

Distribución de intensidad en un plano posterior de una lente de Fresnel holográfica en la aproximación de Fraunhofer

LEONEL REYES Y AURELIO A. OLIVA

Centro de Desarrollo de Equipos e Instrumentos Científicos (CEDEIC)
Academia de Ciencias de Cuba

Luz No. 375 e/ Picota y Compostela, Habana 10100, Cuba

Recibido el 5 de agosto de 1994; aceptado el 20 de febrero de 1995

RESUMEN. En el presente trabajo se obtiene una expresión general, utilizando la teoría escalar de la difracción, que permite estimar la distribución de intensidades en cualquier plano posterior, dentro de la aproximación de Fraunhofer, de una lente de Fresnel holográfica.

ABSTRACT. A general expression, within the Fraunhofer's approximation, which allows to estimate the intensity distribution in any plane, behind a Fresnel holographic lens, is obtained by applying the methods of the scalar diffraction theory.

PACS: 42.80.-f; 42.40.-i; 42.10.-s

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha manifestado un renovado interés en las lentes de Fresnel [1-3], especialmente en las que poseen una alta concentración de zonas [4-10], debido a que presentan un conjunto interesante de propiedades. En general, en estos trabajos se ha estudiado el comportamiento del frente de ondas en el foco principal, o cuando más, en los focos secundarios, por ser éstos los puntos de mayor interés.

Por otro lado, y atendiendo a la marcada aberración cromática o distribución del espectro de la radiación incidente a lo largo del eje óptico de una lente de Fresnel holográfica, se ha realizado una serie de trabajos relacionados con las aplicaciones a la conversión directa de energía solar en electricidad, utilizándolas como concentradores selectivos [11-13]. Para este fin, el tamaño finito de las celdas fotoeléctricas hace que resulte importante conocer no sólo el comportamiento en los focos (principal o secundarios), sino también, en general, en un entorno de los mismos, lo cual, hasta el momento, no ha sido estudiado con detalle. Esta importancia está dada por varios factores, entre los cuales pudiera citarse, por ejemplo, la distribución espacial de intensidad para diferentes longitudes de onda o intervalos de longitudes de onda de interés de acuerdo con la respuesta espectral del material de las fotoceldas; el diseño de la rejilla colectora de la celda para optimizar la eficiencia de conversión de la misma, y otros.

En este trabajo se obtiene, a partir de la aplicación de la teoría escalar de la difracción, una expresión que permite calcular, dentro de la aproximación de Fraunhofer, la distribución de intensidades en un plano posterior cualquiera de una lente de Fresnel.

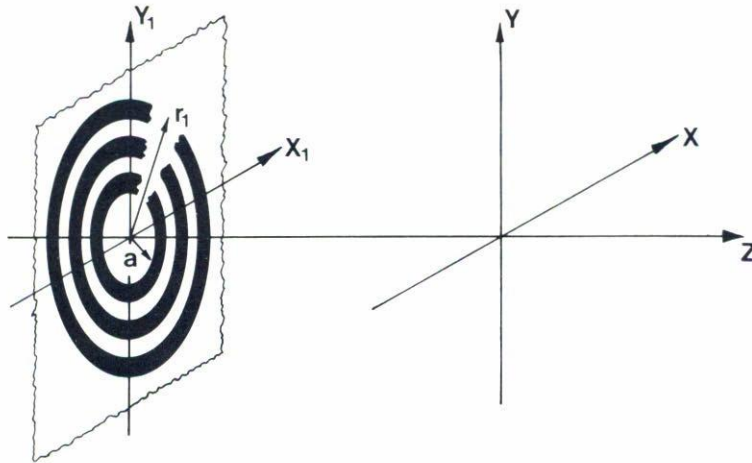


FIGURA 1. Lente circular de Fresnel; a : radio de la primera zona, r_1 : radio vector en el plano (x_1, y_1) , ubicado a una distancia z del plano de observación (x, y) .

2. DESARROLLO

Sean (x_1, y_1) y (x, y) dos planos paralelos entre sí, en el primero de los cuales se encuentra situada una lente circular de Fresnel, de modo tal que su centro coincide con el origen de coordenadas, tal como muestra la Fig. 1, en la que a corresponde al radio de la primera zona y r_1 al radio vector en el plano (x_1, y_1) . El plano (x, y) será el de observación.

Se desea conocer la función de distribución de la intensidad luminosa en un plano posterior a la placa zonal o lente de Fresnel, situado a una distancia z de éste tal que cumpla con la aproximación de Fraunhofer. La Fig. 2 muestra la función de transmitancia de una lente de Fresnel, que dada la simetría circular del problema, tiene la forma

$$t(r_1^2) = \begin{cases} 1, & \text{si } \xi_{2n}^2 \leq r_1^2 < \xi_{2n+1}^2, \\ 0, & \text{si } \xi_{2n+1}^2 \leq r_1^2 < \xi_{2n+2}^2. \end{cases}$$

De acuerdo con Gómez-Reino y Llopis [14], esta función de transmitancia puede ser representada como

$$t(r_1^2) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)\pi} \text{sen} \left[\frac{(2n+1)\pi}{a^2} r_1^2 \right] \tag{1}$$

Si se ilumina con una onda plana monocromática de amplitud A que incide de izquierda a derecha normalmente sobre el plano (x_1, y_1) , la distribución de amplitudes inmediatamente después de la lente tendrá la forma

$$U(x_1, y_1) = At(r_1^2). \tag{2}$$

Teniendo en cuenta la expresión para la propagación de la perturbación en la aproximación de Fraunhofer de la teoría escalar de la difracción [15], la distribución $\psi(r)$ en el

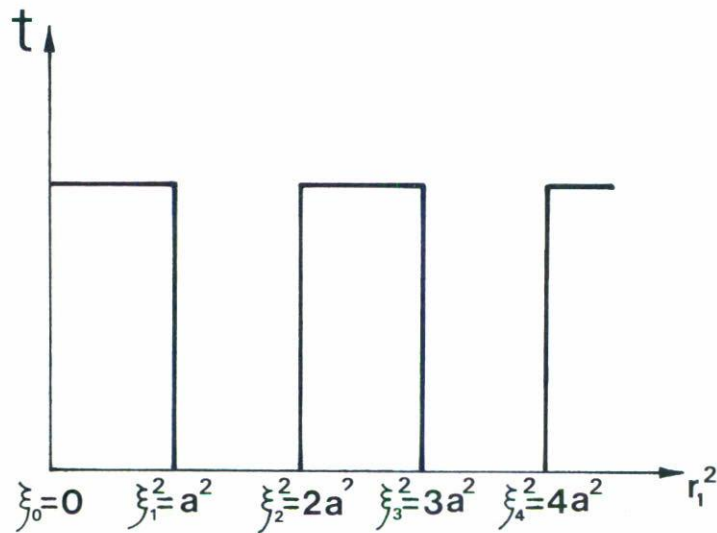


FIGURA 2. Función de transmitancia de una lente de Fresnel.

plano (x, y) a distancia z del plano (x_1, y_1) , vendrá dada por

$$\psi(r) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} u(x_1, y_1) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(xx_1+yy_1)} dx_1 dy_1. \tag{3}$$

En el presente caso, sustituyendo (2) en (3), se obtiene

$$\psi(r) = A \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}r^2} \mathcal{F}\{t(r_1^2)\},$$

donde $\mathcal{F}\{t(r_1^2)\}$ es la transformada de Fourier de la función de transmitancia (1).

Resulta cómodo utilizar la siguiente notación:

$$A \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}r^2} = \bar{A}(r, z) \quad (2n + 1 = N),$$

obteniéndose

$$\psi(r) = \bar{A}(r, z) \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{2}{N\pi} \text{sen} \left[\frac{N\pi}{a^2} r_1^2 \right] \right\}$$

Haciendo uso de la fórmula de Euler y de propiedades de la transformada de Fourier [16], se obtiene

$$\psi(\rho) = \bar{A}(r, z) \left[\frac{1}{2} \delta(\rho) + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{a^2}{N\pi} \left(e^{-i\frac{\pi a^2}{N} \rho^2} + e^{i\frac{\pi a^2}{N} \rho^2} \right) \right], \tag{4}$$

donde $\rho = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$, siendo $f_x = x/\lambda z$ y $f_y = y/\lambda z$ las frecuencias espaciales en el plano (x, y) y $\delta(r)$ la función delta de Dirac. El primer término de la expresión entre corchetes representa la onda no difractada por la lente de Fresnel, y cada uno de los otros dos términos constituye la superposición de ondas esféricas, convergentes o divergentes, cuyos focos se encuentran situados a ambos lados de la placa.

Por otro lado, la ecuación que describe a una lente delgada [17] es como sigue:

$$t(r) = \text{const } e^{i\frac{\pi}{\lambda} r^2}$$

Comparando esta expresión con (4), se puede demostrar que cada una de las ondas contenidas en esta última tiene distancias focales o puntos de convergencia en

$$f_N = a^2/N.$$

Además, se tiene que para la m -ésima zona, se cumple que

$$a_m^2 = ma^2,$$

por lo que

$$f_{N,m} = \frac{a_m^2}{Nm\lambda}.$$

Como $a_m = R$ es el radio de la lente con m zonas, y considerando el foco de primer orden o foco principal ($N = 1$)

$$f = \frac{R^2}{m\lambda},$$

que no es más que el resultado conocido de la acentuada aberración cromática o distribución espectral a lo largo del eje óptico, o "resolución axial" de las lentes de Fresnel con alto número de zonas.

3. ANÁLISIS DE LA INTENSIDAD

La intensidad I_0 de la onda incidente viene dada por

$$I_0 = |A|^2.$$

Restituyendo en la expresión (4) los valores de \bar{A} y ρ , se obtiene

$$\psi(r) = e^{ikz} e^{i\frac{k}{2z} r^2} \left\{ \frac{A}{2i} \delta(r) + \sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{Aa^2}{iN^2\pi\lambda z} \right) \left[e^{i\frac{\pi a^2}{N(\lambda z)^2} r^2} + e^{i\frac{\pi a^2}{N(\lambda z)^2} r^2} \right] \right\}, \quad (5)$$

que brinda la distribución del campo en el plano (x, y) a la distancia z de la placa zonal. El primer término, que corresponde a la intensidad no difractada, tendrá un valor

$$(A/2)^2 = I_0/4.$$

La intensidad que corresponde a cada componente emergente de la placa zonal, en el plano z , depende de los coeficientes de cada término:

$$I(z)|_{n,a,\lambda} = \left(\frac{Aa^2}{N^2\pi\lambda z} \right)^2 = \left[\frac{Aa^2}{(2n+1)^2\pi\lambda z} \right]^2$$

En particular, para los puntos focales, en los cuales se cumple que $z = f_N = a^2/N\lambda$, se tiene

$$\left(\frac{A}{N\pi} \right)^2 = \frac{I_0}{[(2n+1)\pi]^2},$$

que coincide con el resultado, inferido sin demostrar, por Gómez-Reino y Llopis [14]

4. CONCLUSIONES

Se obtuvo la expresión (5) que brinda la distribución del campo en el plano (x, y) a una distancia z de la placa zonal, dentro de la aproximación de Fraunhofer, en la que se observa la dependencia explícita de la distribución de intensidades con N , a y λ .

Una adecuada simulación numérica de esta expresión, con ayuda de computadoras, permitiría realizar un análisis detallado del comportamiento de una lente de Fresnel caracterizada por el radio de la primera zona (a), por sus dimensiones (N), y además teniendo en cuenta la longitud de onda incidente (λ). Obviamente, en el caso de que incida una luz policromática, la distribución en un plano cualquiera se puede obtener mediante la superposición de un conjunto de ondas monocromáticas.

Con la expresión obtenida, se cuenta con una herramienta para el análisis de la distribución de campo e intensidades en un plano cualquiera posterior de una lente de Fresnel, correspondiente tanto a los focos principal y secundarios, como en un entorno de ellos.

REFERENCIAS

1. L.J. Janićjević, *J. Optics* **13** (1982) 199.
2. M.J. Simpson y A.G. Michette, *Optica Acta* **31** (1984) 403.
3. H. Tanigawa et al., *Optica Acta* **27** (1980) 1327.
4. H. Hosokawa y T. Yamashita, *Appl. Opt.* **29** (1990) 5106.
5. H. Ming et al., *Appl. Opt.* **29** (1990) 5111.
6. M. Haruna et al., *Appl. Opt.* **29** (1990) 5120.
7. K. Kodate et al., *Appl. Opt.* **29** (1990) 5115.
8. Y. Ono y N. Nishida., *Appl. Opt.* **21** (1982) 4542.

9. R.R.A. Syms y L. Solymar, *J.O.S.A.* **72** (1982) 179.
10. L. Reyes y A. Oliva, III Simposio de la Sociedad Cubana de Física, Santiago de Cuba (1985).
11. N. Aebischer et al., *S.P.I.E.* **353** (1983) 61.
12. A. Oliva et al., *I Conferencia Internacional de Optica Aplicada a la Energía Solar*, Checoslovaquia (1984).
13. Y.W. Zhang et al., *Appl. Opt.* **27** (1988) 3556.
14. C. Gómez-Reino y J. Llopis, *Opt. Pura y Aplic.* **10** (1977) 75.
15. J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill, New York (1968).
16. R.N. Bracewell, *The Fourier Transform and its Applications*, McGraw-Hill, New York (1965).
17. M. Born y E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, New York (1975).