordenadas utilizadas se presenta en la Fig. 1.

Las ecuaciones se expresan sin dimensiones con el uso de las siguientes escalas:

$$[u, v, w, p, \eta] = \left[ \lambda_v^{1/2}, 1, \lambda_v^{1/2} \delta, \rho f L, \frac{fL}{g} \right] V,$$

$$[r, z, t] = [L, H, 2f^{-1} \lambda_v^{-1/2}],$$

donde  $L$  y  $H$  son las escalas espaciales horizontal y vertical, respectivamente,  $V$  es la escala de velocidad azimutal del vórtice,  $\lambda_v = 2\nu_v/fH^2$  es el número de Ekman vertical y  $\delta = H/L$  es la razón de aspecto.

Se toman estas escalas ya que se supone que para números de Ekman pequeños ( $\lambda_v \ll 1$ , que es el de interés en este estudio) la circulación es primordialmente azimutal, mientras que las circulaciones radial y vertical sólo entran como correcciones. El tiempo característico en que el decaimiento de un perfil inicial procede es prolongado, por un factor proporcional a  $\lambda_v^{-1/2}$ , comparado con el período de rotación.

El sistema de Ecs. (1) queda (usando los mismos símbolos para las variables, pero ahora sin dimensiones y de acuerdo al escalamiento) como

$$\lambda_v \left( \frac{\partial u}{\partial t} + 2R_o \left( u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) u \right) - 2R_o \frac{v^2}{r} - 2v = -2 \frac{\partial p'}{\partial r} + \alpha \lambda_v D^2 u + \lambda_v^{3/2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (5a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2R_o \left( u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z} + \frac{u}{r} \right) v + 2u = \alpha D^2 v + \lambda_v^{1/2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (5b)$$

$$\lambda_v \delta^2 \left( \frac{\partial w}{\partial t} + 2R_o \left( u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) w \right) = -2 \frac{\partial p'}{\partial z} + \alpha \lambda_v \delta^2 \nabla^2 w + \lambda_v^{3/2} \delta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \quad (5c)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) = 0. \quad (5d)$$

La presión sin dimensiones es

$$p = \frac{1 - z + R_o F p'}{R_o F} \quad (6)$$

y el fluido está contenido en el dominio adimensional

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq z \leq z_s = 1 + R_o F \eta(r, t). \quad (7)$$

Los nuevos parámetros que aparecen son: el número de Rossby,  $R_o = V/fL$ , que determina la importancia de los términos alineales; el número de Froude  $F = f^2 L^2 / gH$ , que es una medida de la magnitud de la deformación de la superficie libre [15] y el parámetro  $\alpha$  que mide la magnitud del efecto de la viscosidad horizontal y compara la escala de tiempo difusivo a la escala de tiempo de Ekman (ver Introducción).

En vista de que para casos de interés geofísico  $\lambda_v^{1/2} \ll 1$ , se puede hacer una expansión perturbativa de las ecuaciones en términos de este parámetro. Aquí es suficiente tomar  $\lambda_v = 0$  en (5) alejado de la capa de frontera del fondo (en el interior), ya que muchos de los rasgos de interés aparecen a orden cero respecto a esta perturbación [10,16,17]. Más aún, como el propósito de este trabajo es analizar la evolución de un vórtice en su aproximación lineal, válida cuando  $R_o \ll 1$ , se tiene que en el límite cuando  $R_o \rightarrow 0$ , el sistema (5) toma la forma, correcta a  $O(\lambda_v^{1/2})$ :

$$v = \frac{\partial p'}{\partial r}, \quad (8a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2u = \alpha D^2 v, \quad (8b)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = 0, \quad (8c)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru) = 0. \quad (8d)$$

La Ec. (8c) representa el balance hidrostático, lo que indica que la presión es verticalmente uniforme,  $p'(r, z, t) = \eta(r, t)$  y el campo de velocidad horizontal no varía con la profundidad,  $\partial u/\partial z = \partial v/\partial z = 0$ .

Para completar el problema se considera la capa de Ekman en el fondo, necesaria para satisfacer la condición de no deslizamiento del fluido en dicha frontera sólida. El efecto de esta capa, que tiene un grosor adimensional  $O(\lambda_v^{1/2})$ , proporciona la velocidad del bombeo/succión de Ekman en su tope superior, y es

$$w_E = \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r}(rv). \quad (9)$$

La expresión (9) dice que la velocidad del bombeo/succión de Ekman ( $w_E$ ) es la mitad de la vorticidad adimensional, a orden cero, del fluido en el interior [16,18].

Con este resultado se puede integrar verticalmente la ecuación de continuidad (8d) utilizando (9) como condición en el fondo y la condición cinemática linealizada en la superficie dada por

$$w_s = \frac{1}{2} F \frac{\partial \eta}{\partial t}. \quad (10)$$

Entonces, las ecuaciones que describen la evolución de un vórtice simétrico debido a los efectos de la superficie libre deformable y la viscosidad horizontal en el interior, son

$$v = \frac{\partial \eta}{\partial r}, \quad (11a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2u = \alpha D^2 v, \quad (11b)$$

$$F \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv). \quad (11c)$$

La última ecuación muestra que la conservación de masa es un balance entre los cambios de la elevación superficial, la divergencia de la circulación radial en el interior (los dos términos del lado izquierdo) y el bombeo de Ekman (el término del lado derecho). Además muestra que la presencia del bombeo o succión de Ekman en el tope de la capa de frontera del fondo induce una circulación radial, pero ésta se puede compensar por el desplazamiento de la superficie libre. En el caso en que no existe la fricción del fondo, el movimiento de la superficie libre es el responsable de la existencia de la circulación radial.

La condición inicial preescrita, dada por  $v(r, 0) = v_0(r)$ , está y permanece en balance geostrófico con el perfil de la superficie libre por (11a). Un caso clásico particular ocurre cuando los dos parámetros ( $F$  y  $\alpha$ ), que aparecen en el sistema (11), son muy pequeños. Bajo estas condiciones las Ecs. (11b) y (11c) se reducen a

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2u = 0, \quad u = \frac{1}{2}v.$$

En este caso la solución está dada en la Ref. [8], a saber

$$v(r, t) = v_0(r)e^{-t}.$$

En esta aproximación, el perfil inicial retiene su estructura espacial y decae con la escala de tiempo simple,  $T_v$ , la escala de tiempo de Ekman. Si se consideran los efectos provocados por la presencia de la superficie libre deformable y de la viscosidad horizontal en el interior en la evolución de un vórtice, la solución anterior se modifica como se verá a continuación.

### 3. SOLUCIÓN

El sistema (11), que sólo contiene dos parámetros  $\alpha$  y  $F$ , se puede combinar para obtener una ecuación que dicta la evolución de la superficie libre,  $\eta$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla^2 \eta - F\eta] = \alpha \nabla^4 \eta - \nabla^2 \eta; \tag{12a}$$

o una que dicta la evolución de la velocidad azimutal,  $v$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} [D^2 v - Fv] = \alpha D^4 - D^2 v. \tag{12b}$$

Varios autores han presentado reducciones de estas ecuaciones en diferentes contextos, en las que no consideran alguno de los tres efectos. Por ejemplo, si se desprecia el efecto de la superficie libre ( $F = 0$ ), el decaimiento de un vórtice simétrico está dado por el efecto viscoso del fondo, modificado por el efecto de la viscosidad horizontal en el interior. La Ec. (11c) con  $F = 0$  muestra que  $u = \frac{1}{2}v$ , que sustituida en (11b) produce

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v = \alpha D^2 v. \tag{13a}$$

Haciendo  $v = v'(r, t) \exp(-t)$ , (13a) se reduce a una ecuación de difusión:

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = \alpha D^2 v'. \tag{13b}$$

Esta ecuación se obtuvo en las Refs. [17,19] para la evolución de la velocidad azimutal de un vórtice, en condiciones de laboratorio, cuando su escala horizontal es pequeña relativa

al radio del tanque, por lo que los efectos de las fronteras laterales son despreciables. Bajo esta restricción estos autores plantean una solución de similaridad para describir su evolución. Si el efecto de la viscosidad horizontal en el interior no se considera ( $\alpha = 0$ ), pero se retienen el bombeo de Ekman y la contribución, en la ecuación de continuidad, de la variación del nivel superficial ( $F \neq 0$ ), la evolución de la superficie libre y de la velocidad azimutal, se rigen por (12a) y (12b) respectivamente, con  $\alpha = 0$ .

La Ec. (12a) con  $\alpha = 0$ , aunque expresada en coordenadas cartesianas y con dimensiones, es la planteada por Gill [20] para describir el decaimiento de un flujo geostrófico por la fricción del fondo. A modo de información, Gill la utiliza para determinar la escala de tiempo del decaimiento de una perturbación sinusoidal, cuando el número de onda es mayor o menor al radio de deformación de Rossby. Esta misma ecuación, fue derivada y resuelta en la Ref. [15], al estudiar el efecto de la superficie libre en el problema clásico de decaimiento, para un fluido que rota en un tanque con fondo parabólico (en equilibrio con la forma de la superficie libre); posteriormente, Maas [10] la resuelve, en la misma geometría, si la estructura inicial del vórtice está especificada.

En el Apéndice se da una solución para la ecuación diferencial que pronostica la evolución de la velocidad azimutal (12b) considerando ambos parámetros. Condicionada a que la velocidad azimutal sea regular en el origen y decaiga a cero cuando  $r \rightarrow \infty$ , la solución de (12b), dado el estado inicial  $v(r, 0) = v_0(r)$ , es

$$v(r, t) = \int_0^\infty \hat{v}_0(k) J_1(kr) \exp \left[ -\frac{k^2 + \alpha k^4}{k^2 + F} t \right] k dk, \quad (14a)$$

donde

$$\hat{v}_0(k) = \int_0^\infty v_0(r) J_1(kr) r dr \quad (14b)$$

es la transformada de Fourier-Bessel del campo de velocidad azimutal inicial y  $J_1(x)$  es la función de Bessel de primer tipo de orden uno.

De la Ec. (11a) con condiciones apropiadas de regularidad o directamente de (12a), la elevación de la superficie libre,  $\eta$ , evoluciona como

$$\eta(r, t) = \int_0^\infty \hat{\eta}_0(k) J_0(kr) \exp \left[ -\frac{k^2 + \alpha k^4}{k^2 + F} t \right] dk, \quad (15a)$$

con

$$\hat{\eta}_0(k) = \int_0^\infty \eta_0(r) J_0(kr) dr, \quad (15b)$$

donde  $\eta(r, 0) = \eta_0(r)$ .

Dada una de las soluciones, (14) o (15), los otros campos son calculables a partir del sistema (11). Esta solución es la más general que se conoce y es el resultado más importante de este trabajo. Para  $\alpha = 0$  las soluciones recuperan las planteadas en la Ref. [10] cuando



considera que la escala horizontal del vórtice es mucho menor que el radio del tanque (cuando el radio del tanque tiende a infinito). Las mismas soluciones se obtuvieron en la Ref. [21] en un estudio de decaimiento de remolinos en el mar de Weddell, donde domina la acción de la fricción producida por la capa de hielo en la superficie.

Para visualizar los efectos que producen la presencia de la superficie libre deformable y la viscosidad horizontal en el interior, cuyas magnitudes son medidas por los parámetros  $F$  y  $\alpha$ , respectivamente, éstos serán discutidos a través de un ejemplo.

### 3.1. Ejemplo de un vórtice gaussiano

Si la forma inicial de la superficie libre está dada por

$$\eta_0(r) = \exp(-r^2/2), \tag{16a}$$

la velocidad azimutal correspondiente es

$$v_0(r) = -r \exp(-r^2/2) \tag{16b}$$

y la vorticidad inicial es

$$\omega_0(r) = (r^2 - 2) \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right). \tag{16c}$$

Este tipo de perfil ha sido utilizado por varios autores para simular la forma de remolinos oceánicos [6,13,14,22] y dada su estructura simple y propiedades de continuidad, el vórtice gaussiano es frecuentemente utilizado para ajustar datos oceánicos o de laboratorio [1,23]. El vórtice consiste de un núcleo con vorticidad negativa, rodeado por un anillo de vorticidad positiva, como se observa en al Fig. 2a, donde se muestran los campos iniciales.

La transformada de Fourier-Bessel (14b) de la velocidad azimutal inicial (16b) es

$$\hat{v}_0(k) = -k \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right). \tag{17}$$

Al sustituir en (14a) se obtiene la solución en forma integral para la evolución de un vórtice con esta velocidad azimutal inicial, a saber,

$$v(r, t) = - \int_0^\infty J_1(kr) k^2 \exp\left[-\frac{k^2}{2} - \frac{(k^2 + \alpha k^4)t}{k^2 + F}\right] dk. \tag{18}$$

Se desconoce la expresión analítica de la solución de esta integral para un par de parámetros  $(\alpha, F)$  arbitrarios. Sin embargo, algunos casos particulares, ya sean por la forma explícita de la integral o por integración numérica, serán presentados aquí.

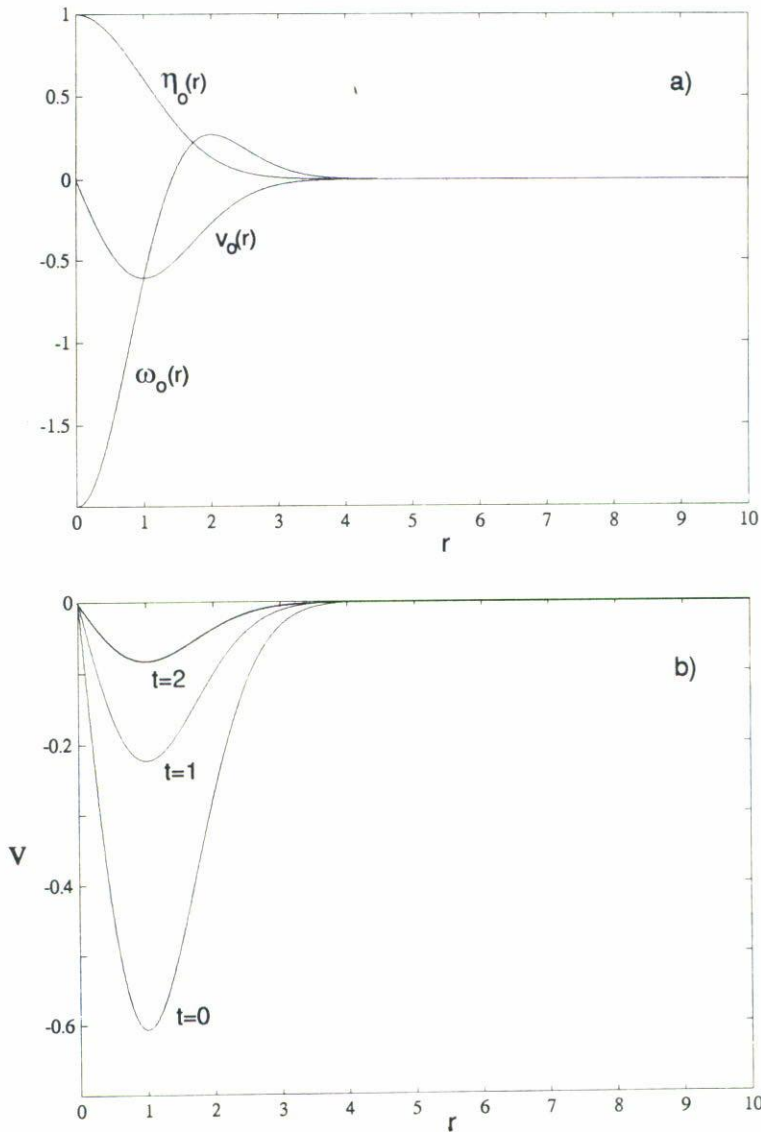


FIGURA 2. a) Estado inicial de los campos  $\eta_0(r)$ ,  $v_0(r)$  y  $\omega_0(r)$ ; b) evolución de la velocidad azimutal debido solamente a la fricción del fondo ( $\alpha = F = 0$ ).

Con el propósito de discutir los efectos que produce la difusión horizontal de momento en el proceso de decaimiento, se supone que el efecto de la deformación de la superficie libre es despreciable. Haciendo  $F = 0$ , la Ec. (18) tiene solución analítica, que es

$$v(r, t) = -\frac{r}{(1 + 2\alpha t)^2} \exp\left[-\frac{r^2}{2(1 + 2\alpha t)}\right] \exp(-t). \tag{19}$$

Nótese que el perfil retiene su carácter gaussiano y que con  $\alpha = 0$  se recupera el resultado de la Ref. [8]. Estos resultados se presentan en la Fig. 2b. Con  $\alpha = F = 0$ , la dinámica

lineal de Ekman predice un decaimiento puramente exponencial del flujo y la posición donde se alcanza la velocidad azimutal extrema ( $r_{\text{ext}}$ ) se mantiene fija, sin embargo, la inclusión del flujo horizontal de momento por difusión, lleva a una traslación de su posición de acuerdo a la fórmula

$$r_{\text{ext}}(t) = (1 + 2\alpha t)^{1/2}, \quad (20a)$$

y la amplitud de la velocidad azimutal extrema ( $v_{\text{ext}}$ ), evoluciona en el tiempo de acuerdo a

$$v_{\text{ext}}(t) = -\frac{1}{(1 + 2\alpha t)^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(1 + 2t)\right]. \quad (20b)$$

Entonces, como una corrección al decaimiento lineal de Ekman, la difusión horizontal provoca una migración de la velocidad azimutal extrema hacia afuera y su decaimiento aumenta a medida que aumenta el valor del parámetro  $\alpha$  [17]. Estos rasgos se muestran en la Fig. 3, donde se presentan los resultados de la evolución de la velocidad azimutal para  $\alpha = 0.1$  y  $1.0$ . La forma en que evoluciona la velocidad azimutal extrema y el radio donde se alcanza se muestran en la Fig. 4 para  $\alpha = 0, 0.5$  y  $1.0$ . En ambas figuras (3 y 4) se observa que la razón de decaimiento es mayor en el inicio que para tiempos posteriores y es casi constante y próxima a la escala de tiempo de Ekman para valores pequeños de  $\alpha$ .

Para analizar los efectos que ejerce la presencia de una superficie libre deformable, se toma ahora  $\alpha = 0$ , eliminando los efectos del flujo horizontal de momento por difusión. En este caso la integral no parece tener cuadratura conocida para cualquier valor del parámetro  $F$ , salvo, claro está, si  $F = 0$ , un resultado ya discutido. En la Fig. 5 se presenta la evaluación numérica de dicha integral para  $F = 1.0$  y  $10$ . En la Fig. 5b se observa más claramente cómo a medida que el tiempo aumenta, la posición de la velocidad azimutal extrema migra alejándose del centro del vórtice, mientras que su amplitud decae con una razón menor que con  $e^{-t}$ . Además, si se compara la Fig. 5a con la Fig. 5b se observa que la rapidez del decaimiento disminuye al incrementarse el número de Froude. Estos resultados corroboran los previamente señalados en las Refs. [10,14,17].

Un caso particular donde están involucrados ambos parámetros se tiene al tomar  $F = 1/\alpha$ . En tal caso, después de resolver la integral, se tiene

$$v(r, t) = -\frac{F^2 r}{(F + 2t)^2} \exp\left[-\frac{Fr^2}{2(F + 2t)}\right]. \quad (21)$$

De la Ec. (21) se obtiene que la posición donde se alcanza la velocidad azimutal extrema evoluciona respecto al tiempo por

$$r_{\text{ext}}(t) = \left(\frac{F + 2t}{F}\right)^{1/2} \quad (22a)$$

y su amplitud ( $v_{\text{ext}}$ ), de acuerdo a

$$v_{\text{ext}}(t) = -\left(\frac{F}{F + 2t}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\right]. \quad (22b)$$

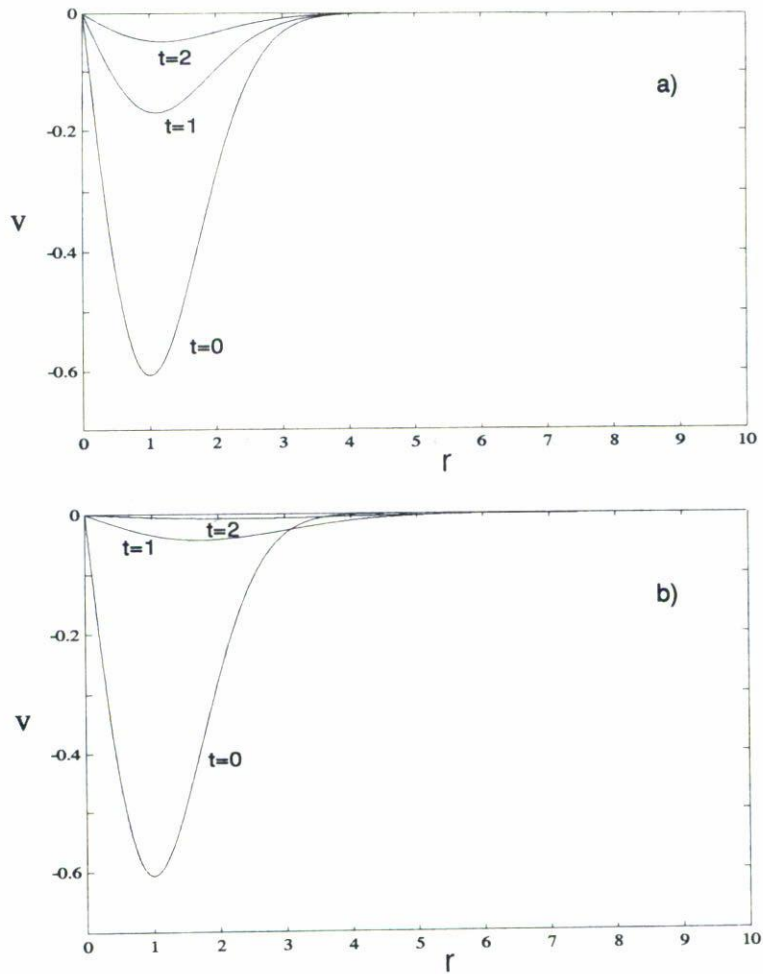


FIGURA 3. Evolución de la velocidad azimutal con  $F = 0$ . a) para  $\alpha = 0.1$  y b) para  $\alpha = 1.0$ . Nótese que el ensanchamiento y el decaimiento del vórtice es más rápido al incrementarse el valor del parámetro  $\alpha$ .

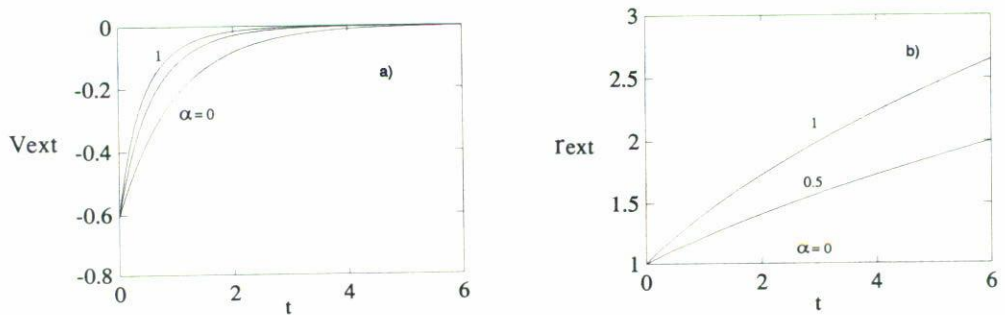


FIGURA 4. a) Evolución de la velocidad azimutal extrema ( $v_{ext}$ ); b) posición donde se alcanza ( $r_{ext}$ ), para  $\alpha = 0, 0.5$  y  $1.0$  con  $F = 0$ .

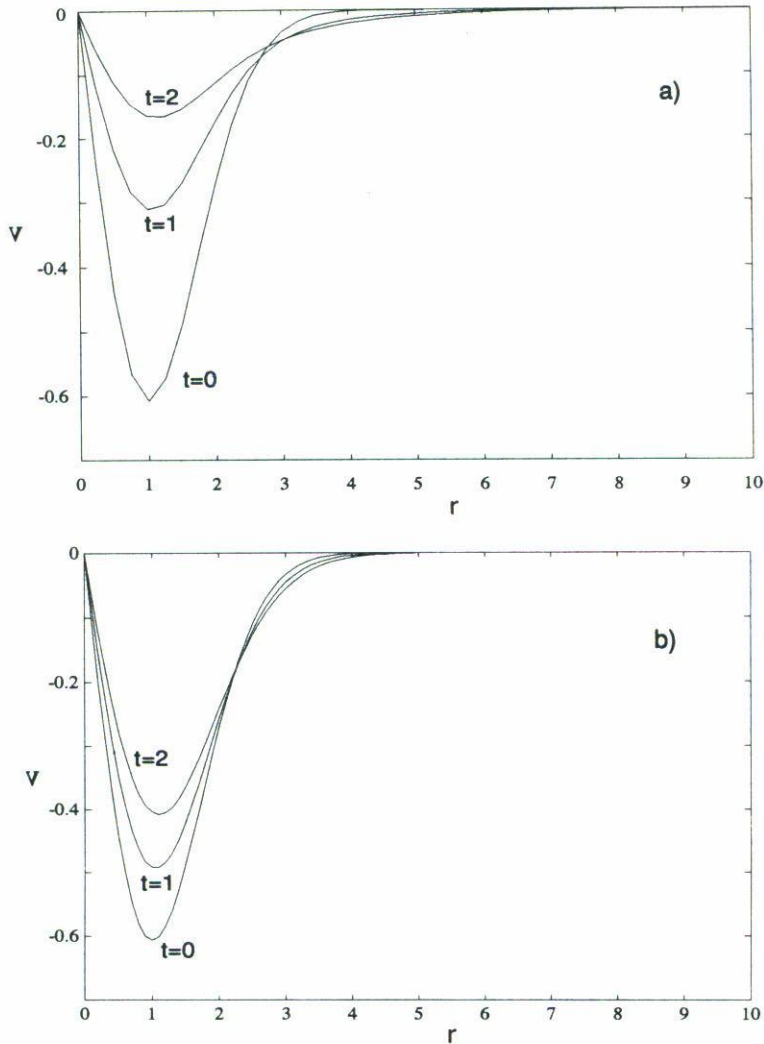


FIGURA 5. Evolución de la velocidad azimutal para  $\alpha = 0$ ; a)  $F = 1.0$ ; b)  $F = 10$ . Nótese que el decaimiento y ensanchamiento del vórtice es más rápido para valores menores de  $F$ .

En la Fig. 6 se muestran los perfiles de la velocidad azimutal en tres instantes de tiempo, para  $F = 1.0$  y  $10$  ( $\alpha = 1.0$  y  $0.1$ ). La evolución de la velocidad azimutal extrema y el radio donde se alcanza se presentan en la Fig. 7. En este caso también se observa que el mayor decaimiento del vórtice ocurre para tiempos pequeños y si se comparan estos resultados y las Figs. 3 y 6, se observa de nueva cuenta que al incrementarse el valor de  $F$  se retarda el decaimiento del vórtice.

Como se ve, la solución aquí presentada recupera como casos límites las anteriormente planteadas por diferentes autores. Un caso límite interesante que representa la evolución de un vórtice en un modelo de capas será presentado en la próxima Sección.

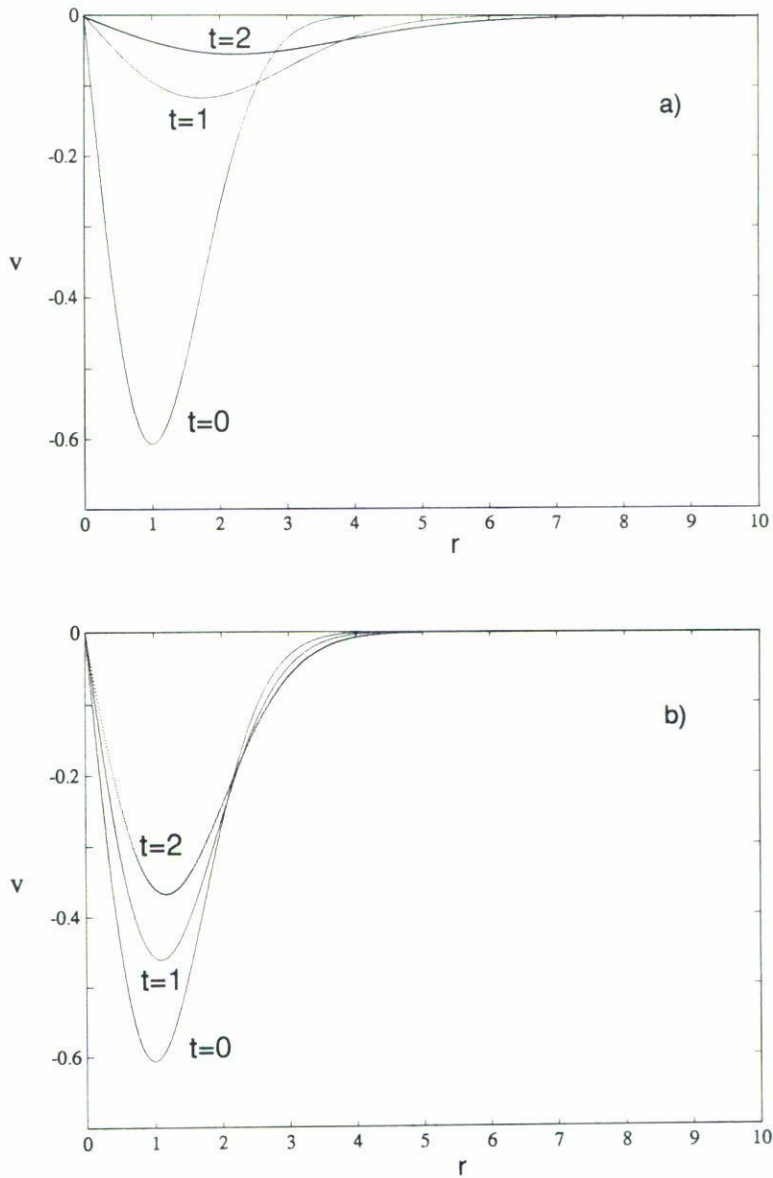


FIGURA 6. Evolución de la velocidad azimutal para el caso en que  $F = 1/\alpha$ ; a)  $\alpha = 1$  ( $F = 1$ ) y b)  $\alpha = 0.1$  ( $F = 10$ ).

#### 4. MODELO DE GRAVEDAD REDUCIDA

El parámetro que mide la importancia de la deformación de la superficie libre,  $F = (L/L_r)^2$ , donde  $L_r = (gH)^{1/2}/f$  es el radio de deformación barotrópico de Rossby, toma valores muy pequeños tanto en condiciones típicas de laboratorio [17] como oceánicas.

Para un océano abierto  $L_r = 2000$  km (en latitudes medias), siendo al menos un orden de magnitud mayor que  $L$ . Por ejemplo, McWilliams [3] señala escalas horizontales típicas de 20–50 km para vórtices en el Mediterráneo, Vukovich y Crissman [24] en un trabajo de 12 años de datos de satélite en el Golfo de México, reportan un diámetro promedio

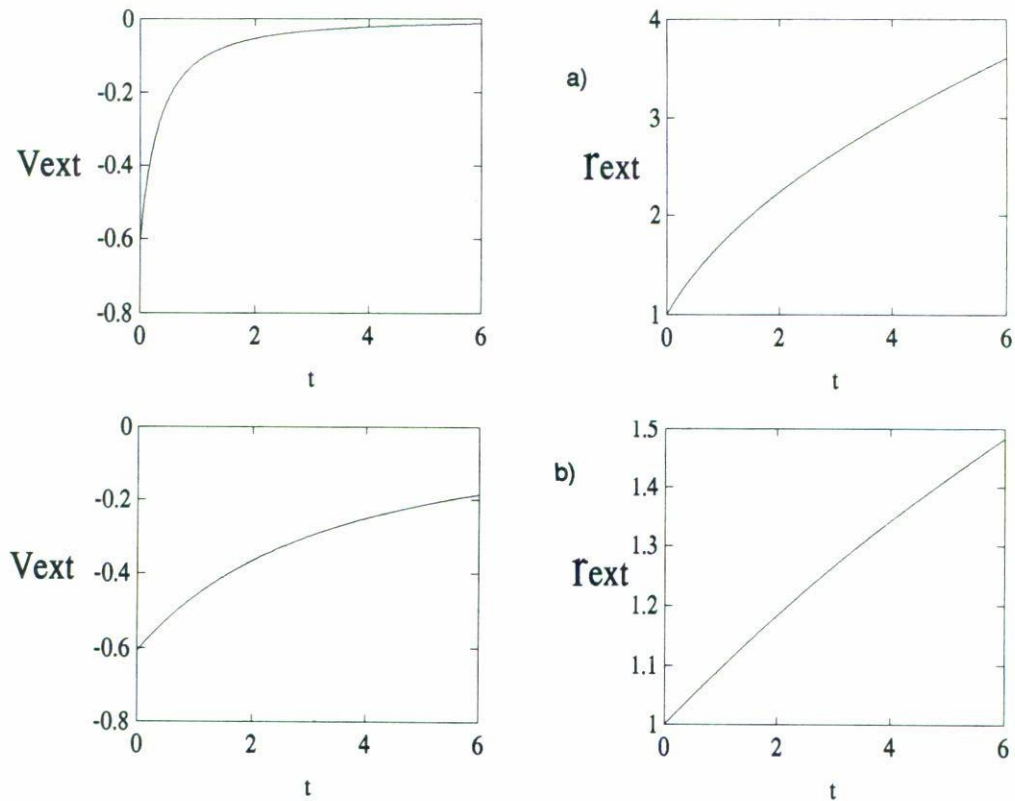


FIGURA 7. Evolución de la velocidad azimutal extrema ( $v_{ext}$ ) y del radio donde se alcanza ( $r_{ext}$ ) para el caso en que  $F = 1/\alpha$ ; a)  $\alpha = 1$  ( $F = 1$ ); b)  $\alpha = 0.1$  ( $F = 10$ ).

de remolinos de 150 km y Auer [25] de 129 km para remolinos que se desprenden de la Corriente del Golfo.

Por otro lado, la estructura vertical de dichos remolinos alcanza amplitudes del orden de los cien metros, y difícilmente logran sentir la presencia del fondo, excepto, claro está, cuando en su migración interactúan con la costa, como ocurre en la frontera oeste del Golfo de México [26] y del Océano Atlántico [4].

Por estas razones, una aproximación apropiada para estudiar la evolución de vórtices ha sido a través del modelo de gravedad reducida. Este considera una capa activa de fluido sobre una de mayor densidad, de profundidad infinita, en reposo (ver, por ejemplo, Refs. [7,27,28,29,30]).

El modelo que a continuación se presenta se obtiene al considerar  $\nu_v = 0$  y al escalar el sistema (1) utilizando la escala de tiempo difusivo en lugar de la escala de tiempo de Ekman, ya que en este caso  $T_v = \infty$ . Aunque las ecuaciones derivadas anteriormente son para una capa con densidad constante que se extiende hasta el fondo, éstas son las mismas para el modelo de gravedad reducida, excepto porque la gravedad es sustituida por la gravedad aparente  $g' = g\Delta\rho/\rho$ , con  $\Delta\rho$  la diferencia de densidad de la capa inferior a la superior,  $\eta$  es el grosor de la capa activa y no existe ni capa ni bombeo de Ekman, pues la capa activa se desliza sin fricción sobre la capa inerte.

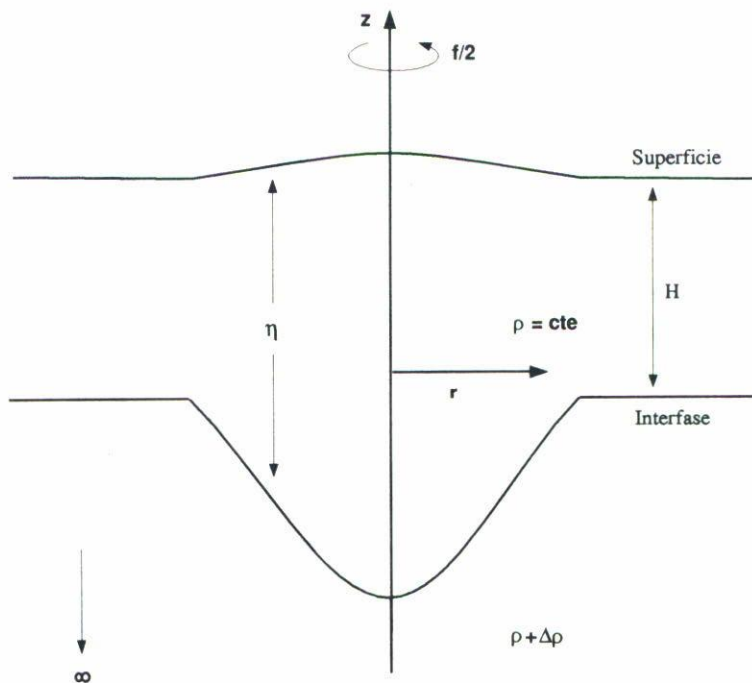


FIGURA 8. Diagrama esquemático del modelo de gravedad reducida.

Las ecuaciones linealizadas que dictan la evolución de un vórtice en el modelo de gravedad reducida son

$$v = \frac{\partial \eta}{\partial r}, \tag{23a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2u = \left( \nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) v, \tag{23b}$$

$$F \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) = 0, \tag{23c}$$

donde ahora, al integrar la ecuación de continuidad, se utiliza la condición cinemática tanto en la superficie como en la interfase. Estas ecuaciones son las mismas planteadas en (11) pero con  $\alpha = 1$  y sin la contribución del bombeo de Ekman. Una esquematización del modelo se presenta en la Fig. 8.

Combinando el sistema (23) se obtiene una ecuación que rige la evolución del grosor de la capa activa:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla^2 \eta - F \eta] = \nabla^4 \eta; \tag{24a}$$



y para la velocidad azimutal se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} [D^2 v - Fv] = D^4 v. \quad (24b)$$

Las soluciones en este caso son

$$\eta(r, t) = \int_0^\infty \hat{\eta}_0(k) J_0(kr) \exp \left[ -\frac{k^4}{k^2 + F} t \right] dk, \quad (25a)$$

con  $\hat{\eta}_0(k)$  dado por (15b); y

$$v(r, t) = \int_0^\infty \hat{v}_0(k) J_1(kr) \exp \left[ -\frac{k^4}{k^2 + F} t \right] k dk, \quad (25b)$$

con  $\hat{v}_0(k)$  dado por (14b).

Estas ecuaciones (24a,b) y sus soluciones correspondientes (25a,b), fueron obtenidas en la Ref. [14] en un estudio de decaimiento de vórtices de mesoescala para el caso lineal.

En este modelo, el parámetro que mide la importancia de la deformación de la capa activa es  $F = (L/L_r)^2$ , donde ahora  $L_r = (g'H)^{1/2}/f$  (35–40 km en latitudes medias) es el radio de deformación baroclínico de Rossby y  $H$  es la profundidad de la capa activa en ausencia del vórtice. Es bueno señalar que, dadas las escalas utilizadas para obtener el sistema lineal que rige la evolución del vórtice, el modelo (23) sólo es aplicable a remolinos cuasigeostroficados de mesoescala [31]. Para analizar la validez del modelo de gravedad reducida, ver la Ref. [32].

## 5. DISCUSIONES

El decaimiento de un vórtice geostrofico, aunque afectado por la deformación de la superficie libre, se debe principalmente a la fricción. Su evolución se manifiesta en una continua redistribución de su vorticidad relativa y se observa claramente si (12a) se expresa en términos de  $\omega = (1/r)\partial/\partial r(rv) = \nabla^2\eta$ , Ref. [33]. Así se obtiene que la ecuación que dicta la evolución de la vorticidad relativa es

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\omega + F \frac{\partial \eta}{\partial t} + \alpha \nabla^2 \omega, \quad (26)$$

y muestra que su razón de cambio, el término del lado izquierdo, está determinada por el estiramiento de las líneas de vórtice debido tanto al bombeo o succión en la capa de Ekman como al movimiento de la superficie libre (los dos primeros términos del lado derecho de la ecuación), y por la difusión lateral de vorticidad en el interior, el último término del lado derecho de (26). Esta misma ecuación, escrita con dimensiones y reordenando los términos, representa la razón de cambio de la vorticidad potencial:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \omega - \frac{f\eta}{H} \right) = - \left( \frac{f\nu_v}{2H^2} \right)^{1/2} \omega + \nu_h \nabla^2 \omega.$$

En el caso clásico en que  $\alpha = F = 0$ , la Ec. (26) muestra que el decaimiento de la vorticidad relativa se debe exclusivamente al estiramiento de los tubos de vórtices por el bombeo de Ekman en la capa del fondo. En regiones donde la vorticidad relativa del fluido es positiva (negativa), la fricción en la capa del fondo ocasiona un bombeo (succión) de Ekman en el tope de esta capa, provocando así la compresión (estiramiento) de los tubos de vórtices en el interior, lo que disminuye (aumenta) la vorticidad en el fluido.

Si  $F = 0$ , haciendo el cambio  $\omega = \omega' \exp(-t)$ , la Ec. (26) se reduce a

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} = \alpha \nabla^2 \omega'. \quad (27)$$

Este resultado ya se obtuvo en la Sec. 3 para la ecuación de la velocidad azimutal, y muestra que la razón de cambio de la vorticidad relativa del flujo de un vórtice (pequeño, ya que  $F \rightarrow 0$ ) se debe exclusivamente a la difusión de ésta, aumentando su razón de decaimiento para valores altos de  $\alpha$  y disminuyéndola cuando éste toma valores pequeños.

Si ahora se toma  $\alpha = 0$ , pero la superficie libre es dinámicamente activa, es decir, cuando el número de Froude es distinto de cero, la Ec. (26) muestra que en regiones donde la vorticidad relativa del fluido es positiva (negativa), la compresión (estiramiento) de los tubos de vórtices, debido al bombeo (succión) de Ekman, están parcialmente compensados por el estiramiento (compresión) de los tubos de vórtices, debido al movimiento de la superficie libre. Esto disminuye la razón de decaimiento de la vorticidad en el fluido.

En el caso particular en que exista un balance entre el movimiento de la superficie libre y el bombeo de Ekman, esto es, la compresión (estiramiento) de los tubos de vórtices es nulo,

$$F \frac{\partial \eta}{\partial t} = \omega \quad (28)$$

la evolución de la vorticidad relativa (26), toma nuevamente la forma de una ecuación de difusión, dada por (27).

En el ejemplo, en los casos donde se tiene una expresión explícita de las soluciones, la ecuación que dicta la evolución de la vorticidad relativa precisamente se reduce a una ecuación de difusión.

En el caso  $F = 0$ , la razón de decaimiento de la vorticidad relativa está dada por (27); sin embargo, para tener una idea de la importancia relativa de los mecanismos que intervienen en el cambio de la vorticidad, se pueden mostrar las dos contribuciones que permanecen del lado derecho de la Ec. (26). Estos términos se muestran en la Fig. 9 y se observa que existen regiones donde el cambio de la vorticidad es marcadamente diferente. Hay un núcleo, desde el centro hasta el primer cero del término de difusión, donde tanto la difusión como el bombeo de Ekman cooperan en el decaimiento. Hay un anillo, desde la frontera del núcleo hasta donde el bombeo de Ekman se hace cero, en el cual la difusión se opone al bombeo de Ekman impidiendo el decaimiento. Desde aproximadamente la mitad de este anillo hasta cierto radio la vorticidad está aumentando y más alejado de esta zona vuelve a decaer.

De forma general se tiene que el decaimiento del núcleo, cuya velocidad azimutal es cercana a rotación rígida, es más rápido que en la parte más remota del vórtice, es decir, más allá del radio donde el perfil de la velocidad azimutal alcanza su extremo. Esto corrobora los resultados obtenidos en la Ref. [10].

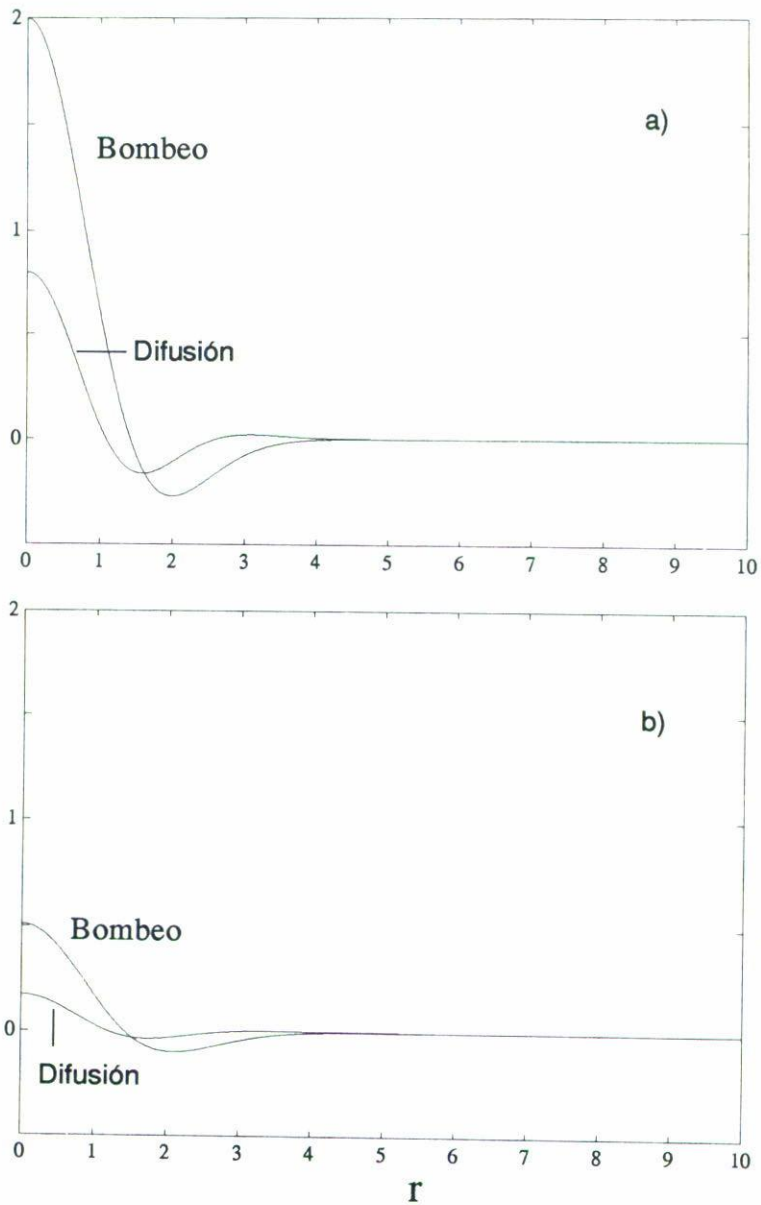


FIGURA 9. Importancia relativa de los términos que modifican la vorticidad relativa del flujo según la Ec. (26), como una función del radio, para  $F = 0$  y  $\alpha = 0.1$ . a) En el instante inicial  $t = 0$ , y b) en  $t = 1$  (ver texto).

Si  $F = 1/\alpha$ , se puede demostrar fácilmente que (28) se satisface. En este caso, la ecuación para la vorticidad relativa (26) queda

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{F} \nabla^2 \omega. \tag{29}$$

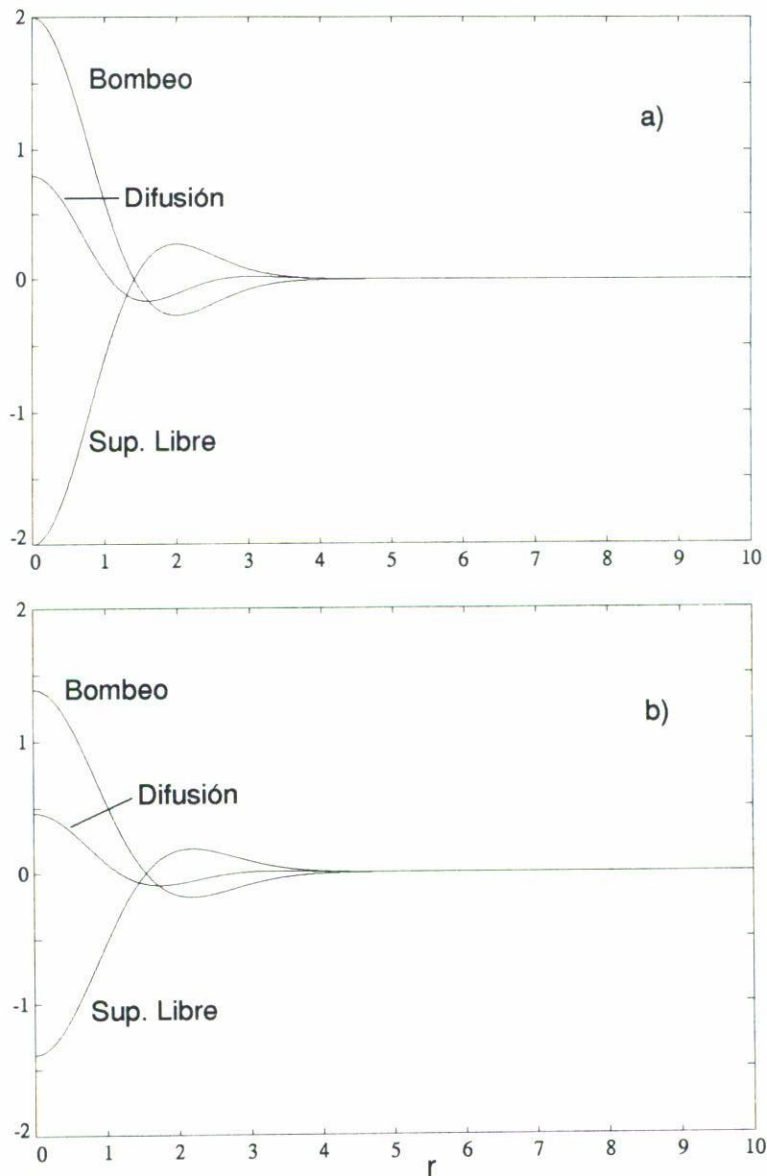


FIGURA 10. Igual que la Fig. 9 pero para  $F = 10$  y  $\alpha = 0.1$ .

De la Ec. (29) se ve que los vórtices con escala horizontal pequeña comparada al radio de deformación barotrópico de Rossby decaen rápidamente, mientras que los vórtices cuya escala horizontal es del orden o mayor que el radio de deformación decaen más lento. En este caso, aunque sólo el efecto de difusión interviene en la redistribución de la vorticidad, las magnitudes de los términos del lado derecho de la Ec. (26) están dados en la Fig. 10. En términos generales la razón de decaimiento de la vorticidad, presenta un comportamiento parecido al caso anterior, su decaimiento es mayor cercano al origen que en la región exterior.

En este caso particular,  $F = 1/\alpha$ , la solución satisface completamente el sistema no lineal, ya que la velocidad radial es nula, pues las columnas de vórtice no cambian de espesor. Para valores realistas de los parámetros ambientales se tiene que  $F \ll 1/\alpha$ , luego, para lograr  $F\alpha = 1$  se necesita para el océano valores excesivamente altos de las viscosidades turbulentas o en condiciones de laboratorio, velocidades de rotación del tanque demasiado altas. Por lo tanto, aunque matemáticamente se tiene la forma explícita de la solución, ésta no tiene un significado físico relevante.

## 6. CONCLUSIONES

En este estudio se llega a las ecuaciones que gobiernan la evolución de un vórtice en balance geostrófico, cuando las fuerzas viscosas e inerciales son pequeñas, o sea, cuando los números de Ekman ( $\lambda_v$  y  $\lambda_h$ ) y el número de Rossby ( $R_o$ ), son pequeños. Éstas son las ecuaciones del sistema (11). En el modelo de gravedad reducida, la velocidad del bombeo desaparece al permitir que la capa activa se deslice sin fricción sobre la capa inferior inerte. En este caso las ecuaciones que dictan la evolución del vórtice están dadas en las Ecs. (23).

Cuando  $R_o \ll 1$  sólo tres factores intervienen en el proceso de decaimiento del vórtice: el bombeo de Ekman, proporcional a la vorticidad en el interior, la deformación de la superficie libre y la difusión horizontal de momento. En esta aproximación, la solución en forma integral para la ecuación que dicta la evolución de la velocidad azimutal es dada por la Ec. (14) y para la evolución de la superficie libre por la Ec. (15). Estas soluciones, que incluyen los tres factores, reproducen en su caso las publicadas anteriormente, que consideran uno o dos de tales factores.

Un análisis general del decaimiento del vórtice está dado a través de la ecuación para la vorticidad relativa, mostrando que su razón de cambio se debe a la compresión (estiramiento) de los tubos de vórtices y a la difusión horizontal. Cuando la superficie libre es dinámicamente activa, es decir, cuando el número de Froude no es pequeño ( $F \neq 0$ ), se observa que la velocidad azimutal extrema del vórtice se propaga hacia afuera: el vórtice se ensancha. Este efecto y el incremento en el tiempo de decaimiento son debidos a que la superficie libre compensa, parcialmente o completamente cuando  $F = 1/\alpha$  en el ejemplo, el efecto de la compresión (estiramiento) de los tubos de vórtice en regiones de vorticidad positiva (negativa) del fluido. La difusión horizontal, unido al efecto de la superficie libre, lleva a una migración de la velocidad azimutal extrema hacia afuera: el vórtice se ensancha. Pero, contrario al efecto de la superficie libre, el tiempo de decaimiento disminuye al aumentar el valor del parámetro  $\alpha$ .

Aunque con un modelo de esta naturaleza se pueden entender los efectos dinámicos que ocasionan los factores considerados, es bueno señalar también las principales limitaciones e idealizaciones que se han utilizado: (i) se considera un océano de densidad uniforme, no acotado en la horizontal; (ii) no se tiene en cuenta la curvatura de la Tierra (plano  $f$ ); (iii) se trabaja con las ecuaciones linealizadas, cuando en realidad para remolinos oceánicos observados,  $R_o \approx 0.2$  es un valor que debe ser tomado en cuenta; (iv) no se considera difusión de masa; y (v) el vórtice tiene una simetría azimutal perfecta. La inclusión de los términos alineales puede causar un comportamiento distinto para vórtices ciclónicos y anticiclónicos [10], pero en este trabajo existe simetría entre ambos casos.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado con el apoyo parcial del CONACyT a través del proyecto "Corrientes y remolinos en el Golfo de México y Mar Caribe" (ref. 1002-T9111). Damos las gracias al Dr. Federico Graef y a un revisor anónimo por sus comentarios acerca del trabajo, y el apoyo brindado por el Instituto de Oceanología de Cuba al primer autor.

## APÉNDICE

La Ec. (12b) dicta la evolución de la velocidad azimutal. Se busca una solución de esta ecuación por separación de variables, la cual se representa en la forma

$$v(r, t) = R(r)T(t). \quad (\text{A1})$$

Sustituyendo (A1) en la Ec. (12b) se obtiene

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \left[ \frac{\alpha D^4 - D^2}{D^2 - F} \right] R = -\gamma^2,$$

donde  $\gamma^2 > 0$  es el caso pertinente. Así, se tiene que la solución para el problema en el tiempo es una que decae como  $T \sim \exp(-\gamma^2 t)$  y la ecuación para el espacio es

$$[\alpha D^4 - D^2 + \gamma^2 D^2 - \gamma^2 F] R = 0.$$

Este operador se puede factorizar en

$$[\alpha D^2 + \beta] [D^2 + k^2] R = 0,$$

donde  $\beta$  y  $k^2$  son constantes tales que  $\beta k^2 = -\gamma^2 F$  y  $\alpha k^2 + \beta = \gamma^2 - 1$ . Una solución de  $[D^2 + k^2] R = 0$  es  $R(r) = J_1(kr)$ , siempre que  $k$  sea un número real.

Entonces,  $v(r, t) = J_1(kr) \exp(-\gamma^2 t)$  es solución de (12b) si se escoge

$$\gamma^2 = \frac{\alpha k^4 + k^2}{k^2 + F}.$$

Por lo tanto,

$$v(r, t) = \int_0^\infty T_0(k) \exp \left[ -\frac{\alpha k^4 + k^2}{k^2 + F} t \right] J_1(kr) dk$$

para  $T_0 = T_0(k)$  arbitraria, es un subconjunto del conjunto de soluciones de la ecuación diferencial (12b). Sin embargo, éste es el subconjunto apropiado que logra satisfacer las condiciones de regularidad y de frontera, o sea que  $v = v(r, t)$  sea acotada en todo el espacio y que decaiga a cero cuando  $r \rightarrow \infty$ . La otra solución a  $[D^2 + k^2] R = 0$  es la

función de Bessel de segundo tipo de orden uno,  $R(r) = Y_1(kr)$ , pero ésta es irregular en el origen.

## REFERENCIAS

1. E.J. Hopfinger y G.J.F. van Heijst, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **25** (1993) 241.
2. B.A. Elliot, *J. Phys. Oceanogr.* **12** (1982) 1292.
3. J.C. McWilliams, *Rev. Geophys.* **23** (1985) 165.
4. T.M. Joyce, en *U.S. National Report to International Union of Geodesy and Geophysics 1987-1990. Contributions in Oceanography* (1991) 610.
5. G.R. Flierl, *J. Phys. Oceanogr.* **7** (1977) 365.
6. J.C. McWilliams y G.R. Flierl, *J. Phys. Oceanogr.* **9** (1979) 1155.
7. D.C. Smith y R.O. Reid, *J. Phys. Oceanogr.* **12** (1982) 244.
8. H.P. Greenspan y L.N. Howard, *J. Fluid Mech.* **17** (1963) 385.
9. J. Pedlosky, *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New York (1979).
10. L.R.M. Maas, *J. Fluid Mech.* **246** (1993) 117.
11. G.R. Flierl y R.P. Mied, *J. Geophys. Res.* **90** (1985) 8917.
12. R.L. Molinari, *Cyclonic ring spin down in the North Atlantic*, Tesis Doctoral, Texas A&M Univ. College Station Tex. (1970).
13. R.P. Mied y G.R. Lindemann, *J. Phys. Oceanogr.* **9** (1979) 1183.
14. R.P. Mied, en *Mesoscale / Synoptic Coherent Structures in Geophysical Turbulence*, eds. J.C.J. Nihoul y B.M. Jamart (1989), 135.
15. U. Cederlöf, *J. Fluid Mech.* **187** (1988) 395.
16. H.P. Greenspan, *The Theory of Rotating Fluids*, Cambridge University Press (1969).
17. R.C. Kloosterziel y G.J.F. van Heijst, *J. Fluid Mech.* **239** (1992) 607.
18. J. Pedlosky, *J. Fluid Mech.* **28** (1967) 463.
19. R.C. Kloosterziel, *J. Engng. Maths.* **24** (1990) 213.
20. A.E. Gill, *Atmosphere-Ocean Dynamics*, Academic Press, New York (1982).
21. H.W. Ou y A.L. Gordon, *J. Geophys. Res.* **91** (1986) 7623.
22. M. Ikeda, *J. Phys. Oceanogr.* **11** (1981) 987.
23. J.J. Simpson, T.D. Dickey y C.J. Koblinsky, *Prog. Oceanogr.* **13** (1984) 5.
24. F.M. Vukovich y B.W. Crissman, *J. Geophys. Res.* **91** (1986) 2645.
25. S.J. Auer, *J. Geophys. Res.* **92** (1987) 11709.
26. J.K. Lewis y A.D. Kirwan, *J. Geophys. Res.* **90** (1985) 9017.
27. D. Nof, *J. Phys. Oceanogr.* **11** (1981) 1662.
28. D. Nof, *J. Mar. Res.* **41** (1983) 399.
29. M.K. Davey y P.D. Killworth, *J. Phys. Oceanogr.* **14** (1984) 1047.
30. B. Cushman-Roisin, E.P. Chassignet y B. Tang, *J. Phys. Oceanogr.* **20** (1990) 758.
31. V.M. Kamenkovich, M.N. Koshlyakov y A.S. Monin, *Synoptic Eddies in the Ocean*, D. Reidel (1986).
32. E.P. Chassignet y B. Cushman-Roisin, *J. Phys. Oceanogr.* **21** (1991) 939.
33. J. O'Donnell y P.F. Linden, *J. Fluid Mech.* **232** (1991) 439.