Formulación hamiltoniana para cuerpos rígidos

G.F. TORRES DEL CASTILLO
Departamento de Física Matemática, Instituto de Ciencias
Universidad Autónoma de Puebla, 72000 Puebla, Pue., México

Recibido el 9 de diciembre de 1994; aceptado el 28 de abril de 1995

RESUMEN. Se obtiene la relación entre las componentes cartesianas del momento angular y los momentos canónicos conjugados a un conjunto arbitrario de coordenadas en el espacio de configuración de un cuerpo rígido con un punto fijo; también se muestra cómo dicha relación, al igual que la existente entre la velocidad angular y las velocidades generalizadas, se pueden obtener fácilmente usando la representación de las rotaciones por matrices de SU(2).

ABSTRACT. The relationship between the cartesian components of the angular momentum and the canonical momenta conjugated to an arbitrary set of coordinates in the configuration space of a rigid body with a fixed point is obtained and it is shown how this relationship, as well as that between the angular velocity and the generalized velocities, can be easily obtained making use of the representation of the rotations by SU(2) matrices.

PACS: 03.20.+i; 02.20.Qs

1. INTRODUCCIÓN

El estudio del movimiento de un cuerpo rígido, además de ser un tema central de la mecánica clásica, es particularmente interesante debido a su relación con la teoría de grupos. Como se sabe, el espacio de configuración de un cuerpo rígido con un punto fijo se puede identificar con el grupo de rotaciones en tres dimensiones (ver, *e.g.*, la Ref. [1]); sin embargo, en el tratamiento usual de la dinámica de un cuerpo rígido, basado en la formulación lagrangiana, una gran parte de su relación con la teoría de grupos queda oculta.

En este artículo se presenta una formulación hamiltoniana para cuerpos rígidos, en la que se destaca el papel de las funciones definidas en el espacio fase como generadoras de transformaciones. Los resultados presentados aquí son también útiles en la formulación lagrangiana del mismo problema. En la Sec. 2 se encuentra la relación entre las componentes del momento angular y los momentos canónicos conjugados a un conjunto arbitrario de coordenadas para un cuerpo rígido con un punto fijo. En la Sec. 3 se muestra cómo se pueden obtener fácilmente las expresiones para las componentes del momento angular y de la velocidad angular de un cuerpo rígido empleando la representación de las rotaciones mediante las matrices del grupo SU(2). Los índices $i, j, \ldots$, corren de 1 a 3 y se utilizan para etiquetar las coordenadas y sus momentos conjugados; los índices a, b, $\ldots$, también corren de 1 a 3 y etiquetan componentes cartesianas. Sobre ambos tipos de índices se aplica la convención de suma.

2. Coordenadas canónicas para un cuerpo rígido

Como se sabe, cualquier función diferenciable $G(q^i, p_i)$ definida en el espacio fase de un sistema mecánico es la "generadora infinitesimal" de un grupo uniparamétrico local de transformaciones, el cual se obtiene integrando el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dq^i}{ds} = \frac{\partial G}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial G}{\partial q^i}, \tag{1}$$

donde s es una variable que parametriza las transformaciones generadas por G (ver, *e.g.*, las Refs. [1,2]). En términos del paréntesis de Poisson, el sistema de ecuaciones (1) adquiere la forma más simétrica

$$\frac{dq^i}{ds} = \{q^i, G\}, \qquad \frac{dp_i}{ds} = \{p_i, G\}. \tag{2}$$

Las componentes cartesianas del momento lineal y del momento angular de un sistema mecánico se pueden definir como aquellas funciones que generan las traslaciones (del sistema completo) paralelas a los ejes cartesianos y las rotaciones alrededor de estos ejes, respectivamente. Por otra parte, de las Ecs. (1) se deduce que la función $G = p_k$ genera el grupo de transformaciones dado por

$$q^i(s) = q^i_0 + s\delta^i_k, \qquad p_i(s) = p_{i0}, \tag{3}$$

donde las q^i_0 y p_{i0} son constantes (es decir, bajo las transformaciones generadas por p_k, varía solamente la coordenada q^k); sin embargo, debido a la libertad existente en la elección de las coordenadas q^i, las transformaciones (3) pueden no corresponder a traslaciones o rotaciones en el espacio de configuración.

En el caso de un cuerpo rígido con un punto fijo, la configuración en cualquier instante está completamente determinada por la rotación que lleva al cuerpo rígido desde una orientación de referencia a la orientación que tiene en ese instante, por lo que definir coordenadas para la configuración de un cuerpo rígido es equivalente a definir una parametrización para las rotaciones en tres dimensiones. Además de las parametrizaciones mediante ángulos de Euler usadas comúnmente [1], existen otras parametrizaciones para las rotaciones en las que, incluso, las coordenadas pueden no ser ángulos. Por ejemplo, cualquier rotación puede representarse por las componentes cartesianas de un vector cuya dirección es la del eje de la rotación y cuya magnitud es el ángulo rotado alrededor de dicho eje.

Dado un conjunto arbitrario de coordenadas q^i para la configuración de un cuerpo rígido con un punto fijo, al variar una sola de las coordenadas q^i, con las demás fijas, partiendo de una orientación arbitraria del cuerpo rígido, éste rota alrededor de algún eje. Para identificar el efecto que tiene sobre la configuración de un cuerpo rígido la variación de cada una de las coordenadas q^i, conviene recordar que la matriz que representa una rotación "infinitesimal" por un ángulo $d\theta$ alrededor del eje $\hat{\mathbf{n}}$ (en el sentido dado por la regla de la mano derecha) es

$$I - in^a S_a d\theta, \tag{4}$$

donde I es la matriz identidad y las matrices S_a están dadas por

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

o, en forma abreviada,

$$(S_a)_{bc} = -i\varepsilon_{abc} \tag{6}$$

(ver, *e.g.*, la Ref. [3]). (En la Ec. (4) se ha seguido el punto de vista "activo", de acuerdo con el cual la matriz de rotación transforma un vector en otro, con ambos vectores referidos a un mismo sistema de coordenadas.)

Sea ahora A la rotación correspondiente a los valores q^1, q^2, q^3 de las coordenadas y sea A' la rotación correspondiente a q^1+dq^1, q^2+dq^2, q^3+dq^3, donde, como es usual, las dq^i son incrementos "pequeños". Por lo tanto, A y A' representan configuraciones cercanas entre sí de un cuerpo rígido, así que se puede pasar de la configuración representada por A a la representada por A' mediante una rotación "infinitesimal" de la forma $I - i\omega^a S_a$, donde las ω^a son las componentes del vector $\boldsymbol{\omega}$ que determina el eje de la rotación infinitesimal que lleva de A a A' y $|\boldsymbol{\omega}|$ es el ángulo de giro necesario [ver la Ec. (4)]. Luego,

$$\begin{aligned} A' &\simeq (I - i\omega^a S_a)A \\ &= A - i\omega^a S_a A, \end{aligned}$$

por lo que

$$A' - A \simeq -i\omega^a S_a A. \tag{7}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} A' - A &= A(q^1 + dq^1, q^2 + dq^2, q^3 + dq^3) - A(q^1, q^2, q^3) \\ &\simeq \frac{\partial A}{\partial q^i} dq^i = dA. \end{aligned} \tag{8}$$

De las Ecs. (7–8) se obtiene entonces que

$$dA = -i\omega^a S_a A \tag{9}$$

o, equivalentemente,

$$(dA)A^{-1} = -i\omega^a S_a. \tag{10}$$

Dado que el lado izquierdo de la Ec. (9) o (10) es una combinación lineal de las dq^i, lo mismo debe ocurrir con el lado derecho de estas ecuaciones; puesto que las matrices S_a son constantes [Ecs. (5)], esto significa que podemos escribir

$$\omega^a = M_i^a dq^i, \tag{11}$$

donde las M_i^a son funciones de las coordenadas q^j. De acuerdo con lo anterior, el vector (M_i^1, M_i^2, M_i^3) es el eje "instantáneo" de giro del cuerpo rígido cuando varía solamente la coordenada q^i. Puesto que p_i es la generadora infinitesimal de desplazamientos en la coordenada q^i, se deduce entonces que p_i es la generadora infinitesimal de la rotación definida por el vector (M_i^1, M_i^2, M_i^3), luego

$$p_i = M_i^a K_a, \tag{12}$$

donde las K_a son las componentes del momento angular del cuerpo rígido (con respecto al sistema de coordenadas "fijo en el espacio"), debido a que K_a es la generadora infinitesimal de rotaciones alrededor del eje x^a.

La matriz (M_i^a) es invertible dondequiera que las coordenadas q^i sean independientes entre sí [ver, *e.g.*, la Ec. (38)], por lo que de la Ec. (12) se tiene que

$$K_a = \widetilde{M}_a^i p_i, \tag{13}$$

donde $(\widetilde{M}_a^i)$ denota la matriz inversa de (M_i^a). Los paréntesis de Poisson entre las componentes K_a se pueden obtener de las relaciones anteriores sin necesidad de escoger un sistema de coordenadas q^i específico, ni de calcular los elementos de las matrices (M_i^a) y $(\widetilde{M}_a^i)$. De hecho, sustituyendo la Ec. (11) y la relación $dA = (\partial A/\partial q^i)dq^i$ en la Ec. (9) se obtiene que

$$\frac{\partial A}{\partial q^i} = -iM_i^a S_a A. \tag{14}$$

Derivando esta relación y empleándola nuevamente se halla que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 A}{\partial q^j \partial q^i} &= -i\frac{\partial M_i^a}{\partial q^j} S_a A - iM_i^a S_a \frac{\partial A}{\partial q^j} \\
&= -i\frac{\partial M_i^a}{\partial q^j} S_a A - M_i^a S_a M_j^b S_b A.
\end{aligned}$$

La conmutatividad de las derivadas parciales de A implica entonces que

$$i\left(\frac{\partial M_i^a}{\partial q^j} - \frac{\partial M_j^a}{\partial q^i}\right) S_a A + \left(M_i^a M_j^b S_a S_b - M_j^a M_i^b S_a S_b\right) A = 0.$$

Usando que A es invertible e intercambiando los índices a y b en el último término de la ecuación anterior se obtiene

$$i\left(\frac{\partial M_i^a}{\partial q^j} - \frac{\partial M_j^a}{\partial q^i}\right) S_a + M_i^a M_j^b [S_a, S_b] = 0. \tag{15}$$

Usando las relaciones de conmutación

$$[S_a, S_b] = i\varepsilon_{abc} S_c, \tag{16}$$

las cuales se deducen de la Ec. (6), y el que las matrices S_a son linealmente independientes, de la Ec. (15) se llega a las relaciones

$$\frac{\partial M_i^c}{\partial q^j} - \frac{\partial M_j^c}{\partial q^i} + \varepsilon_{abc} M_i^a M_j^b = 0, \tag{17}$$

que contienen solamente las funciones M_i^a.

El paréntesis de Poisson entre las componentes del momento angular (13) es entonces

$$\begin{aligned} \{K_a, K_b\} &\equiv \frac{\partial K_a}{\partial q^i}\frac{\partial K_b}{\partial p_i} - \frac{\partial K_b}{\partial q^i}\frac{\partial K_a}{\partial p_i} \\ &= \frac{\partial \widetilde{M}_a^j}{\partial q^i} p_j \widetilde{M}_b^i - \frac{\partial \widetilde{M}_b^j}{\partial q^i} p_j \widetilde{M}_a^i \\ &= \frac{\partial \widetilde{M}_a^j}{\partial q^i} M_j^c K_c \widetilde{M}_b^i - \frac{\partial \widetilde{M}_b^j}{\partial q^i} M_j^c K_c \widetilde{M}_a^i, \end{aligned} \tag{18}$$

donde se han empleado las Ecs. (13) y (12). Usando ahora que

$$\frac{\partial \widetilde{M}_a^j}{\partial q^i} M_j^c = \frac{\partial (\widetilde{M}_a^j M_j^c)}{\partial q^i} - \widetilde{M}_a^j \frac{\partial M_j^c}{\partial q^i} = \frac{\partial \delta_a^c}{\partial q^i} - \widetilde{M}_a^j \frac{\partial M_j^c}{\partial q^i} = -\widetilde{M}_a^j \frac{\partial M_j^c}{\partial q^i},$$

de las Ecs. (18) (intercambiando los índices i y j en el primer término) y (17) se halla finalmente

$$\begin{aligned} \{K_a, K_b\} &= \left(-\widetilde{M}_a^j \frac{\partial M_j^c}{\partial q^i} \widetilde{M}_b^i + \widetilde{M}_b^j \frac{\partial M_j^c}{\partial q^i} \widetilde{M}_a^i\right) K_c \\ &= -\widetilde{M}_a^i \widetilde{M}_b^j \left(\frac{\partial M_i^c}{\partial q^j} - \frac{\partial M_j^c}{\partial q^i}\right) K_c \\ &= -\widetilde{M}_a^i \widetilde{M}_b^j (-\varepsilon_{dec} M_i^d M_j^e) K_c \\ &= \varepsilon_{abc} K_c, \end{aligned} \tag{19}$$

que son las relaciones conocidas para las componentes del momento angular.

Las componentes del momento angular con respecto al sistema de coordenadas fijo en el cuerpo, L_a, están relacionadas con las componentes K_a por medio de la matriz de rotación $A = (a_{bc})$:

$$K_b = a_{bc} L_c \tag{20}$$

o, equivalentemente, usando que $A^{-1} = A^t$,

$$L_b = a_{cb} K_c. \tag{21}$$

De acuerdo con las Ecs. (12) y (20), los momentos canónicos p_i están dados en términos de las componentes L_a por

$$p_i = M_i^b a_{bc} L_c \equiv M'^c_i L_c. \tag{22}$$

Los elementos de la matriz (M'^c_i) se pueden calcular directamente notando que

$$A^{-1} S_b A = a_{bc} S_c, \tag{23}$$

lo cual se deduce de la Ec. (6), la ortogonalidad de A y de que, para cualquier matriz con determinante igual a la unidad, $\varepsilon_{bcd} a_{be} a_{cf} a_{dg} = \varepsilon_{efg}$; de las Ecs. (10), (23), (11) y (22) se obtiene entonces

$$A^{-1}\, dA = -i\omega^b A^{-1} S_b A = -iM_i^b dq^i a_{bc} S_c = -iM'^c_i\, dq^i S_c, \tag{24}$$

que equivale a las relaciones

$$\frac{\partial A}{\partial q^i} = -iM'^a_i A S_a, \tag{25}$$

las cuales son similares a las Ecs. (14).

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso de las Ecs. (14), de las relaciones (25) se halla que

$$\frac{\partial M'^c_i}{\partial q^j} - \frac{\partial M'^c_j}{\partial q^i} - \varepsilon_{abc} M'^a_i M'^b_j = 0 \tag{26}$$

[*cf.* Ecs. (17)] y, por consiguiente, los paréntesis de Poisson entre las componentes del momento angular con respecto a los ejes fijos en el cuerpo son

$$\{L_a, L_b\} = -\varepsilon_{abc} L_c, \tag{27}$$

que difieren de los dados en la Ec. (19), a pesar de que en ambos casos se trata de componentes del momento angular. (Este hecho es consecuencia de que las componentes L_a generan rotaciones alrededor de ejes que rotan junto con el cuerpo.) Los paréntesis de Poisson entre K_a y L_b pueden calcularse en forma similar. Expresando las funciones $\widetilde{M'}{}^i_a$ en la forma $\widetilde{M'}{}^i_c = \widetilde{M}{}^i_b a_{bc}$ [Ec. (22)] y empleando las Ecs. (25), (6) y (17) se halla que

$$\{K_a, L_b\} = 0. \tag{28}$$

(Puede notarse que las relaciones (27) pueden obtenerse de manera análoga, usando las Ecs. (25), (6) y (17).)

Concluimos esta sección con las siguientes observaciones. El que el lado izquierdo de la Ec. (10) sea una combinación lineal de las matrices S_a se deduce también del hecho de que estas matrices forman una base para las matrices antisimétricas 3×3, ya que de la ortogonalidad de A $(A^{-1} = A^{\mathrm{t}})$ sigue que $[(dA)A^{-1}]^{\mathrm{t}} = [(dA)A^{\mathrm{t}}]^{\mathrm{t}} = A\, dA^{\mathrm{t}} = d(AA^{\mathrm{t}}) - (dA)A^{\mathrm{t}} = -(dA)A^{-1}$, lo que significa que $(dA)A^{-1}$ es antisimétrica.

La relación (22) entre los momentos canónicos y las componentes del momento angular con respecto a los ejes fijos en el cuerpo puede obtenerse también a partir de la lagrangiana del cuerpo rígido, la cual involucra al tensor de inercia y requiere de las expresiones para las componentes de la velocidad angular con respecto a los ejes fijos en el cuerpo en términos de q^i y $\dot{q}^i$ (ver, *e.g.*, las Refs. [1,2]). La Ec. (22) no contiene al tensor de inercia, por lo que dicha relación es de carácter cinemático; de hecho, como se puede ver del enfoque seguido aquí, tiene un origen geométrico y no es necesario conocer la lagrangiana del sistema. En el lenguaje de los grupos de Lie, las formas diferenciales $\omega^a = M_i^a\, dq^i$ y $\omega'^a \equiv M'^a_i\, dq^i$ son formas invariantes por la derecha y por la izquierda, respectivamente, y las Ecs. (17) y (26) corresponden a las llamadas ecuaciones de Maurer-Cartan (en el presente caso, para el grupo SO(3)) (ver, *e.g.*, las Refs. [4,5]). De la definición de los paréntesis de Poisson resulta que las Ecs. (14) y (25) equivalen a las relaciones

$$\{A, K_a\} = -iS_aA \quad \text{y} \quad \{A, L_a\} = -iAS_a, \tag{29}$$

respectivamente.

En vista de las Ecs. (6) y (10), el efecto del producto matricial $(dA)A^{-1}$ sobre un vector arbitrario $\mathbf{v}$ equivale al producto vectorial $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$, el cual aparece en tratamiento estándar del cuerpo rígido y corresponde a la diferencia entre las variaciones temporales de $\mathbf{v}$ con respecto a los ejes fijos en el espacio y a los ejes fijos en el cuerpo (ver, *e.g.*, las Refs. [1,2]).

3. Expresión explícita de las componentes del momento angular

Las matrices (M_i^a) y (M'^a_i) pueden calcularse directamente a partir de las relaciones

$$(dA)A^{-1} = -iM_i^a\, dq^i S_a, \qquad A^{-1}\, dA = -iM'^a_i\, dq^i S_a, \tag{30}$$

[Ecs. (14) y (25)] una vez que se elige una parametrización específica para las matrices de rotación: $A = A(q^i)$ (las coordenadas q^i que se emplean más comúnmente son ángulos de Euler). Puesto que A es una matriz 3×3 cuyos elementos tienen expresiones un tanto largas (ver, *e.g.*, la Ref. [1], Ec. (4–46)), resulta muy conveniente aprovechar el que las rotaciones pueden representarse también por matrices (complejas) 2×2 (ver, *e.g.*, las Refs. [1,3]). Usando el hecho de que una rotación "infinitesimal" por un ángulo $d\theta$ alrededor del eje $\hat{\mathbf{n}}$ se representa por

$$I - \tfrac{i}{2} n^a \sigma_a\, d\theta \tag{31}$$

[*cf.* Ec. (4)], donde las σ_a son las matrices de Pauli, y repitiendo los pasos seguidos al principio de la Sec. 2, se llega a que

$$(dQ)Q^{-1} = -\tfrac{i}{2}\omega^a\sigma_a = -\tfrac{i}{2}M_i^a\, dq^i\sigma_a, \tag{32}$$

donde Q es una matriz 2×2, unitaria, con determinante igual a la unidad que representa una rotación parametrizada por las variables q^i y ω^a tiene el mismo significado que en la Sec. 2.

Similarmente, de las Ecs. (32), (22) y la fórmula

$$Q^{-1}\sigma_b Q = a_{bc}\sigma_c \tag{33}$$

[*cf.* Ec. (23)] [ver, *e.g.*, la Ref. [3], Ec. (31)] se obtiene la relación

$$Q^{-1}\, dQ = -\tfrac{i}{2}\omega'^a\sigma_a = -\tfrac{i}{2}M'^a_i\, dq^i\sigma_a. \tag{34}$$

Las ω'^a son las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ con respecto al sistema de coordenadas fijo en el cuerpo.

Como ejemplo de la utilidad de las Ecs. (32) y (34), consideraremos la parametrización de las rotaciones mediante un vector $\mathbf{N}$ cuya dirección es la del eje de la rotación y cuya magnitud es el ángulo rotado. En tal caso [ver, *e.g.*, la Ref. [3], Ec. (13)]

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} - in^3\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} & -(in^1+n^2)\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \\ (-in^1+n^2)\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} + in^3\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \tag{35}$$

donde $\alpha = |\mathbf{N}|$ y $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{N}/|\mathbf{N}|$. Usando el que $Q^{-1} = Q^\dagger$, de las Ecs. (32), (34) y (35) se obtiene que

$$\omega^a = n^a\, d\alpha + \operatorname{sen}\alpha\, dn^a + (1-\cos\alpha)\varepsilon_{abc}n^b dn^c \tag{36}$$

y

$$\omega'^a = n^a\, d\alpha + \operatorname{sen}\alpha\, dn^a - (1-\cos\alpha)\varepsilon_{abc}n^b dn^c. \tag{37}$$

(Nótese que debido a la forma explícita de las matrices de Pauli, para obtener las expresiones anteriores basta calcular el primer renglón o la primera columna de los productos $(dQ)Q^{-1}$ y $Q^{-1}\, dQ$.) Las variables n^a no son independientes entre sí debido a que $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario, $n^a n^a = 1$. En términos de las componentes cartesianas de $\mathbf{N}$, las cuales sí son independientes entre sí, las Ecs. (36) y (37) equivalen a

$$\omega^a = \frac{N^a}{|\mathbf{N}|^2}N^b\, dN^b + \frac{\operatorname{sen}|\mathbf{N}|}{|\mathbf{N}|^3}\left(|\mathbf{N}|^2\, dN^a - N^a N^b\, dN^b\right) + \frac{1-\cos|\mathbf{N}|}{|\mathbf{N}|^2}\varepsilon_{abc}N^b\, dN^c \tag{38}$$

y

$$\omega'^a = \frac{N^a}{|\mathbf{N}|^2}N^b\, dN^b + \frac{\operatorname{sen}|\mathbf{N}|}{|\mathbf{N}|^3}\left(|\mathbf{N}|^2\, dN^a - N^a N^b\, dN^b\right) - \frac{1-\cos|\mathbf{N}|}{|\mathbf{N}|^2}\varepsilon_{abc}N^b\, dN^c. \tag{39}$$

Usando las Ecs. (13) y (22) se halla entonces que las componentes del momento angular están relacionadas con los momentos canónicos conjugados a las variables N^a por

$$K_a = \frac{N^a}{|\mathbf{N}|^2}N^b p_b + \frac{\operatorname{sen}|\mathbf{N}|}{2|\mathbf{N}|(1-\cos|\mathbf{N}|)}\left(|\mathbf{N}|^2 p_a - N^a N^b p_b\right) + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{abc}N^b p_c \tag{40}$$

y

$$L_a = \frac{N^a}{|\mathbf{N}|^2}N^b p_b + \frac{\operatorname{sen}|\mathbf{N}|}{2|\mathbf{N}|(1-\cos|\mathbf{N}|)}\left(|\mathbf{N}|^2 p_a - N^a N^b p_b\right) - \tfrac{1}{2}\varepsilon_{abc}N^b p_c. \tag{41}$$

Alternativamente, las componentes del vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ pueden parametrizarse en la forma usual $(n^1, n^2, n^3) = (\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \cos\theta)$. De las Ecs. (36) y (37) se halla entonces

$$\begin{aligned}
\omega^1 &= \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\, d\alpha + [\operatorname{sen}\alpha\cos\theta\cos\varphi - (1-\cos\alpha)\operatorname{sen}\varphi]\, d\theta \\
&\quad - [\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi + (1-\cos\alpha)\cos\theta\cos\varphi]\operatorname{sen}\theta\, d\varphi, \\
\omega^2 &= \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\, d\alpha + [\operatorname{sen}\alpha\cos\theta\operatorname{sen}\varphi + (1-\cos\alpha)\cos\varphi]\, d\theta \\
&\quad + [\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi - (1-\cos\alpha)\cos\theta\operatorname{sen}\varphi]\operatorname{sen}\theta\, d\varphi, \\
\omega^3 &= \cos\theta\, d\alpha - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta\, d\theta + (1-\cos\alpha)\operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi,
\end{aligned} \tag{42}$$

y

$$\begin{aligned}
\omega'^1 &= \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\, d\alpha + [\operatorname{sen}\alpha\cos\theta\cos\varphi + (1-\cos\alpha)\operatorname{sen}\varphi]\, d\theta \\
&\quad - [\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi - (1-\cos\alpha)\cos\theta\cos\varphi]\operatorname{sen}\theta\, d\varphi, \\
\omega'^2 &= \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\, d\alpha + [\operatorname{sen}\alpha\cos\theta\operatorname{sen}\varphi - (1-\cos\alpha)\cos\varphi]\, d\theta \\
&\quad + [\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi + (1-\cos\alpha)\cos\theta\operatorname{sen}\varphi]\operatorname{sen}\theta\, d\varphi, \\
\omega'^3 &= \cos\theta\, d\alpha - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta\, d\theta - (1-\cos\alpha)\operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi.
\end{aligned} \tag{43}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
K_1 &= \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\, p_\alpha + \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\theta\cos\varphi - (1-\cos\alpha)\operatorname{sen}\varphi}{2(1-\cos\alpha)} p_\theta \\
&\quad - \frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi + (1-\cos\alpha)\cos\theta\cos\varphi}{2(1-\cos\alpha)\operatorname{sen}\theta} p_\varphi, \\
K_2 &= \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\, p_\alpha + \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\theta\operatorname{sen}\varphi + (1-\cos\alpha)\cos\varphi}{2(1-\cos\alpha)} p_\theta \\
&\quad + \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi - (1-\cos\alpha)\cos\theta\operatorname{sen}\varphi}{2(1-\cos\alpha)\operatorname{sen}\theta} p_\varphi, \\
K_3 &= \cos\theta\, p_\alpha - \frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta}{2(1-\cos\alpha)} p_\theta + \tfrac{1}{2} p_\varphi,
\end{aligned} \tag{44}$$

y

$$\begin{aligned}
L_1 &= \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\, p_\alpha + \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\theta\cos\varphi + (1-\cos\alpha)\operatorname{sen}\varphi}{2(1-\cos\alpha)} p_\theta \\
&\quad - \frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi - (1-\cos\alpha)\cos\theta\cos\varphi}{2(1-\cos\alpha)\operatorname{sen}\theta} p_\varphi,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L_2 &= \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \, p_\alpha + \frac{\operatorname{sen}\alpha \cos\theta \operatorname{sen}\varphi - (1-\cos\alpha)\cos\varphi}{2(1-\cos\alpha)} p_\theta \\
&\quad + \frac{\operatorname{sen}\alpha \cos\varphi + (1-\cos\alpha)\cos\theta \operatorname{sen}\varphi}{2(1-\cos\alpha)\operatorname{sen}\theta} p_\varphi, \\
L_3 &= \cos\theta \, p_\alpha - \frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta}{2(1-\cos\alpha)} p_\theta - \tfrac{1}{2} p_\varphi,
\end{aligned}
\tag{45}
$$

donde p_α, p_θ, p_φ son los momentos conjugados a α, θ, φ, respectivamente.

De la discusión presentada en la Sec. 2, sigue que, para cualquier conjunto de coordenadas q^i, $M_i^a \dot{q}^i$ y $M'^a_i \dot{q}^i$ son las componentes de la velocidad angular con respecto a los ejes fijos en el espacio y a los ejes fijos en el cuerpo, respectivamente [Ecs. (11)]. (Nótese que en el tratamiento usual resulta un tanto complicado el obtener las relaciones entre las componentes de la velocidad angular y las $\dot{q}^i$, las cuales son necesarias para hallar la expresión de la lagrangiana (ver, *e.g.*, las Refs. [1,2]).)

Concluyendo esta sección, cabe agregar que la Ec. (32) puede obtenerse directamente de la Ec. (10) empleando la relación entre los elementos de la matriz de rotación A y la matriz unitaria Q que le corresponde, a saber: $a_{bc} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \sigma_b Q \sigma_c Q^\dagger$ (ver, *e.g.*, las Refs. [3,6]). (Este cálculo se simplifica usando la notación y varias fórmulas de la Ref. [6].) Las fórmulas de la Sec. 2 que contienen las matrices de rotación y las matrices S_a siguen siendo válidas si en ellas se sustituye A por Q y S_a por $\frac{1}{2}\sigma_a$.

4. Comentarios finales

Las Ecs. (30), (32) y (34) son válidas para cualquier grupo de Lie matricial si las matrices S_a o $\frac{1}{2}\sigma_a$ se sustituyen por matrices base del álgebra de Lie correspondiente. En el caso específico considerado aquí, ocurre que los coeficientes ω^a y ω'^a tienen un significado físico directo. Los resultados presentados en este artículo muestran que, al igual que en otros problemas de la mecánica clásica, el formalismo hamiltoniano permite mostrar una estructura que en la formulación lagrangiana no aparece en forma explícita. (Otro ejemplo es la simetría asociada con la existencia del vector de Laplace-Runge-Lenz en el problema de Kepler.) Como puede verse, a diferencia del procedimiento seguido en la Sec. 2, el cálculo directo de los paréntesis de Poisson (19), (27) y (28) usando expresiones explícitas para las componentes del momento angular resultaría bastante laborioso.

Agradecimientos

El autor agradece las sugerencias y comentarios de C. Uribe Estrada y J. García Ortiz. Este trabajo fue apoyado parcialmente por el CONACYT.

Referencias

1. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd Ed., Addison-Wesley, Reading, Mass. (1980).

2. D. ter Haar, *Elements of hamiltonian mechanics*, 2nd Ed., North-Holland, Amsterdam (1964), reimpreso por Pergamon, Oxford (1971).
3. G.F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **40** (1994) 119.
4. H. Flanders, *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*, Academic Press, New York (1963), reimpreso por Dover, New York (1989).
5. G.F. Torres del Castillo, *Notas sobre variedades diferenciables*, monografía del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México (1981).
6. G.F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **40** (1994) 195.