

Medición del radio de curvatura paraxial y la constante de conicidad de una superficie cónica cóncava

ESTEBAN LUNA-AGUILAR

*Instituto de Astronomía, Observatorio Astronómico Nacional
Universidad Nacional Autónoma de México
Apartado postal 877, 22860 Ensenada, B.C., México*

Y

ALBERTO CORDERO-DÁVILA

*Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Apartado postal 1152, 72000 Puebla, Pue., México*

Recibido el 17 de febrero de 1995; aceptado el 15 de agosto de 1995

RESUMEN. Se obtienen estimadores para la curvatura paraxial y la constante de conicidad de una superficie cónica cóncava. La estimación se lleva a cabo usando dos hartmanngramas en dos planos diferentes.

ABSTRACT. We obtain estimators for the paraxial curvature and conic constant of a concave conic surface. The estimation is computed using two Hartmanngrams on two different plans.

PACS: 42.85.-x

1. INTRODUCCIÓN

De acuerdo con la ecuación de la sagita que define una superficie cónica de revolución, es necesario conocer dos parámetros para caracterizar dicha superficie: el radio de curvatura paraxial y la constante de conicidad. Existen métodos aceptables para evaluarlos [1,2], sin embargo, cuando estamos interesados en caracterizar los elementos de un gran sistema, como por ejemplo el espejo primario de un telescopio astronómico, es necesario usar técnicas especiales para resolver los problemas que surgen. A saber, primero por las condiciones en las que se debe trabajar, pues las situaciones ambientales que existen dentro y fuera de la cúpula que alberga el telescopio no se comparan con las condiciones de laboratorio. Segundo, las dimensiones de los elementos a prueba son tan grandes como los parámetros que los caracterizan y, por lo tanto las medidas hechas están sujetas a errores aleatorios y sistemáticos grandes; tercero, sumado a lo anterior, si el telescopio es del tipo Ritchey-Chretien, por más pequeña que sea la perforación central las medidas directas para el radio de curvatura no serán realmente paraxiales pues se hacen lejos del eje óptico.

El método que describimos en este artículo proporciona una manera de estimar tanto el radio de curvatura paraxial como la constante de conicidad usando el formalismo de

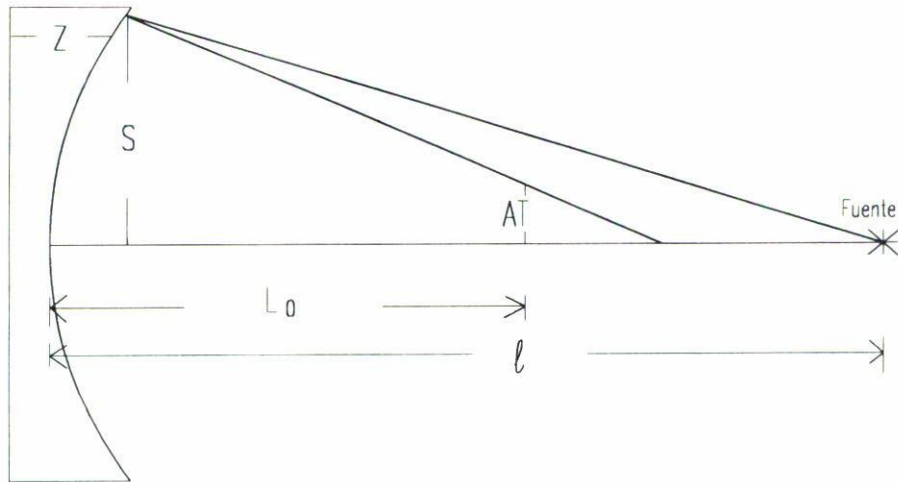


FIGURA 1. Aberración transversal.

la prueba de Ronchi [3], pero aplicada a la prueba de Hartmann [4]. La minimización de los errores en las distribuciones que miden la posición de los hartmanngramas se logra si tomamos dos patrones de Hartmann en planos diferentes y la única condición es que la medición de la separación entre estos dos patrones tenga precisión del orden de micras, requisito que se logra fácilmente, dado que, la separación puede ser tan pequeña que se puede medir en el orden de un micrómetro y, por tanto, los errores se minimizan. En nuestro caso usamos un palpador de $2.5 \mu\text{m}$ de resolución.

El trabajo se distribuye de la siguiente manera: primero se lleva a acabo el planteamiento teórico, en seguida se presentan los resultados obtenidos al aplicar el algoritmo y finalmente proporcionamos las conclusiones resaltando las ventajas y desventajas del método.

2. DESARROLLO TEÓRICO

Mediante el trazo exacto de rayos Sherwood [5] y Malacara [6,7] demostraron que (véase la Fig. 1) un rayo reflejado en una superficie de revolución cruza un plano definido por $Z = L_0$, al cual le corresponde la magnitud AT, llamada aberración transversal, y dada por

$$AT = \frac{(\ell + L - 2z)(1 - z'^2) + 2z' \left[S - \frac{(\ell - z)(L - z)}{S} \right]}{\frac{(\ell - z)}{S} [1 - z'^2] + 2z'} \quad (1)$$

donde ℓ es la posición de la fuente sobre el eje de simetría y

$$S = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

es la distancia al eje a la cual el rayo incide sobre el espejo, (véase la Fig. 1), cuando la superficie es una cónica, de curvatura paraxial C y constante de conicidad K , entonces,

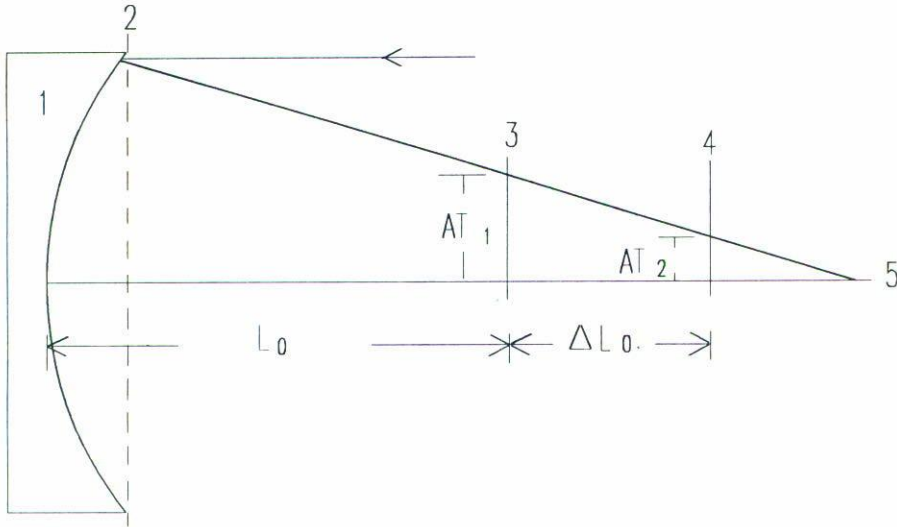


FIGURA 2. Cambio en la aberración transversal. 1: espejo bajo prueba; 2: pantalla de Hartmann; 3: plano del hartmanngrama 1; 4: plano del hartmanngrama 2; 5: eje óptico.

su sagita Z y su derivada Z' están dadas, respectivamente, por

$$Z = \frac{CS^2}{1 + \sqrt{1 - (K + 1)C^2S^2}}, \tag{3}$$

$$Z' = \frac{CS}{\sqrt{1 - (K + 1)C^2S^2}}. \tag{4}$$

La Ec. (1), con una estrella como fuente de luz, es decir, $\ell \rightarrow \infty$, queda en la forma

$$AT_{\ell \rightarrow \infty} = S - \frac{2z'(L - z)}{1 - z'^2}. \tag{5}$$

Cuando usamos la pantalla de Hartmann para muestrear la superficie, es claro que cada hoyo muestrea una pequeña zona a un radio S del eje óptico. Para esta S fija (es decir, un orificio dado en la pantalla de Hartmann) y tomando (véase Fig. 2) la diferencia entre las dos posiciones correspondientes en los hartmanngramas, una a la distancia L_0 y la otra a $L_0 + \Delta L_0$, se puede demostrar, aplicando la Ec. (5), que el cambio en la aberración transversal ΔAT está dado por la siguiente expresión:

$$\Delta AT = AT_{L_0} - AT_{L_0 + \Delta L_0} = \frac{2z'\Delta L_0}{1 - z'^2}. \tag{6}$$

Como se puede ver en la expresión (6), el cambio en la aberración transversal no depende de la posición del hartmanngrama respecto de la superficie L_0 . Esto tiene ventajas pues cuando se tienen superficies con distancias focales muy grandes es difícil tener precisión en este parámetro.

El cambio en la AT mide la pendiente de los rayos, como se puede ver en la Ec. (6) y corresponde a los valores teóricos de las pendientes de los rayos reflejados. Sustituyendo (4) en (6) se tiene

$$\Delta AT(S)_{\text{Teórico}} = \frac{2cs\sqrt{1 - (K + 1)C^2S^2}}{[1 - (K + 2)C^2S^2]} \Delta L_0. \tag{7}$$

Mediante dos hartmanngramas podemos medir $\Delta AT_{\text{Experimental}}$, sin embargo, esta última está afectada por errores azarosos gaussianos, propios de la electrónica del detector y del método para obtener los centroides de las manchas de los hartmanngramas, por tanto, C y K serán estimados de tal forma que minimicen la siguiente suma de cuadrados:

$$\zeta^2 = \sum_i^{N_p} [\Delta AT_{\text{Teórico}_i} - \Delta AT_{\text{Experimental}_i}]^2, \tag{8}$$

donde N_p es el número de datos experimentales. Tomando las derivadas de (8) con respecto a C y K e igualándolas a cero, se obtiene el sistema normal de ecuaciones

$$\sum_i^{N_p} \left[\{ \Delta AT_{\text{Teórico}} - \Delta AT_{\text{Experimental}_i} \} \frac{\partial(\Delta AT_{\text{Teórico}})}{\partial c} \right] = 0, \tag{9a}$$

$$\sum_i^{N_p} \left[\{ \Delta AT_{\text{Teórico}} - \Delta AT_{\text{Experimental}_i} \} \frac{\partial(\Delta AT_{\text{Teórico}})}{\partial K} \right] = 0, \tag{9b}$$

donde

$$\frac{\partial \Delta AT_{\text{Teórico}}}{\partial c} = \frac{C^3 S_i^3 [1 - KC^2 S_i^2] \Delta L_0}{\sqrt{1 - (K + 1)C^2 S_i^2} [1 - (K + 2)C^2 S_i^2]^2} \tag{10}$$

y

$$\frac{\partial \Delta AT_{\text{Teórico}}}{\partial K} = \frac{2S_i [1 - KC^2 S_i^2] \Delta L_0}{\sqrt{1 - (K + 1)C^2 S_i^2} [1 - (K + 2)C^2 S_i^2]^2}. \tag{11}$$

Sustituyendo las Ecs. (10) y (11) en (9a) y (9b) y definiendo las funciones f y g como

$$f(c, K) = \sum_i^N \left\{ \frac{2cS_i^2 [1 - KC^2 S_i^2] \Delta L_0}{[1 - (K + 2)C^2 S_i^2]^3} - \frac{S_i^2 [1 - KC^2 S_i^2] \Delta AT_{\text{Experimental}_i}}{\sqrt{1 - (K + 1)C^2 S_i^2} [1 - (K + 2)C^2 S_i^2]^2} \right\}, \tag{12a}$$

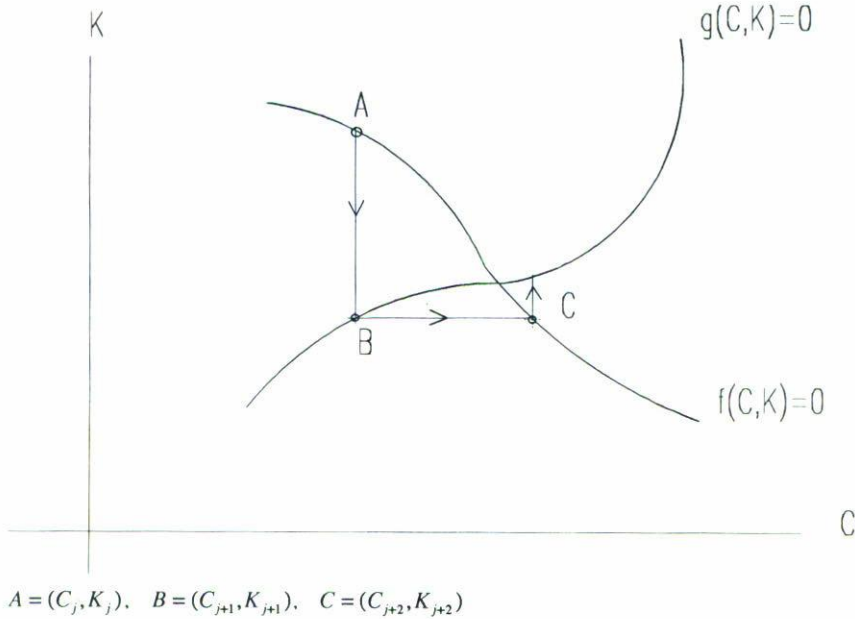


FIGURA 3. Esquema del método para encontrar el punto de intersección entre dos curvas $f(C, K) = 0$ y $g(C, K) = 0$. $A = (C_j, K_j)$, $B = (C_{j+1}, K_{j+1})$, $C = (C_{j+2}, K_{j+2})$.

$$g(c, K) = \sum_i^N \left\{ \frac{2cS_i^4[1 - KC^2S_i^2]\Delta L_0}{[1 - (K + 2)C^2S_i^2]^3} - \frac{S_i^3[1 - KC^2S_i^2]\Delta AT_{\text{Experimental}_i}}{\sqrt{1 - (K + 1)C^2S_i^2}[1 - (K + 2)C^2S_i^2]^2} \right\}, \tag{12b}$$

entonces, de manera compacta las Ecs. (9) se expresan en la forma

$$f(C, K) = 0, \tag{13a}$$

$$g(C, K) = 0. \tag{13b}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones (13) se aplica un método particular, (véase Fig. 3) que, como es conocido, logra la solución al pasar de un punto, (C_j, K_j) sobre la curva definida por (13a) a otro (C_{j+1}, K_{j+1}) sobre la curva correspondiente definida por (13b), con la condición de que en este paso se mantenga a K constante, esto es,

$$K_{j+1} = K_j. \tag{14}$$

El ciclo se completa cuando se pasa del punto (C_{j+1}, K_{j+1}) sobre (13b) al correspondiente (C_{j+2}, K_{j+2}) sobre (13a) y en este caso se mantiene fija a C , esto es,

$$C_{j+2} = C_{j+1}. \tag{15}$$

En el caso en que las dos curvas sean rectas, la aplicación del procedimiento es directa, ya que para la primera curva se despeja a una variable y en la segunda curva la otra variable. Sin embargo en nuestro caso no es posible lograr, en general, tales despejes, por lo cual se debió usar el método de Newton para linealizar a las Ecs. (13). Aclarando aquí que (13b) se linealizó considerando sólo la variable C , puesto que como se expresó en (14), en el paso de (13a) a (13b) se postula constante a K . Por argumentos similares (13a) se expande con sólo la variable K .

Bajo las condiciones mencionadas las Ecs. (13a) y (13b) se expresaran en su forma linealizada como

$$f(C_0, K_0) + \frac{\partial f}{\partial K} \Delta K = 0 \tag{16a}$$

y

$$g(C_0, K_0) + \frac{\partial g}{\partial C} \Delta C = 0, \tag{16b}$$

donde ΔC y ΔK son las correcciones que se deben aplicar en cada iteración sobre C_0 y K_0 , respectivamente. Las derivadas parciales se pueden deducir a partir de las Ecs. (12) quedando en la forma

$$\left. \begin{aligned} \frac{df}{dK} \Big|_{K=K_0} &= \sum_i \left\{ \frac{4C_{\text{inicial}}^3 S_i^6 \Delta L_0 [1 - (K_0 - 1)C_{\text{inicial}}^2 S_i^2]}{[1 - (K_0 + 2)C_{\text{inicial}}^2 S_i^2]^4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{C_{\text{inicial}}^2 S_i^5 \Delta AT_{\text{Experimental}_i} [3 - 6K_0 C_{\text{inicial}}^2 S_i^2 + (3K_0^2 - 4)C_{\text{inicial}}^4 S_i^4]}{2 \left(\sqrt{1 - (K_0 + 1)C_{\text{inicial}}^2 S_i^2} (1 - (K_0 + 2)C_{\text{inicial}}^2 S_i^2) \right)^3} \right\} \end{aligned} \tag{17a}$$

y

$$\left. \begin{aligned} \frac{dg}{dC} \Big|_{C=C_0} &= \sum_i \left\{ \frac{2S_i^2 \Delta L_0 [1 + 2(K_{\text{inicial}} + 5)C_0^2 S_i^2 - 3K_{\text{inicial}}(K_{\text{inicial}} + 2)C_0^2 S_i^4]}{[1 - (K_{\text{inicial}} + 2)C_0^2 S_i^2]^4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{C_0 S_i^3 \Delta AT_{\text{Experimental}_i} [3(K_{\text{inicial}} + 3) - 2(3K_{\text{inicial}}^2 + 9K_{\text{inicial}} + 5)C_0^2 S_i^2 + 3K_{\text{inicial}}(K_{\text{inicial}} + 1)(K_{\text{inicial}} + 2)C_0^4 S_i^4]}{\left(\sqrt{1 - (K_{\text{inicial}} + 1)C_0^2 S_i^2} (1 - (K_{\text{inicial}} + 2)C_0^2 S_i^2) \right)^3} \right\}. \end{aligned} \tag{17b}$$

La aplicación sucesiva de los ciclos arriba descritos conduce a la solución del sistema de Ecs. (13) y por tanto a los valores de la constante de conicidad (K) y la curvatura paraxial (C) del espejo.

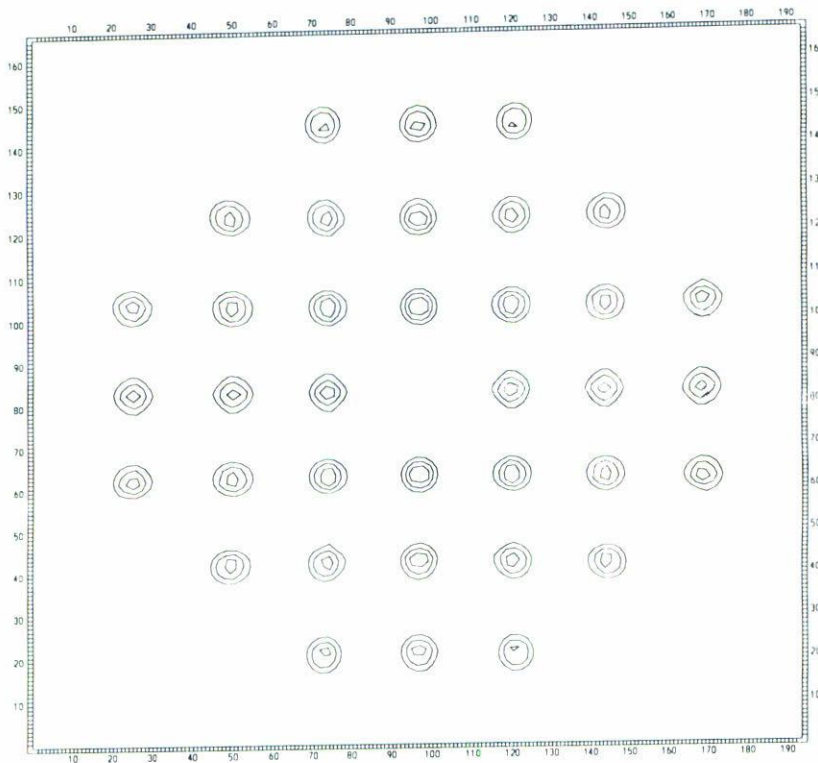


FIGURA 4. Hartmanngrama en la posición 1.

3. PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

Las curvas de nivel de las Figs. 4 y 5 muestran los dos hartmanngramas que se usaron para estimar la constante de conicidad y el radio de curvatura paraxial, la separación entre éstos es de 4 mm y se usó un CCD de 165×192 píxeles, el tamaño del área activa y de píxel es $2.64 \text{ mm} \times 2.64 \text{ mm}$ y $16 \times 13.75 \mu\text{m}$, respectivamente.

El diámetro del espejo que se probó es de 20.3 cm y los parámetros de diseño son: el radio de curvatura paraxial 92.91 cm y la constante de conicidad de -1.077310 .

De las Figs. 4 y 5 se obtuvieron los centroides de cada mancha, se ejecuto el algoritmo y se obtuvieron, después de 3 iteraciones, los siguientes resultados: para el radio de curvatura paraxial se estimó 927.3 mm, mientras que para la constante de conicidad se obtuvo -1.0784 .

4. CONCLUSIONES

Los resultados estimados con este método son aceptables si comparamos éstos con los parámetros de diseño, los cuales difieren en un 0.2% para el radio de curvatura paraxial y 0.1% para la constante de conicidad.

El algoritmo descrito anteriormente ofrece las ventajas de usar una pantalla de Hartmann para conocer los parámetros que caracterizan una superficie cónica de revolución,

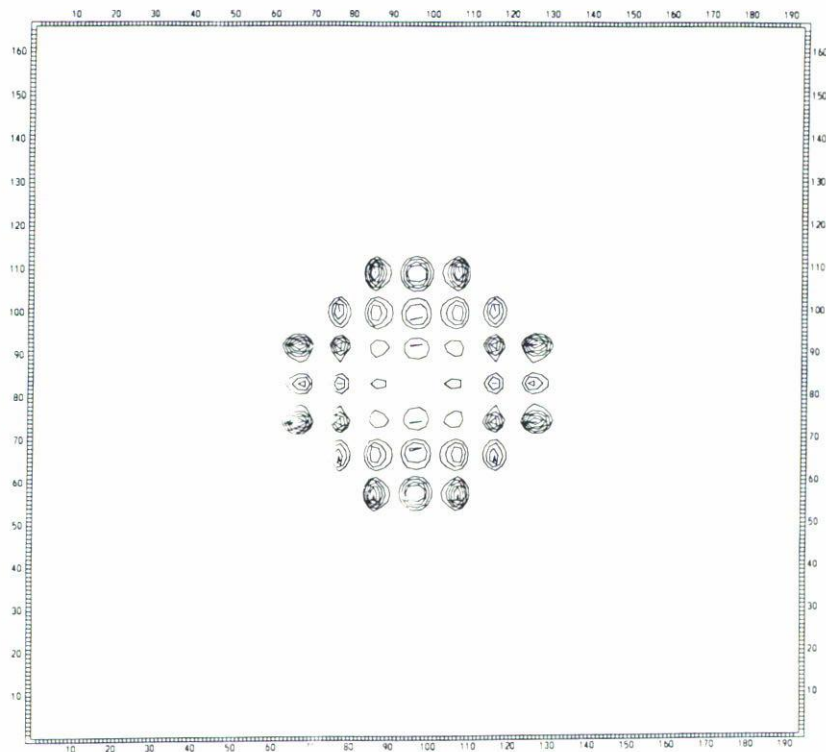


FIGURA 5. Hartmanngrama en la posición 2.

sin embargo, se puede generalizar para incluir los términos de deformación, lo cual generalizaría aún más este método.

Un punto crítico importante que se resolvió fue el de evitar la medida de la posición del plano del hartmanngrama a cambio de grabar dos de éstos.

REFERENCIAS

1. Z. Malacara, "Angle, Distance, Curvature, and Focal Length", *Optical Shop Testing*, John Wiley & Sons, Inc. New York (1992), cap. 18.
2. R. Díaz-Urbe y A. Cornejo-Rodríguez, *Appl. Opt.* **25** (1986) 3731.
3. A. Cornejo, "Ronchi Test", *Optical Shop Testing*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1992), cap. 9.
4. I. Ghozeil, "Hartmann and Other Screen Tests", *Optical Shop testing*, John Wiley & Sons, Inc. New York (1992), cap. 10.
5. A. A. Sherwood, *J. Br. Astron. Assoc.* **68** (1958) 180.
6. D. Malacara, *Testing of Optical Surfaces*, Ph. D. Thesis, University of Rochester, New York; University Microfilms, Ann Arbor, Mich., Order No. 65-12, 013 (1965).
7. D. Malacara, *Appl. Opt.* **4** (1965) 1371.