

## Vibraciones torsionales de un cilindro piezoeléctrico

REINALDO RODRÍGUEZ RAMOS, JOSÉ A. OTERO HERNÁNDEZ

*Grupo de Acústica, Instituto de Cibernética, Matemática y Física (ICIMAF)  
Calle D N° 353 e/t 15 y 17. Vedado, La Habana, Cuba*

JULIÁN BRAVO CASTILLERO Y MARÍA DEL C. RIVALTA VALLADARES

*Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería Civil  
Instituto Superior Politécnico "José A. Echevarría"  
Marianao, La Habana, Cuba*

Recibido el 8 de agosto de 1994; aceptado el 16 de junio de 1995

RESUMEN. Se obtiene de forma analítica la ecuación de frecuencia para vibraciones torsionales con condiciones de contorno libre, de un cilindro piezoeléctrico circular, sólido e infinito de clase 622, mediante la aplicación de métodos operacionales. Las soluciones de las ecuaciones de frecuencia se obtienen para valores del número de onda adimensional  $\varepsilon$  prefijado. Los parámetros escogidos para la ilustración numérica de los resultados pertenecen al hueso humano.

ABSTRACT. The frequency equation for free torsional vibration of a piezoelectric solid cylinder of (622) crystal class is obtained analytically by operational methods. The numerical results are obtained for different values of dimensionless wavenumber  $\varepsilon$ . The parameters chosen for the numerical illustration of the results belong to human bone.

PACS: 43.40.Dx; 43.40.Cw

### 1. INTRODUCCIÓN

Los materiales piezoeléctricos en la actualidad están siendo estudiados por las múltiples aplicaciones que éstos tienen en la construcción de transductores ultrasónicos, resonadores, filtros, etc. A partir del descubrimiento hecho por I. Yasuda en el año 1953, en el que se plantea que el hueso es un material piezoeléctrico, muchos artículos han aparecido sobre los efectos electromecánicos en materiales orgánicos. Un excelente análisis de tales resultados hasta el año 1978 está dado en el trabajo de Guzelsu y Demiray [1].

La estructura del hueso como un órgano viviente es muy complicada [2, 3]. Solamente la parte compacta del hueso será de interés para nosotros. La estructura y propiedades de los huesos, las cuales son células biomateriales, son presentadas en el libro de Gibson y Ashby [2].

Se puede considerar que 2/3 de la masa del tejido óseo compacto (0.5 del volumen) lo constituye el material inorgánico, es decir, la sustancia mineral del hueso: la hidroxiapatita. El resto del hueso consta de material orgánico, principalmente de colágeno (compuesto macromolecular, proteína fibrosa que posee alta elasticidad). A pesar de que los cristales de hidroxiapatita presentan la simetría hexagonal (6/m) y no exhiben ninguna respuesta piezoeléctrica, (es decir ellos son centro-simétrica), el material compuesto formado por la

inclusión de los cristales de hidroxiapatita en la estructura fibrosa del colágeno sí presenta estas propiedades. De acuerdo a Fukada y Yasuda [2] la simetría del cristal del colágeno se ajusta a la simetría hexagonal polar (6). Es importante señalar algunas características cualitativas del hueso humano. Por ejemplo, la densidad del tejido óseo es de  $2400 \text{ Kg/m}^3$ . Sus propiedades mecánicas dependen de muchos factores, incluyendo la edad, las condiciones individuales de crecimiento del organismo y naturalmente la parte del organismo. Se presenta como un cristal diminuto de alrededor de  $200 \text{ \AA}$  en longitud y con un promedio de sección transversal de  $2500 \text{ \AA}^2$ . Tal cristal es muy duro y rígido. Su módulo de Young a lo largo del eje es aproximadamente de  $165 \text{ GPa}$  (el acero es de  $200 \text{ GPa}$ ).

En los últimos años, las técnicas numéricas han evidenciado un desarrollo acelerado en la solución de problemas de vibraciones de materiales piezoeléctricos [3–5]. Los métodos dinámicos, tales como propagación de onda y vibraciones de huesos, han sido usados como métodos eficaces para medir en vivo propiedades del hueso. Durante accidentes o ejercicios, bajo determinados esfuerzos a los que puede estar sujeto el hueso, en ocasiones se producen dislocaciones de las articulaciones o fracturas. Aplicando un potencial eléctrico apropiado a la parte afectada del hueso podría ser posible curar la fractura o traumatismo de la articulación. De manera que la investigación de la interacción entre esfuerzos mecánicos e impulsos eléctricos pudiera conducir a recursos terapéuticos en este campo.

Debido a la aplicación que tiene el estudio de los materiales piezoeléctricos en la medicina, biomecánica y en particular en la ortopedia, hemos realizado en este trabajo el estudio de los modos de vibración torsionales de un material piezoeléctrico de simetría (622). Esta simetría está contenida en la clase de simetría (6), ver Ref. [6]. Un estudio de las vibraciones torsionales forzadas de un cilindro piezoeléctrico de clase (622) fue realizado por Paul y Venkatesan [7].

A diferencia de las Refs. [7, 8], donde se analizan los modos de torsión que se generan en una lámina infinita circular piezoeléctrica de clase (622) cuando es excitada por un impulso de un potencial eléctrico aplicado en el centro de una de sus caras y la cara opuesta, así como de otros artículos, tales como las Refs. [9, 10], donde se estudian los modos radiales, modos de borde, modos de espesor por cisalladura entre otros, de discos piezoeléctricos y las vibraciones forzadas de láminas piezoeléctricas, en el presente trabajo se obtiene la ecuación de dispersión correspondiente a las condiciones de contorno libre de un cilindro sólido infinito piezoeléctrico de clase (622) y se realiza un estudio numérico de dicha ecuación. Los cálculos se efectuaron para el hueso humano, cuyas constantes materiales se muestran en la Tabla I. Las soluciones de la ecuación de frecuencia son obtenidas para valores prefijados del número de onda adimensional  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = 2\pi a/\text{longitud de onda}$ ,  $a = \text{radio del cilindro}$ ).

## 2. TEORÍA GENERAL

Consideremos un cuerpo piezoeléctrico que ocupa un volumen  $V$  en una determinada región del espacio. Las ecuaciones constitutivas de la piezoelectricidad relacionan al tensor de tensiones  $\sigma_{ij}$  y al vector desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$  con el tensor de deformación  $\varepsilon_{kl}$  y con el campo eléctrico  $\vec{E}$  de la siguiente forma:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - e_{kij}E_k, \quad (1)$$

$$D_i = e_{ikl}\varepsilon_{kl} + \epsilon_{ik}E_k, \quad (2)$$



TABLA I. Constantes materiales para el hueso humano.

Constantes		
Elásticas 10 <sup>10</sup> N/m <sup>2</sup>	Piezoeléctricas 10 <sup>4</sup> C/m <sup>2</sup>	Dieléctricas 10 <sup>12</sup> F/m
$C_{11} = 2.12$	$e_{14} = 533.0$	$\epsilon_{11} = 10$
$C_{12} = 0.95$	$e_{15} = 106.6$	$\epsilon_{33} = 12$
$C_{13} = 1.02$	$e_{31} = 45.2$	
$C_{33} = 3.76$	$e_{33} = 55.8$	
$C_{44} = 0.75$		

donde  $C_{ijkl}$  es el tensor elástico,  $e_{kij}$  las constantes piezoeléctricas,  $\epsilon_{ik}$  las constantes dieléctricas y  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ .

De las consideraciones de la Termodinámica [11], la simetría del tensor de tensiones  $\sigma_{ij}$  y del tensor de deformación  $\epsilon_{ij}$ , tenemos que

$$C_{ijkl} = C_{klij}, \quad C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}, \quad e_{kij} = e_{kji}, \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}. \quad (3)$$

En el caso más general, digamos el cristal triclinico, tenemos 21 constantes elásticas independientes, 18 constantes piezoeléctricas independientes y 6 constantes dieléctricas independientes.

Las relaciones (1)-(2) brindan una relación concreta de acuerdo con el medio continuo que se analice y el modelo matemático de la piezoelectricidad lineal cuasiestática. Las tensiones  $\sigma_{ij}$  y el desplazamiento eléctrico  $D_i$  son funciones lineales de las deformaciones  $\epsilon_{ij}$  y las componentes del vector  $E_i$ . El primer sumando de (1) está relacionado con el aporte mecánico, mientras que el segundo con la parte electromecánica del cuerpo piezoeléctrico. Es decir, un cuerpo piezoeléctrico se encuentra en un estado de tensión si está deformado o si se halla bajo un campo eléctrico. En la relación (2) el primer sumando caracteriza el efecto electromecánico, mientras que el segundo se asocia a un efecto eléctrico puro. Es decir, la carga superficial libre es ocasionada por deformaciones o por campo eléctrico.

Como se conoce de la teoría de elasticidad [11], las deformaciones lineales pueden ser escritas en términos del vector desplazamiento  $\vec{u}$  (cuyas componentes serán denotadas por  $(u, v, w)$ ) por la conocida relación geométrica o de Cauchy

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (4)$$

La coma seguida de un subíndice denota la derivada parcial respecto a ese subíndice. Poniendo (1) y (4) en la ecuación del movimiento de la mecánica de los medios continuos podemos escribir

$$C_{ijkl}u_{k,lj} + e_{mij}E_{m,j} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (5)$$

donde  $X_i$  son las componentes de las fuerzas másicas que actúan sobre el cuerpo.

Como se puede observar de (5) estamos en presencia de más incógnitas que ecuaciones, por lo que el sistema planteado de esta forma no está cerrado. Para cerrar el sistema es necesario añadir la ecuación de Gauss en ausencia de carga libre, la cual es

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 \tag{6}$$

Poniendo (2) en (6) obtenemos la conocida ecuación de Gauss

$$e_{kij}u_{i,jk} - \epsilon_{ik}\phi_{,ik} = 0, \tag{7}$$

donde hemos escrito el campo eléctrico  $\vec{E}$  en función del potencial eléctrico  $\phi$  por medio de la relación que es consecuencia de la ecuación de Maxwell aplicada a un material piezoeléctrico,

$$E_i = -\phi_{,i} \tag{8}$$

Por consiguiente, hemos obtenido el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} C_{ijkl}u_{k,lj} + e_{mij}\phi_{,mj} + X_i &= \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \\ e_{kij}u_{i,jk} - \epsilon_{ik}\phi_{,ik} &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Dicho sistema constituye un sistema de ecuaciones en derivadas parciales acopladas en el que figuran cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas  $u_i$  y  $\phi$ . El mismo describe las vibraciones de un medio piezoeléctrico.

Teniendo en cuenta la propiedad de simetría tanto para el tensor eléctrico como para el piezoeléctrico, entonces existen solamente 6 pares diferentes de combinaciones, las cuales enumeraremos desde 1 hasta 6 de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (11) \rightarrow 1, \quad (22) \rightarrow 2, \quad (33) \rightarrow 3, \quad (23) = (32) \rightarrow 4, \\ (31) = (13) \rightarrow 5, \quad (12) = (21) \rightarrow 6. \end{aligned} \tag{10}$$

Luego, podemos escribir

$$C_{\alpha\beta} = C_{ijkl},$$

donde  $(ij) \rightarrow \alpha$  y  $(kl) \rightarrow \beta$  en correspondencia con (9),  $\alpha, \beta = 1, \dots, 6$ . De manera análoga podemos escribir  $e_{i\alpha} = e_{ijk}$ , donde  $i = 1, 2, 3$ ,  $\alpha = (j, k) = 1, \dots, 6$ .

En particular los tensores elásticos, piezoeléctricos y dieléctricos para el material de simetría hexagonal se simplifican considerablemente en correspondencia con el grupo puntual al que hagamos referencias [3]. En el caso particular del grupo (622), bajo la rotación de un ángulo  $\frac{2\pi}{6}$  alrededor del eje  $z$ , se obtienen por ejemplo, para el tensor elástico, solamente cinco constantes elásticas independientes,  $C_{11} = C_{22}$ ,  $C_{13} = C_{23}$ ,  $C_{44} = C_{55}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{33}$ , mientras que  $C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$ ,  $C_{14} = C_{15} = C_{16} = C_{24} = C_{25} = C_{26} = C_{34} = C_{35} = C_{36} = 0$ ,  $C_{45} = C_{46} = C_{56} = 0$ . De manera análoga, para el tensor piezoeléctrico

obtenemos una constante independiente,  $e_{14} = -e_{25}$  y las componentes restantes se anulan. En el caso del tensor dieléctrico se tienen dos constantes independientes diferentes de cero,  $\epsilon_{11} = \epsilon_{22}$  y  $\epsilon_{33}$ . Teniendo en cuenta lo antes expresado, podemos escribir la siguiente tabla [3, 12]:

$$\begin{aligned}
 [C_{pq}] &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}, \\
 [e_{ip}] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 [\epsilon_{ij}] &= \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

En virtud de que el objeto de estudio es un cilindro piezoeléctrico infinito de radio  $a$ , resulta conveniente emplear el sistema de ecuaciones que describen las vibraciones de un material piezoeléctrico en coordenadas cilíndricas caracterizadas por  $r, \theta, z$ ; donde la generatriz del cilindro coincide con el eje  $z$ .

Las relaciones constitutivas (1) y (2) en coordenadas cilíndricas para el material de clase (622) teniendo en cuenta (11) pueden escribirse de la forma

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= C_{11}u_{,r} + \frac{1}{r}C_{12}(u + v_{,\theta}) + C_{13}w_{,z}, \\
 \sigma_{\theta\theta} &= C_{12}u_{,r} + \frac{1}{r}C_{11}(u + v_{,\theta}) + C_{13}w_{,z}, \\
 \sigma_{zz} &= C_{13}u_{,r} + \frac{1}{r}C_{44}(u + v_{,\theta}) + C_{33}w_{,z}, \\
 \sigma_{r\theta} &= C_{66}\left(\frac{1}{r}u_{,\theta} + v_{,r} - \frac{1}{r}v\right), \\
 \sigma_{rz} &= C_{44}(w_{,r} + u_{,z}) - e_{14}\frac{1}{r}\phi_{,\theta}, \\
 \sigma_{\theta z} &= C_{44}(v_{,z} + \frac{1}{r}w_{,\theta}) + e_{14}\phi_{,r}, \\
 D_r &= e_{14}(v_{,z} + \frac{1}{r}w_{,\theta}) - \epsilon_{11}\phi_{,r}, \\
 D_\theta &= -e_{14}(w_{,r} + u_{,z}) - \epsilon_{11}\frac{1}{r}\phi_{,\theta}, \\
 D_z &= -\epsilon_{33}\phi_{,z}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

El sistema de ecuaciones (9) que describe las vibraciones del material piezoeléctrico (622)



puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 C_{11} \left( u_{,rr} + \frac{1}{r} u_{,r} - \frac{1}{r^2} u \right) + C_{66} \frac{1}{r^2} u_{,\theta\theta} + C_{44} u_{,zz} + C_{66} \left( \frac{1}{r} v_{,r\theta} - \frac{1}{r^2} v_{,\theta} \right) - \\
 \frac{1}{r^2} C_{11} v_{,\theta} + (C_{13} + C_{44}) w_{,rz} = \rho u_{,tt} \\
 C_{66} \left( v_{,rr} + \frac{1}{r} v_{,r} - \frac{1}{r^2} v \right) + C_{11} \frac{1}{r^2} v_{,\theta\theta} + C_{44} v_{,zz} + \frac{1}{r^2} (C_{11} + C_{66}) u_{,\theta} + \\
 \frac{1}{r} (C_{12} + C_{66}) u_{,r\theta} + \frac{1}{r} (C_{13} + C_{44}) w_{,\theta z} + e_{14} \phi_{,rz} = \rho v_{,tt} \\
 C_{44} \left( w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \right) + C_{33} w_{,zz} + \frac{2}{r} C_{44} v_{,\theta z} + C_{44} \left( u_{,rz} + \frac{1}{r} u_{,z} \right) + \\
 C_{13} u_{,rz} = \rho w_{,tt}, \\
 \epsilon_{11} \left( \phi_{,rr} + \frac{1}{r} \phi_{,r} + \frac{1}{r^2} \phi_{,\theta\theta} \right) + \epsilon_{33} \phi_{,zz} - e_{14} \left( v_{,rz} + \frac{1}{r} v_{,z} \right) + \frac{1}{r} e_{14} u_{,\theta z} = 0. \quad (13)
 \end{aligned}$$

En el caso del modo torsional la única componente distinta de cero del vector desplazamiento es  $v$  y es independiente del ángulo  $\theta$ . También el potencial eléctrico  $\phi$  es independiente de  $\theta$ . La ecuación del movimiento y la ecuación de Gauss (7) en el caso del cristal (622) para el modo torsional vienen dadas por

$$\begin{aligned}
 C_{66} \left( v_{,rr} + \frac{1}{r} v_{,r} - \frac{1}{r^2} v \right) + C_{44} v_{,zz} + e_{14} \phi_{,rz} = \rho v_{,tt}, \\
 \epsilon_{11} \left( \phi_{,rr} + \frac{1}{r} \phi_{,r} \right) + \epsilon_{33} \phi_{,zz} - e_{14} \left( v_{,rz} + \frac{1}{r} v_{,z} \right) = 0. \quad (14)
 \end{aligned}$$

La condición de contorno mecánica en el caso de vibraciones torsionales libres viene dada por el hecho de que en la superficie  $r = a$  actúan las tensiones  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{rz}$ ,  $\sigma_{r\theta}$ . En el caso de  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{rz}$  por las suposiciones anteriores se hacen idénticamente ceros y exigimos para que esta superficie esté libre de tensión que  $\sigma_{r\theta} = 0$ , la cual es la que proporciona el torque en el interior del cuerpo, es decir,

$$\sigma_{r\theta} = 0, \quad \text{para } r = a; \quad (15)$$

y para la condición de contorno eléctrica, debido a que buscamos las autofrecuencias propias relacionadas con modos torsionales, es necesario exigir que la superficie  $r = a$  esté libre de potencial eléctrico, por lo que podemos escribir

$$\phi = 0, \quad \text{para } r = a. \quad (16)$$

Además, debido a que las soluciones del problema deben ser acotadas, es necesario imponer las condiciones

$$|v| < \infty \quad \text{y} \quad |\phi| < \infty, \quad \text{para } r = 0.$$

Busquemos las soluciones de (14) en la forma

$$\begin{aligned} v(r, z, t) &= v(r)e^{i(kz-\omega t)}, \\ \phi(r, z, t) &= \frac{iC_{44}}{e_{14}} E(r)e^{i(kz-\omega t)}, \end{aligned} \tag{17}$$

donde  $v$  y  $E$  son funciones que dependen de  $r$ ,  $\omega$  es la frecuencia angular y  $k$  es el número de onda con  $k = 2\pi/\text{longitud de onda}$ . Hasta el momento hemos trabajado con magnitudes que tienen dimensiones y hemos escrito las ecuaciones en el sistema internacional de unidades.

Sustituyendo (17) en (14) y haciendo  $x = r/a$  y  $\varepsilon = ka$ , obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden adimensional:

$$\begin{aligned} (\overline{C_{66}}^2 + (ca)^2 - \varepsilon^2)v - \varepsilon E_{,x} &= 0, \\ e_{14} \left( v_{,x} + \frac{1}{x}v \right) - k_{11}^{-2} \left( E_{,xx} + \frac{1}{x}E_{,x} \right) + k_{33}^{-2}\varepsilon^2 E &= 0, \end{aligned} \tag{18}$$

donde

$$\begin{aligned} ca &= \left( \frac{\rho\omega^2}{C_{44}} \right)^{\frac{1}{2}} a, \\ \overline{C_{ij}} &= \frac{C_{ij}}{C_{44}}, \\ k_{ig}^{-2} &= \frac{\epsilon_{ig}C_{44}}{e_{14}^2}, \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Aplicando el método operacional de Heaviside, el cual permite reducir el sistema de ecuaciones diferenciales (18), a un problema puramente algebraico (19), con la ayuda del operador  $\nabla^2$  [13], tenemos

$$\begin{vmatrix} \overline{C_{66}}\nabla^2 + (ca)^2 - \varepsilon^2 & -\varepsilon \\ \varepsilon^2 & -k_{11}^{-2}\nabla^2 + k_{33}^{-2}\varepsilon^2 \end{vmatrix} (v, D) = 0, \tag{19}$$

donde  $D = E_{,x}$ .

Resolviendo el determinante y evaluando en  $v$  y  $D$  se obtiene

$$(\nabla^4 + P_1\nabla^2 + P_2)(v, D) = 0, \tag{20}$$

donde

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \frac{k_{11}^{-2}(ca)^2 - \varepsilon^2(k_{33}^{-2}\overline{C_{66}} + k_{11}^{-2} + 1)}{k_{11}^{-2}\overline{C_{66}}}, \\
 P_2 &= \frac{k_{33}^{-2}\varepsilon^2(\varepsilon^2 - (ca)^2)}{k_{11}^{-2}\overline{C_{66}}}.
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Es posible demostrar que  $P_1^2 - 4P_2 > 0$  para  $\varepsilon$  real e imaginario puro. Para el caso en que  $\varepsilon$  sea real se obtienen dos casos a diferenciar. En efecto:

*Caso I:* Las soluciones de (18) para  $\varepsilon$  real y  $(ca)^2 > \varepsilon^2$ :

$$\begin{aligned}
 v &= A_1 J_1(h_1 ax) + A_2 I_1(h_2 ax), \\
 E &= e_1 A_1 J_0(h_1 ax) + e_2 A_2 I_0(h_2 ax),
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

donde

$$\begin{aligned}
 (h_1 a)^2 &= \frac{\sqrt{P_1^2 - 4P_2} + P_1}{2}, \\
 (h_2 a)^2 &= \frac{\sqrt{P_1^2 - 4P_2} - P_1}{2}, \\
 e_1 &= \frac{\overline{C_{66}}(h_1 a)^2 - (ca)^2 + \varepsilon^2}{\varepsilon(h_1 a)}, \\
 e_2 &= \frac{\overline{C_{66}}(h_2 a)^2 + (ca)^2 - \varepsilon^2}{\varepsilon(h_2 a)},
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

y  $J_\nu$  ( $I_\nu$ ) son las funciones de Bessel de argumento real (imaginario).

Sustituyendo (22) en las condiciones de contorno (15)-(16) se obtiene la ecuación de dispersión

$$e_1(h_2 a)J_0(h_1 a)I_2(h_2 a) + e_2(h_1 a)I_0(h_2 a)J_2(h_1 a) = 0.
 \tag{24}$$

Para el caso en que  $\varepsilon$  tiende a cero, de (17) y (22) se obtiene

$$\begin{aligned}
 v(r, z, t) &= A_1 J_1(h_1 ax)e^{i(kz - \omega t)} \\
 \phi(r, z, t) &= \frac{iC_{44}}{e_{14}} A_3 e^{i(kz - \omega t)}
 \end{aligned}$$

donde  $h_1 a = (ca)^2/\overline{C_{66}}$  y  $A_1, A_3$  son dos constantes arbitrarias.

*Caso II:* De manera análoga, para  $\varepsilon$  real y  $(ca)^2 < \varepsilon^2$  se obtiene la ecuación de dispersión

$$e_1(h_2 a)I_0(h_1 a)I_2(h_2 a) - e_2(h_1 a)I_0(h_2 a)I_2(h_1 a) = 0,
 \tag{25}$$



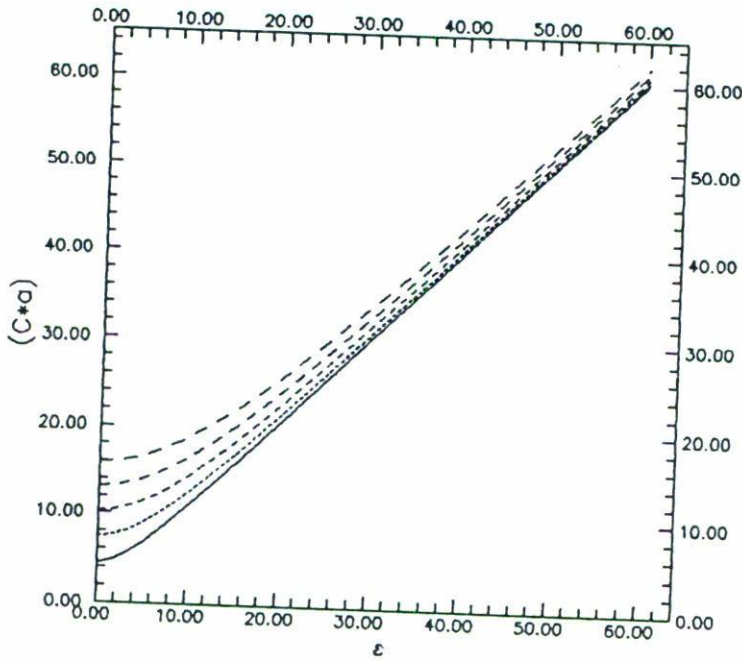


FIGURA 1. Gráfico de las curvas de dispersión.

donde

$$\begin{aligned}
 (h_1 a)^2 &= -\frac{\sqrt{P_1^2 - 4P_2} + P_1}{2}, \\
 (h_2 a)^2 &= \frac{\sqrt{P_1^2 - 4P_2} - P_1}{2}, \\
 e_1 &= \frac{\overline{C_{66}}(h_1 a)^2 + (ca)^2 - \varepsilon^2}{\varepsilon(h_1 a)}, \\
 e_2 &= \frac{\overline{C_{66}}(h_2 a)^2 + (ca)^2 - \varepsilon^2}{\varepsilon(h_2 a)},
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

### 3. RESULTADOS NUMÉRICOS

La ecuación de frecuencia (24) es analizada numéricamente por el método de bisección, obteniéndose los cinco primeros valores para la frecuencia adimensional (ca) a partir de valores del número de onda ε adimensional, para esto se confeccionó un programa de computación en Fortran. Los resultados numéricos para este caso aparecen representados en la Fig. 1. En la misma se puede observar cómo la recta ca = ε es una asíntota de las curvas de dispersión. La ecuación de dispersión (25) no tiene solución en el intervalo de ε trabajado. Para el caso ε imaginario puro se puede observar de (17) que la onda se amortigua en la medida en que k crece. Las constantes elásticas, piezoeléctricas y dieléctricas utilizadas corresponden al hueso humano.

## 4. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se obtienen dos ecuaciones de dispersión para el número de onda adimensional real, que permite calcular las frecuencias de resonancias para vibraciones torsionales libres de un material piezoeléctrico infinito de clase (622), el cual es semejante al hueso humano. En el mismo se realizó el análisis para el número de onda real, cuyos valores mayores que 30 no brindan información adicional alguna. Por otra parte, a partir de  $\varepsilon$  aproximadamente mayores que 10, los modos se agolpan y tienden a tener la misma velocidad de grupo e igual a la velocidad de fase. En el caso límite,  $\varepsilon$  tiende a cero, de la ecuación de dispersión (24) se obtiene que  $J_2(h_1a) = 0$ , de donde se infiere que  $(ca)$  toma los valores aproximados de 0; 4.5033; 7.4172; 9.8896, etc. Éstos son los puntos de inicio de las curvas, representadas en la Fig. 1. El análisis de la ecuación (25) para cuando  $\varepsilon$  tiende a cero y  $\varepsilon$  tiende al infinito confirma el resultado numérico de que no se obtienen soluciones en la región mencionada. El caso  $\varepsilon$  complejo no se analiza, porque como se observa de (15), (16) y (17) no satisface las condiciones de contorno. Otros problemas con otras condiciones de contorno se están trabajando y se darán a conocer próximamente.

## AGRADECIMIENTOS

Se agradece la ayuda brindada al Dr. Rolando Pérez Alvarez, Profesor de la Facultad de Física de la Universidad de la Habana por la revisión y sugerencias dadas al trabajo.

## REFERENCIAS

1. N. Guzelsu, and H. Demiray, *Int. J. Eng. Sci.* **17** (1979) 813.
2. L.J. Gibson and M.F. Ashby, *Cellular Solids: Structure and Properties*. Pergamon Press, Oxford (1988).
3. N. Guo, P. Cawley and D. Hitchings, *J. Sound Vib.* **152** (2) (1992).
4. R. Lerch, *IEEE Trans. Ultrason. Freq. Controls* **37** (1990) 233.
5. G.R. Buchanan and J. Peddieson, *IEEE Trans. Ultrason, Ferroelectrics, and Freq. Control* **38**, N° 3, May (1991).
6. E. Dieulesaint et D. Royer, *Ondes élastiques dans les solides. Application au traitement du signal*. Masson et Cie. (1974).
7. H.S. Paul and M. Venkatesan, *Indian Journal of Technology* **28** (1990) 657.
8. H.S. Paul and K.V. Sarma, *Proc Indian Acad. Sci.* **85A** (1977) 289.
9. N. Guo and P. Cawley, *J. Acoust. Soc. Am.* **92** (6), December (1992).
10. H.F. Tiersten and R.D. Mindlin, *Q J Appl. Math.* **20** (1962) 107.
11. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics*, Vol. 7. Oxford, Pergamon Press Ltd (1959) [véase *Electrodynamics of Continuous Media*, Vol. 8, Pergamon Press (1960)].
12. G.A. Maugin, *Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids*. North-Holland, Amsterdam (1988).
13. V.P. Máslov, *Métodos Operacionales*. MIR, Moscú (1982), 23.