

# Estudio teórico y numérico de la difracción en óptica electromagnética. IV. Dispersión de un haz gaussiano por una acanaladura rectangular metálica. Polarización T.E.

O. MATA-MÉNDEZ, J. SUMAYA-MARTÍNEZ Y F. CHÁVEZ-RIVAS  
*Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas  
Instituto Politécnico Nacional  
Zacatenco, 07738 México, D.F., México*

Recibido el 6 de abril de 1995; aceptado el 13 de julio de 1995

**RESUMEN.** Se presenta una teoría rigurosa de la difracción de un haz gaussiano que incide normalmente sobre una acanaladura rectangular metálica. Se considera el caso T.E. de polarización, es decir, el campo eléctrico incidente es paralelo a la acanaladura. Se estudia numéricamente la influencia de la conductividad finita del sustrato en la energía dispersada.

**ABSTRACT.** A rigorous theory based on Maxwell's equations of the scattering of a normal incident gaussian beam in T.E. polarization by a metallic groove is presented. We analyze the influence of the finite conductivity of substrate on the scattering energy. We present numerical results of some optogeometrical parameters for visible and infrared electromagnetic radiation.

PACS: 42.25.F

## 1. INTRODUCCIÓN

Desde hace muchos años ha habido un gran interés en el estudio de la difracción de ondas electromagnéticas por un sistema de acanaladuras rectangulares hechas en un plano metálico. Estas investigaciones han tenido diversos objetivos que van desde la investigación pura hasta el desarrollo tecnológico. Así, esta configuración se ha utilizado para modelar superficies rugosas [1, 2], para modelar defectos en una superficie plana [3] debido a daños estructurales o a contaminantes, para estudiar el efecto Raman superficial gigante [4, 5], desde hace muchos años ha sido una herramienta muy importante en el campo de la espectroscopía [6], y muy recientemente este tipo de estructuras ha servido para modelar los discos ópticos [7]. A pesar de la extensa literatura existente sobre la dispersión por una acanaladura rectangular, no se ha tratado la influencia de la conductividad y escasamente se ha considerado la forma del haz incidente [5, 7]; muchos de los artículos tratan con metales de conductividad infinita [7, 8] y con ondas planas incidentes [8]. En este artículo pretendemos llenar parcialmente esta laguna al presentar una teoría rigurosa de la difracción de un haz gaussiano por una acanaladura de conductividad infinita con un sustrato de conductividad finita (plata, oro, cobre, etc.). Nuestro interés se centrará en la región vectorial [9], definida por la condición  $0.2 < \lambda/\ell$ ; en esta región los efectos de polarización son muy importantes y sólo una teoría de la difracción rigurosa debe

ser considerada si se requieren buenos resultados. En este artículo consideraremos que el haz incidente tiene polarización T.E. (el campo eléctrico es paralelo a la acanaladura), y dejaremos para un futuro próximo el estudio del caso de polarización T.M. (el campo magnético es paralelo a la acanaladura).

Debemos mencionar que desde hace muchos años se ha analizado la influencia de la conductividad en la dispersión de una onda plana incidente sobre una red de difracción rectangular metálica [6, 10], principalmente por sus aplicaciones en espectroscopía. En esta clase de sistemas periódicos la teoría es más accesible, debido a la existencia de la periodicidad, permitiendo la utilización de una base numerable, por ejemplo, la base de Fourier. En cambio, cuando el sistema es no periódico, como el presentado aquí, la teoría normalmente se complica ya que es necesario recurrir a una base continua. En este artículo proponemos, utilizando la transformada de Fourier una solución rigurosa al problema de la difracción de un haz gaussiano por una acanaladura metálica. Como la teoría es rigurosa, estando limitada en sus aplicaciones únicamente por los métodos numéricos utilizados y no por la propia teoría, es posible calcular en principio no únicamente el campo lejano sino el campo electromagnético en cualquier lugar del espacio con muy buena precisión, incluyendo la propia cavidad [5]. Como hemos mencionado, la configuración que tratamos en este artículo se ha utilizado para modelar superficies rugosas, este último problema ha sido resuelto rigurosamente utilizando una ecuación integral por A.A. Maradudin *et al.* [14] y ha sido aplicada cuando una capa dieléctrica está presente [15].

## 2. FORMULACIÓN DE LA TEORÍA

Consideremos una acanaladura rectangular de ancho  $l$  y espesor  $h$  excavada en una pantalla gruesa de conductividad infinita y substrato metálico de conductividad finita  $\sigma$ . Nuestra configuración está colocado en el vacío y se le asocia un sistema de coordenadas rectangulares  $Oxyz$ , de tal manera que la pantalla coincida con el plano  $Oxz$  y que la acanaladura sea paralela al eje  $Oz$ . El conjunto es iluminado por un haz gaussiano monocromático de ancho finito y de longitud de onda  $\lambda$  ( $= 2\pi/k_0$ ) que incide normalmente sobre la pantalla y que es independiente de la coordenada  $z$ . Tal y como se muestra en la Fig. 1 la distribución de intensidad del haz gaussiano sobre la pantalla tiene un ancho  $L$  y su posición con respecto al eje  $Oy$  está determinada por el parámetro  $b$ . La dependencia temporal del haz es de la forma  $\exp(-i\omega t)$  y se sobreentenderá en lo que sigue.

En este trabajo estudiaremos únicamente el caso de polarización transversal eléctrica (T.E.), es decir, cuando el campo eléctrico incidente  $E^i(x, y)$  es paralelo a la acanaladura. Ahora bien, si consideramos el hecho de que la solución de las ecuaciones de Maxwell para nuestro arreglo es única y que el sistema es invariante ante traslaciones a lo largo del eje  $Oz$ , entonces podemos concluir que el campo total resultante es independiente de la coordenada  $z$ . De este modo, nuestro problema vectorial se reduce a uno puramente escalar en el que nuestro objetivo es resolver la ecuación de Helmholtz bidimensional con las condiciones a la frontera apropiadas:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + k^2 = 0, \quad (1)$$

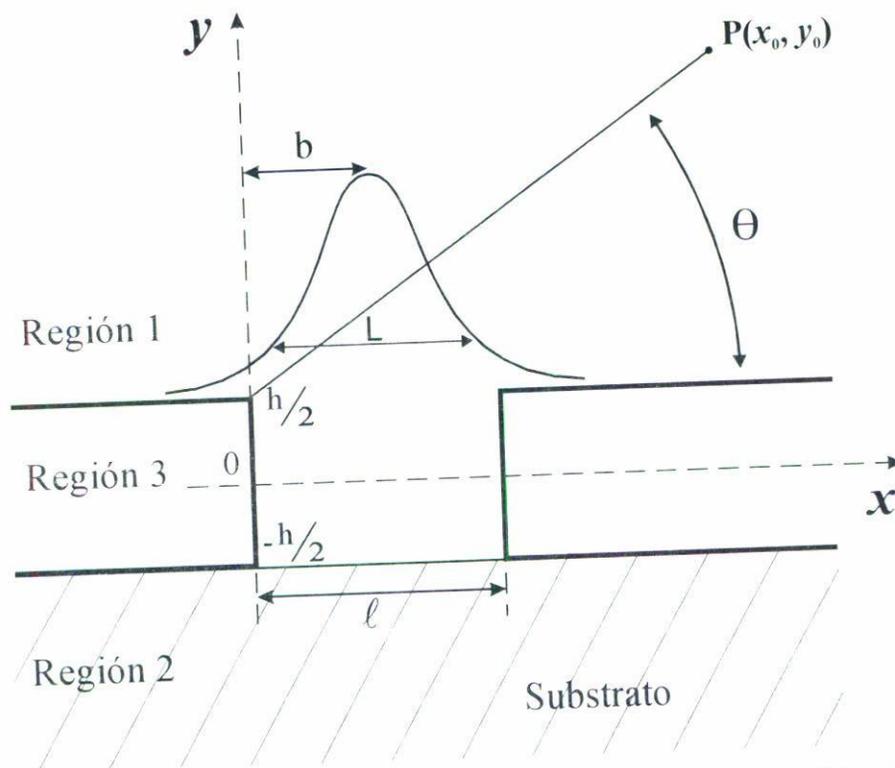


FIGURA 1. Nuestro sistema. Acanaladura de ancho  $\ell$  y profundidad  $h$  paralela al eje  $Oz$ , es decir, perpendicular al plano de la figura. El fondo de la acanaladura es un substrato metálico de conductividad finita. El ángulo  $\theta$  es usado para describir los patrones de dispersión. El parámetro  $L$  determina el ancho de la gaussiana y  $b$  fija la posición de la misma.

con  $k = k_0 n$ , donde  $n$  es el índice de refracción del medio, el cual es complejo para el substrato.

Antes de proseguir, definamos la transformada de Fourier del campo eléctrico  $E(x, y)$  para  $y$  fija:

$$E(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{E}(\alpha, y) \exp(i\alpha x) d\alpha, \quad (2)$$

y su transformada inversa  $\hat{E}(\alpha, y)$ :

$$\hat{E}(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E(x, y) \exp(-i\alpha x) dx. \quad (3)$$

Si ahora reemplazamos la Ec. (3) en la ecuación de Helmholtz, obtendremos una ecuación diferencial en la transformada  $\hat{E}(\alpha, y)$ :

$$\partial_y^2 \hat{E}(\alpha, y) + (k^2 - \alpha^2) \hat{E}(\alpha, y) = 0. \quad (4)$$

A continuación, se da la solución general a esta ecuación para cada región de interés.

Para  $y > h/2$ :

$$\hat{E}_1(\alpha, y) = A(\alpha) \exp[-i\beta(\alpha)y] + B(\alpha) \exp[i\beta(\alpha)y], \tag{5}$$

donde  $\beta^2 = k_0^2 - \alpha^2$  con  $\beta \geq 0$  o  $\beta/i \geq 0$ . El vector de onda  $k$  es real y es igual a  $k_0$ .

Para  $y < -h/2$ :

$$\hat{E}_2(\alpha, y) = C(\alpha) \exp[-i\beta_c(\alpha)y] + D(\alpha) \exp[i\beta_c(\alpha)y], \tag{6}$$

donde  $\beta_c^2 = k^2 - \alpha^2$  con  $\text{Im}(\beta_c) \geq 0$ . El vector de onda  $k$  es un complejo, ya que el substrato es un conductor.

Analicemos ahora el significado físico de los desarrollos en ondas planas dados por las Ecs. (5) y (6). En estas ecuaciones existen cuatro términos cuyos coeficientes son  $A(\alpha)$ ,  $B(\alpha)$ ,  $C(\alpha)$  y  $D(\alpha)$ . Para  $|\alpha| < k_0$ , el término  $A(\alpha)$  representa a la amplitud de la onda incidente  $E^i(x, y)$ , la cual es conocida, mientras que  $B(\alpha)$  representa a la onda reflejada. Ésta comprende una parte saliente ( $|\alpha| < k_0$ ) y una parte evanescente ( $|\alpha| > k_0$ ). El término  $C(\alpha)$  representa la onda transmitida al substrato metálico. Además, si consideramos que la solución debe ser acotada en el infinito ( $y = \pm\infty$ ), entonces  $D(\alpha)$  es nula para todo  $\alpha$  y  $A(\alpha)$  es diferente de cero únicamente para  $|\alpha| < k_0$ . Lo anterior constituye la condición de frontera en infinito apropiada a nuestro sistema.

De este modo, la solución en las regiones 1 y 2 (veáse Fig. 1) está dada como sigue.

Para  $y > h/2$ :

$$E_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k_0}^{k_0} A(\alpha) \exp[i(\alpha x - \beta y)] d\alpha + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha) \exp[i(\alpha x + \beta y)] d\alpha. \tag{7}$$

Para  $y < -h/2$ :

$$E_2(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) \exp[i(\alpha x - \beta_c y)] d\alpha. \tag{8}$$

Para  $-h/2 < y < h/2$  podemos escribir el campo electromagnético como el desarrollo modal siguiente:

$$E_3(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y) \phi_n(x), \tag{9}$$

en donde

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin (0, \ell); \\ \text{sen}(n\pi x/\ell), & \text{si } x \in (0, \ell), \end{cases} \tag{10}$$

y los  $c_n(y)$  están dados en términos de los coeficientes modales  $a_n$  y  $b_n$  por

$$c_n(y) = a_n \cos(\mu_n y) + b_n \operatorname{sen}(\mu_n y), \quad (11)$$

con  $\mu_n^2 = k_0^2 - \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2}$  y  $\mu_n \geq 0$  o  $\mu_n/i \geq 0$ . Es importante mencionar que la expansión modal dada por la Ec. (9) automáticamente verifica la condición frontera para un metal de conductividad infinita, que es la anulación del campo eléctrico en su superficie.

Por otra parte, las eigenfunciones  $\phi_n(x)$  satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x) \phi_m^*(x) dx = \frac{\ell}{2} \delta_{nm}, \quad (12)$$

donde el asterisco denota el complejo conjugado.

Con los resultados anteriores hemos determinado tres diferentes expresiones para el campo eléctrico total, dadas por las Ecs. (7), (8) y (9), válidas en las tres regiones señaladas en la Fig. 1, quedando únicamente por determinar las amplitudes  $B(\alpha)$ ,  $C(\alpha)$  y a los coeficientes modales  $a_n$  y  $b_n$ . Para su cálculo haremos uso de las condiciones a la frontera del campo eléctrico y de su derivada normal en  $y = \pm h/2$ .

### 2.1. Continuidad del campo eléctrico en $y = \pm h/2$

La continuidad en  $y = h/2$  de los campos eléctricos  $E_1$  y  $E_3$ , así como de los campos  $E_2$  y  $E_3$  en  $y = -h/2$ , está dada por la continuidad de sus respectivas transformadas de Fourier  $\hat{E}_1$ ,  $\hat{E}_2$  y  $\hat{E}_3$ . Luego, de las Ecs. (7), (8) y (9) obtenemos lo siguiente.

En  $y = h/2$ :

$$A(\alpha) \exp\left(-i\beta \frac{h}{2}\right) + B(\alpha) \exp\left(i\beta \frac{h}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\mu_n \frac{h}{2}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\mu_n \frac{h}{2}\right) \right] \hat{\phi}_n(\alpha). \quad (13)$$

En  $y = -h/2$ :

$$C(\alpha) \exp\left(i\beta_c \frac{h}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\mu_n \frac{h}{2}\right) - b_n \operatorname{sen}\left(\mu_n \frac{h}{2}\right) \right] \hat{\phi}_n(\alpha), \quad (14)$$

donde

$$\hat{\phi}_n(\alpha) = \frac{n\sqrt{\pi}}{\ell\sqrt{2}} \left[ \frac{1 - (-1)^n \exp(-i\alpha\ell)}{(n\pi/\ell)^2 - \alpha^2} \right] \quad (15)$$

es la transformada de Fourier de  $\phi_n(x)$ .

2.2. Continuidad de la derivada normal del campo eléctrico en  $y = \pm h/2$

La continuidad de la derivada normal del campo eléctrico en  $y = h/2$  puede escribirse como

$$\frac{\partial E_1}{\partial y}(x, h/2) - \frac{\partial E_3}{\partial y}(x, h/2) = 0, \quad \text{para } x \in (0, \ell). \tag{16}$$

Si hacemos ahora el producto escalar con la base  $\phi_m(\alpha)$ , obtenemos

$$\left\langle \frac{\partial \hat{E}_1}{\partial y}(\alpha, h/2) - \frac{\partial \hat{E}_3}{\partial y}(\alpha, h/2), \hat{\phi}_m(\alpha) \right\rangle = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \tag{17}$$

en donde hemos empleado el teorema de Parseval-Plancherel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} fg^* dx = \langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f} \hat{g}^* d\alpha.$$

Utilizando las Ecs. (7) y (9) para explicitar las derivadas parciales, podemos escribir la Ec. (17) como sigue:

$$\left\langle -i\beta A(\alpha) \exp\left(-i\beta \frac{h}{2}\right) + i\beta B(\alpha) \exp\left(i\beta \frac{h}{2}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\mu_n a_n \operatorname{sen}\left(\frac{\mu_n h}{2}\right) + \mu_n b_n \cos\left(\frac{\mu_n h}{2}\right) \right] \hat{\phi}_n(\alpha), \hat{\phi}_m(\alpha) \right\rangle = 0, \tag{18}$$

con  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Por otro lado, la continuidad de la derivada en  $y = -h/2$ , nos conduce a una relación similar:

$$\left\langle -i\beta_c C(\alpha) \exp\left(i\beta_c \frac{h}{2}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \mu_n a_n \operatorname{sen}\left(\frac{\mu_n h}{2}\right) + \mu_n b_n \cos\left(\frac{\mu_n h}{2}\right) \right] \hat{\phi}_n(\alpha), \hat{\phi}_m(\alpha) \right\rangle = 0, \tag{19}$$

con  $m = 1, 2, 3, \dots$

2.3. La solución matricial

Podemos eliminar  $B(\alpha)$  mediante las Ecs. (13) y (18) y llegar a un sistema infinito de ecuaciones lineales, en donde las incógnitas son los coeficientes modales  $a_n$  y  $b_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ i \cos\left(\frac{\mu_n h}{2}\right) M_{nm}^1 + \mu_n \operatorname{sen}\left(\frac{\mu_n h}{2}\right) \frac{\ell}{2} \delta_{nm} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[ i \operatorname{sen}\left(\frac{\mu_n h}{2}\right) M_{nm}^1 - \mu_n \cos\left(\frac{\mu_n h}{2}\right) \frac{\ell}{2} \delta_{nm} \right] = A_m, \tag{20}$$

con  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Similarmente, eliminando  $C(\alpha)$  entre las Ecs. (14) y (19):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ i \cos \left( \frac{\mu_n h}{2} \right) M_{nm}^2 + \mu_n \operatorname{sen} \left( \frac{\mu_n h}{2} \right) \frac{\ell}{2} \delta_{nm} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[ i \operatorname{sen} \left( \frac{\mu_n h}{2} \right) M_{nm}^2 - \mu_n \cos \left( \frac{\mu_n h}{2} \right) \frac{\ell}{2} \delta_{nm} \right] = 0, \quad (21)$$

con  $m = 1, 2, 3, \dots$ , donde

$$M_{nm}^1 = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\alpha) \hat{\phi}_n(\alpha) \hat{\phi}_m^*(\alpha) d\alpha, \quad (22)$$

$$M_{nm}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \beta_c(\alpha) \hat{\phi}_n(\alpha) \hat{\phi}_m^*(\alpha) d\alpha, \quad (23)$$

$$A_m = 2i \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\alpha) A(\alpha) \exp(-i\beta h/2) \hat{\phi}_m^*(\alpha) d\alpha. \quad (24)$$

Las matrices dadas por las Ecs. (22) y (23) contienen los elementos optogeométricos del sistema, mientras que la matriz  $A_m$  es lineal en  $A(\alpha)$  (amplitud del haz incidente). Concluimos que las Ecs. (20) y (21) son la solución a nuestro problema, ellas nos permiten determinar a los coeficientes modales  $a_n$  y  $b_n$ , y a partir de ellos es posible determinar el campo eléctrico en todo el espacio mediante las Ecs. (13) y (14).

#### 2.4. Cálculo de integrales

De este modo nos enfrentamos a la resolución de integrales del tipo

$$M_{nm}^{1,2} = \int_{-\infty}^{\infty} K_{1,2}(\alpha) [1 - (-1)^n \cos(\alpha\ell)] d\alpha, \quad (25)$$

donde

$$K_1(\alpha) = \frac{nm\pi\beta(\alpha)}{\ell^2 \left( \alpha^2 - \frac{n^2\pi^2}{\ell^2} \right) \left( \alpha^2 - \frac{m^2\pi^2}{\ell^2} \right)}, \quad (26)$$

$$K_2(\alpha) = \frac{nm\pi\beta_c(\alpha)}{\ell^2 \left( \alpha^2 - \frac{n^2\pi^2}{\ell^2} \right) \left( \alpha^2 - \frac{m^2\pi^2}{\ell^2} \right)}. \quad (27)$$

La Ec. (25) define integrales de funciones muy oscilantes que se extienden sobre todo el eje real. Su cálculo numérico es difícil si se desean resultados muy precisos. Para alcanzar la precisión deseada, la cual permitirá que el teorema de conservación de la energía se

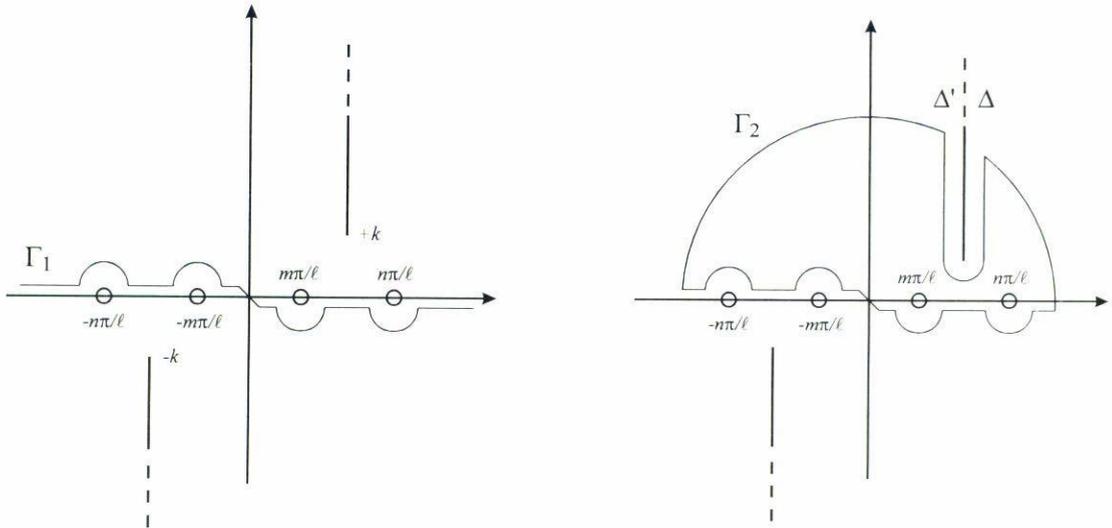


FIGURA 2. Trayectorias de integración en el plano complejo utilizadas para el cálculo de los elementos matriciales.

verifique con una precisión de al menos  $10^{-4}$ , hemos llevado a cabo deformaciones de contorno en el plano complejo, como mencionaremos brevemente a continuación.

Consideremos el problema correspondiente a la Ec. (23). Para esto, sea  $\Gamma_1$  la trayectoria mostrada en la Fig. 2a, donde los semicírculos de radio  $R$  están en las posiciones  $\pm n\pi/\ell$  y  $\pm m\pi/\ell$ . Las líneas verticales que comienzan en los complejos  $\pm k$  (substrato metálico) son cortes que existen por la presencia de la función  $\beta(\alpha)$ . Se tiene que

$$M_{nm}^2 = \lim_{R \rightarrow 0} \int_{\Gamma_1} K_2(\alpha) [1 - (-1)^n \cos(\alpha\ell)] d\alpha. \tag{28}$$

La simetría de la trayectoria  $\Gamma_1$  nos permite reemplazar la integral dada en la Ec. (28) por una con integrando exponencial:

$$M_{nm}^2 = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{nm\pi}{\ell^2} \int_{\Gamma_1} \beta_c(\alpha) \frac{[1 - (-1)^n e^{i\alpha\ell}]}{(\alpha^2 - \frac{n^2\pi^2}{\ell^2})(\alpha^2 - \frac{m^2\pi^2}{\ell^2})} d\alpha, \tag{29}$$

con polos simples cuando  $n = m$ . Debido a los cortes complejos en  $\pm k$  es necesaria una segunda deformación de contorno  $\Gamma_2$ , tal y como se muestra en la Fig. 2b, donde  $\Delta$  y  $\Delta'$  son trayectorias a la derecha y a la izquierda del corte, respectivamente. Aplicando el lema de Jordan llegamos a

$$M_{nm}^2 = -\frac{2nm\pi}{\ell^2} \int_{-\Delta'} \frac{\beta_c(\alpha) [1 - (-1)^n e^{i\alpha\ell}]}{(\alpha^2 - \frac{n^2\pi^2}{\ell^2})(\alpha^2 - \frac{m^2\pi^2}{\ell^2})} d\alpha + \frac{\ell}{2} \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2}, \tag{30}$$

la cual se resuelve por métodos numéricos sin mayor dificultad, en particular, nosotros empleamos el método del trapecio consiguiendo una muy alta precisión. Por último, cabe

mencionar que los resultados numéricos satisfacen el Teorema de conservación de la energía hasta fracciones menores a  $10^{-4}$ .

### 3. RESULTADOS NUMÉRICOS

Supondremos que la acanaladura es iluminada por un haz gaussiano a incidencia normal y con el campo eléctrico paralelo a la acanaladura, es decir, en polarización T.E. (véase Fig. 1). La distribución en intensidad de este haz sobre la pantalla ( $y = h/2$ ) es de la forma [11]

$$I(x) = \exp \left[ -\frac{4(x-b)^2}{L^2} \right], \quad (31)$$

donde  $L$  es el ancho de la gaussiana y  $b$  es el parámetro que da la posición del haz respecto del eje  $Oy$  (véase Fig. 1). La amplitud del campo eléctrico incidente asociada a esta distribución de intensidad está dada por

$$A(\alpha) = \frac{L}{2} \exp(-i\alpha b) \exp \left( -\frac{\alpha^2 L^2}{8} \right). \quad (32)$$

En lo que sigue admitiremos que el haz gaussiano está centrado sobre la acanaladura, en  $b = \ell/2$ .

La presencia de un substrato metálico de conductividad finita en el fondo de la acanaladura produce la absorción de una parte de la energía incidente, a diferencia de un substrato de conductividad infinita el cual refleja toda la energía incidente. En este trabajo mostraremos resultados obtenidos numéricamente para substratos metálicos de plata, oro y cobre. El índice de refracción complejo,  $n = \eta + ik$ , como función de la longitud de onda ( $\lambda$ ) para cada substrato metálico ha sido tomado del *Handbook of optical constants of solids*, de P.D. Edward [12].

Definiremos como coeficiente de reflexión  $R$ , al cociente de la energía dispersada por la acanaladura y la energía incidente, y al coeficiente de absorción  $A$  como el cociente de la energía absorbida por el substrato metálico de conductividad finita y la energía incidente. Luego, el teorema de conservación de la energía se expresa así:

$$R + A = 1. \quad (32)$$

Otra magnitud que estudiaremos en este artículo y que a sido poco considerada en la literatura es la energía dispersada normalmente a la pantalla ( $\theta = 90^\circ$ ); magnitud que denotaremos por  $E$ . Supondremos en lo que sigue que  $E$  está normalizada también a la energía incidente.

Uno de los principales criterios para checar la validez de nuestras simulaciones numéricas fue la verificación de la expresión de la conservación de la energía, la cual se calculó con una precisión de  $10^{-4}$ . También se tomó en cuenta la estabilización de nuestros resultados en función del número de coeficientes modales (por lo general 10 coeficientes), así

como del número de trapecios que intervinieron en las sumatorias (por lo general 1300 trapecios). El análisis sistemático de los criterios anteriores nos permite garantizar que nuestros resultados son correctos hasta la tercera cifra decimal. Otro tipo de prueba ha sido simular la presencia de un substrato de conductividad cero, con lo cual obtuvimos espectros de difracción iguales a los calculados para una rendija en una pantalla metálica de conductividad infinita y de espesor distinto de cero [9].

En la introducción de este trabajo se ha hecho mención de que estudiaremos la región vectorial de la difracción, es decir, cuando  $0.2 < \lambda/\ell$ . En esta región los efectos de la polarización, de borde y la influencia de la conductividad finita de los materiales de que están hechos los objetos difractantes no son despreciables como es usual en la región escalar ( $\lambda/\ell < 0.2$ ), en donde las teorías aproximadas de la difracción proporcionan muy buenos resultados. Por otro lado, a la región vectorial la podemos subdividir en tres zonas de difracción importantes, cuando  $\lambda/\ell < 1$ ,  $\lambda/\ell \approx 1$  y  $\lambda/\ell > 1$ . A la zona  $\lambda/\ell \approx 1$  se le conoce como región resonante o región de resonancia. Es conocido que dentro de cada una de estas zonas de difracción el comportamiento de los patrones de dispersión son muy similares. En cada una de estas zonas de difracción analizaremos la influencia de la conductividad en el patrón de dispersión, en el coeficiente de absorción y en la energía dispersada normalmente a la pantalla ( $\theta = 90^\circ$ ). Es importante hacer notar que en este artículo todas las energías estarán normalizadas a la energía incidente. Los valores de  $\lambda/\ell$  que hemos escogido en cada una de estas zona son  $\lambda/\ell = 0.5$ ,  $1.0$  y  $1.9$ .

En primer lugar mostramos en la Fig. 3 la dispersión angular producida por una acanaladura de ancho  $\ell = 1 \mu\text{m}$  y de profundidad  $h = 0.5 \mu\text{m}$ , con substratos metálicos de Ag, Au y Cu. El haz gaussiano incidente tiene un ancho  $L/\ell = 4/\sqrt{2}$  y  $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ ,  $1.0 \mu\text{m}$  y  $1.9 \mu\text{m}$  como se muestra en las Figs. 3a, 3b y 3c, respectivamente. En la Fig. 3a encontramos que la conductividad finita casi no influye en la forma de la dispersión angular, pero sí en la intensidad de la misma; observamos que a mayor conductividad se tiene mayor intensidad en el máximo central de la dispersión. Por el contrario, en las Figs. 3b y 3c no encontramos influencia alguna de la conductividad finita (los tres espectros se superponen), esto es debido a que los valores que toma  $\lambda$  son  $1 \mu\text{m}$  y  $1.9 \mu\text{m}$ , valores que se localizan en el infrarrojo cercano y en el principio de la región de las microondas, respectivamente, para estos dos casos los substratos se comportan como substratos metálicos de conductividad infinita y por esta razón resulta que los espectros de las Figs. 3b y 3c se superponen. En la Fig. 3a no se obtiene una superposición de los espectros ya que la longitud de onda  $\lambda$  está en el región visible. Por último, como mencionamos, los patrones de dispersión son muy diferentes en función de  $\lambda/\ell$ , es decir, para las zonas alrededor y dentro de la región resonante, teniendo en común solamente la existencia de un máximo central y que tienden a cero en los extremos.

Para ejemplificar aún más la influencia de la conductividad finita del substrato en el comportamiento de la onda dispersada, hemos calculado  $R$ ,  $A$  y  $E$  en función de la longitud de onda  $\lambda$  en las regiones visible e infrarroja cercana. Para esto hemos iluminando una acanaladura de ancho  $\ell = 1 \mu\text{m}$  y profundidad  $h = 0.8 \mu\text{m}$  con un haz gaussiano de ancho  $L/\ell = 4/\sqrt{2}$ , los resultados se muestran en la Fig. 4. Con respecto a  $R$  (véase Fig. 4a), notamos que su comportamiento es similar al que se observa en la reflectancia o reflectividad calculada para la incidencia normal de una onda plana sobre una superficie

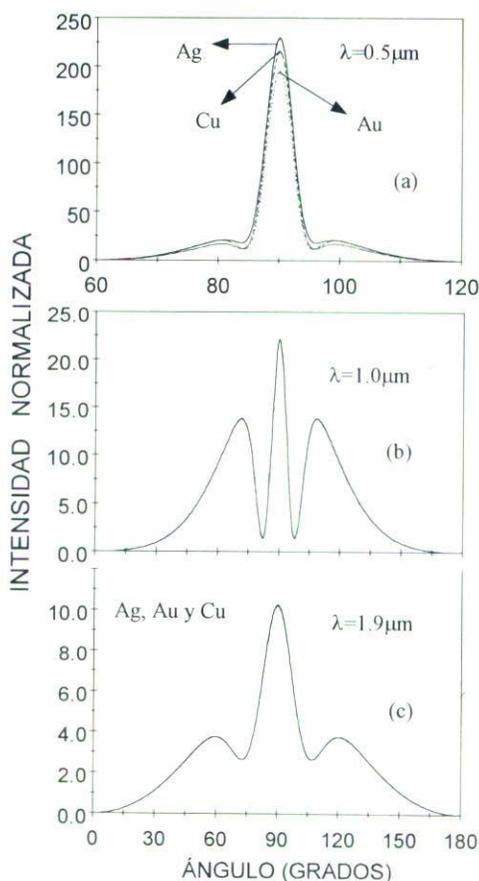


FIGURA 3. Patrones de dispersión normalizados a la energía incidente ( $I(\theta)/I_0$ ), de un haz gaussiano que incide normalmente sobre una acanaladura con substratos de conductividad finita hechos de Ag, Au y Cu. El ancho de la acanaladura es  $\ell = 1 \mu\text{m}$  y la profundidad  $h = 0.5 \mu\text{m}$ , con  $L/\ell = 4/\sqrt{2}$  y  $b/\ell = 0.5$ . Para a)  $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ , b)  $\lambda = 1.0 \mu\text{m}$  y c)  $\lambda = 1.9 \mu\text{m}$ .

también plana (sin acanaladura) en un metal de Ag, Au o Cu [13]. Aunque en general el comportamiento de  $R$  es el mismo con o sin acanaladura, los valores con la acanaladura son significativamente mayores debido a que la onda incidente toca parte de la pantalla, la cual se comporta como un espejo (metal de conductividad infinita). En la Fig. 4b mostramos el coeficiente de absorción  $A$  en función de la longitud de onda con los mismos parámetros de la Fig. 4a. En la Fig. 4c presentamos cómo la energía dispersada en la dirección normal a la pantalla  $E$  depende de la longitud de onda  $\lambda$ . Se observa un comportamiento muy oscilante, localizándose los mínimos en 0.368, 0.461, 0.638, 0.968, y 1.64, y los máximos en 0.404, 0.524, 0.755 y 1.238. Observamos también que conforme aumenta la longitud de onda estas oscilaciones disminuyen en intensidad y la distancia entre máximos aumenta. El carácter oscilatorio se debe a la interferencia entre la onda reflejada en la pantalla y la onda reflejada en la parte del sustrato localizada en el interior del canal. Si aplicamos el método de diferencias de caminos ópticos, obtendremos que la posición de los máximos

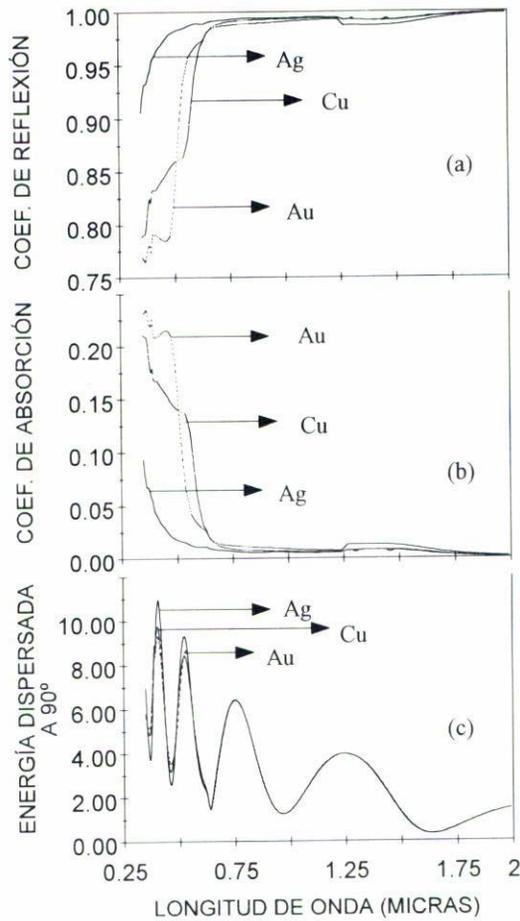


FIGURA 4. Coeficientes de reflexión y absorción, así como la energía dispersada a  $\theta = 90^\circ$  en función de la longitud de onda (en micras), en las regiones visible e infrarrojo cercano, para substratos hechos de Ag, Au y Cu. Para una acanaladura de ancho  $\ell = 1 \mu\text{m}$  y profundidad  $h = 0.8 \mu\text{m}$ , con  $L/\ell = 4/\sqrt{2}$ ,  $b/\ell = 0.5$  e incidencia normal.

está dada por la expresión  $\lambda = 2h/m$ , con  $m = 1, 2, 3, \dots$ , dando lugar a que éstos se localicen en 0.4, 0.533, 0.8 y 1.6; la discrepancia entre estos valores y los mencionados más arriba se debe al efecto de difracción. Para los mínimos tenemos la siguiente ecuación:  $\lambda = 2h(m + \frac{1}{2})^{-1}$ , con  $m = 0, 1, 2, \dots$ ; expresión que predice las siguientes posiciones para los mínimos 0.355, 0.4571, 0.64 y 1.066, valores muy cercanos a los obtenidos de la Fig. 4, salvo el último mínimo, que pensamos no es debido a efectos de interferencia sino a un efecto de difracción puro. Por otro lado, la intensidad disminuye según aumenta la longitud de onda, ya que la energía dispersada alcanza grandes valores angulares como se muestra en la Fig. 3.

En la Fig. 5, para las tres regiones de difracción mencionadas, presentamos el coeficiente de reflexión  $R$  en función de la profundidad  $h$  de la acanaladura (normalizada a la longitud de onda). Para cada una de estas regiones de difracción tomaremos los siguientes valores de  $\lambda/\ell$ : a) 0.5 en Fig. 5a, b) 1.0, en Fig. 5b y c) 1.9 en Fig. 5c. En esta configuración el ancho

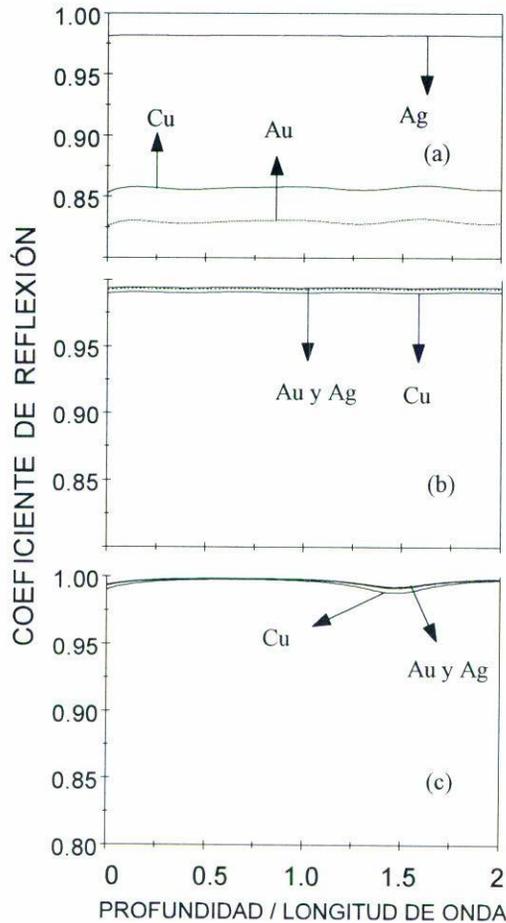


FIGURA 5. Coeficiente de reflexión en función de la profundidad del canal por unidad de longitud de onda,  $h/\lambda$ , de una acanaladura de ancho  $\ell = 1 \mu\text{m}$  con substratos hechos de Ag, Au y Cu. El ancho de la distribución gaussiana de la radiación incidente es  $L = \frac{4}{\sqrt{2}} \mu\text{m}$ , con  $b/\ell = 0.5$  para a)  $\lambda/\ell = 0.5$ , b)  $\lambda/\ell = 1.0$  y c)  $\lambda/\ell = 1.9$ .

del canal es de  $1 \mu\text{m}$  y el haz incidente tiene un ancho  $L = \frac{4}{\sqrt{2}}$  e incide normalmente. De esta figura notamos que el coeficiente de reflexión es prácticamente insensible a variaciones en la profundidad. Encontramos de nuevo que el efecto de conductividad es más importante en la región visible, (véase Fig. 5a). En la Fig. 6 mostramos a la energía difractada en la dirección normal a la pantalla en función de la profundidad de la acanaladura (normalizada a la longitud de onda incidente), con los mismos parámetros de la Fig. 5. Para  $\lambda/\ell = 0.5$ , Fig. 6a, se observa un comportamiento oscilatorio debido nuevamente al proceso de interferencia mencionado anteriormente, en este caso, el período de oscilación obtenido de la figura es 0.521; valor muy cercano al calculado mediante la diferencia de caminos ópticos que es 0.5 (en términos de  $h/\lambda$ ); también notamos claramente la influencia de la conductividad. Para  $\lambda/\ell = 1.0$  (Fig. 6b), continúa este comportamiento oscilatorio, con un período igual a 0.58; como era de esperarse no hay influencia de la conductividad. Para  $\lambda/\ell = 1.9$  (Fig. 6c) el período es mayor de 2. Estos ejemplos nos muestran que el

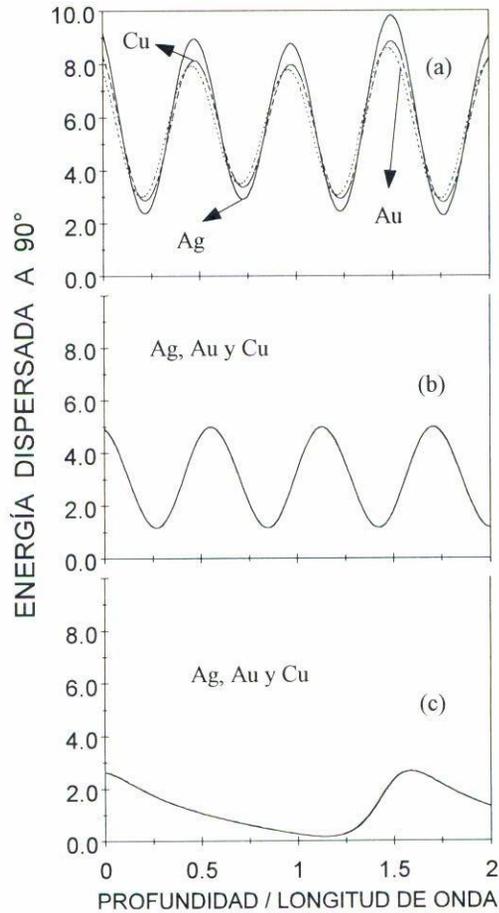


FIGURA 6. Energía dispersada en la dirección normal a la pantalla en función de la profundidad del canal  $h/\lambda$  (normalizada a la longitud de onda incidente), de una acanaladura de ancho  $\ell = 1 \mu\text{m}$  con substratos hechos de Ag, Au y Cu. Mismos parámetros de la Fig. 5.

método de diferencia de caminos ópticos no puede ser utilizado con confiabilidad en la región de resonancia o arriba de ella, sólo cerca de la región escalar sus resultados son aceptables.

#### 4. CONCLUSIONES

Aplicando las ecuaciones de Maxwell hemos presentado una teoría rigurosa de la difracción de un haz gaussiano, en polarización T.E., que incide normalmente sobre una acanaladura rectangular metálica. Se ha estudiado numéricamente la influencia de la conductividad finita del sustrato de la acanaladura para los metales de plata, oro y cobre, en la energía dispersada y absorbida por esta configuración. Mostramos claramente cómo la difracción influye en los resultados.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores O. Mata Méndez y F. Chávez Rivas agradecen el apoyo de COFAA-IPN.

## REFERENCIAS

1. W. Wirgin, *Opt. Comm.* **7** (1973) 70.
2. R. C. Hollins and D. L. Jordan, *Optica Acta* **30** (1983) 1725.
3. Jean-Jacques Greffet and François-René Ladan, *J. Opt. Soc. Am.* **A8** (1991) 1261.
4. A. Wirgin and A. A. Maradudin, *Phys. Rev.* **B31** (1985) 5573.
5. A. Zuniga-Segundo and O. Mata-Méndez, *Phys. Rev.* **B46** (1992) 536.
6. Petit R.(ed.), *Electromagnetic theory of gratings*, Springer-Verlag, Paris (1980).
7. Tah J. Park, Hyo J. Eom, and Kuniaki Yoshitomi, *J. Opt. Soc. Am.* **A10** (1993) 905.
8. Yon-Lin Kok, *J. Opt. Soc. Am.* **A9** (1992) 302.
9. O. Mata-Méndez y F. Chávez-Rivas, *Rev. Mex. Fís.* **39** (1993) 371.
10. Mahmood K. Moaveni, *IEE Proceedings* **135** (1988) 318.
11. O. Mata Méndez, *Opt. Lett.* **16** (1991) 1629.
12. Palik D. Edward, *Handbook of optical constants of solids*, Academic Press Inc. (1985).
13. K. D. Möller, *Optics*, University Science Books (1988) p. 293.
14. A. A. Maradudin, T. Michel, A. R. McGurn, and E. R. Méndez, *Ann. Phys.* **203** (1990) 255.
15. Jun Q. Lu, A. A. Maradudin, and T Michel, *J. Opt. Soc. Am.* **B8** (1991) 311.