

Determinación de la amplitud de oscilación de un movimiento mecánico usando la intensidad gaussiana de un haz láser

ELÍAS PÉREZ*

Departamento de Física

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa

Aportado postal 55-534, México, D.F., México

Recibido el 3 de enero de 1995; aceptado el 29 de mayo de 1995

RESUMEN. Se determina la amplitud de oscilación de un movimiento mecánico en sus primeras cuatro frecuencias de resonancia en función del voltaje utilizado para excitar el sistema mecánico. Esto se hace midiendo la intensidad de un haz láser, el cual es reflejado por el plano de oscilación. Cuando el oscilador está estático se mide el perfil de intensidad gaussiano del haz y, posteriormente, cuando ejecuta el movimiento armónico, se mide el promedio RMS de la intensidad del haz en la posición donde es más sensible al movimiento y por tanto a la amplitud del vibrador mecánico.

ABSTRACT. The oscillation amplitude of a mechanical movement in its first four resonance frequencies is determined as a function of the applied voltage used for excite the mechanical system. This is done measuring the laser intensity which is reflected by the oscillating plane. First, the gaussian intensity of the laser beam in the static case is measured and when the oscillator is moving the RMS intensity is detected in the position where this is the most sensible for the beam movement and consequently to the mechanical amplitude.

PACS: 01.50.Kw; 01.50.Pa

1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo muestra la utilización del perfil de intensidad gaussiano que posee un haz láser [1] (modo TEM₀₀) en la determinación de la amplitud de oscilación de un movimiento mecánico.

Las propiedades que tienen este tipo de haces han sido usadas en dispositivos que muestran su gran sensibilidad como detectores de posición [2], además de que aparatos modernos como el microscopio de fuerza atómica usan en algunos casos la deflexión de un haz láser para detectar los pequeños movimientos de la punta rastreadora de dicho microscopio [3].

El dispositivo experimental utilizado en este trabajo es mostrado esquemáticamente en la Fig. 1 y consiste básicamente de una fuente de luz láser, el oscilador mecánico (bocina de audio) con un pequeño espejo pegado en el plano de oscilación y el detector; todo esto montado en un desplazador mecánico que permite medir el patrón de intensidad del

*Dirección actual: ICS; 6 rue de Boussingault, 67083 Strasbourg Cedex, France.

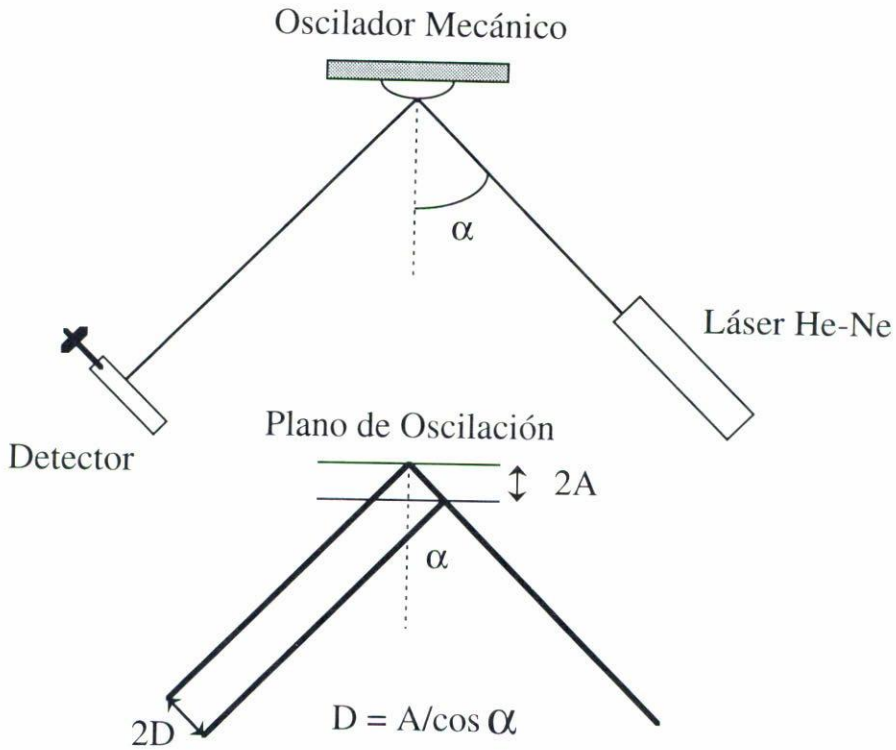


FIGURA 1. Representación esquemática del arreglo láser-oscilador-detector para determinar la amplitud del oscilador mecánico por medio del movimiento del haz reflejado. El sistema de detección se desplaza en una dirección perpendicular a la propagación del haz reflejado.

haz en la dirección perpendicular a la de su propagación. Este detector convierte la señal luminosa en un voltaje eléctrico.

El método consiste en medir la variación de la intensidad del haz láser reflejado por el plano de oscilación en un punto dado y de esta manera determinar la amplitud del movimiento.

Debido a la forma gaussiana del haz es evidente que la relación entre la intensidad medida y la amplitud del oscilador es no lineal, sin embargo, un tratamiento numérico nos permitirá relacionar estas dos cantidades. Este tipo de análisis numérico se encuentra también en los casos cuando se determina el diámetro del haz bloqueándolo parcialmente con el borde de una navaja [4].

Por medio de este método se determinó la amplitud de oscilación en función del voltaje aplicado para excitar al sistema mecánico en las primeras cuatro frecuencias de resonancia del dispositivo.

2. PLANTEAMIENTO DEL MODELO

Partamos del hecho de que la intensidad de un haz láser tiene una forma gaussiana cuando se mide en la dirección perpendicular en la que se propaga, así la intensidad medida en

el detector de la Fig. 1 en el caso estático tendrá la forma

$$I(x) = I_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x - x_0)^2 \right\}, \quad (1)$$

donde $x - x_0$ es la coordenada del desplazador mecánico respecto al máximo de la intensidad, I_0 , y σ^2 es la varianza de la distribución.

Debido a que nuestro sistema de detección mide la intensidad por medio de una diferencia de potencial daremos a ésta las unidades de volts, aun cuando dimensionalmente no es correcto. En el caso dinámico, cuando el plano de oscilación ejecute un movimiento armónico simple, con amplitud A y frecuencia f [5],

$$A \operatorname{sen}(2\pi ft), \quad (2)$$

la intensidad detectada será también una función del tiempo.

Si α es el ángulo que hay entre la normal del plano oscilatorio y la dirección del haz incidente (Fig. 1) la amplitud D que tiene el haz reflejado y la amplitud de la oscilación de la bocina están relacionadas por

$$D = \frac{A}{\cos(\alpha)}. \quad (3)$$

La forma funcional de la intensidad dependiente del tiempo se obtiene sustituyendo la x de la Ec. (1) por

$$x(t) = x_{\text{eq}} + D \operatorname{sen}(2\pi ft),$$

donde x_{eq} es la posición de equilibrio del movimiento oscilatorio, es decir

$$I(x, t) = I_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x_{\text{eq}} + D \operatorname{sen}(2\pi ft))^2 \right\}. \quad (4)$$

Sin pérdida de generalidad hemos supuesto que $x_0 = 0$; que significa simplemente que la posición del detector esta referida al máximo de la curva.

Si definimos las cantidades adimensionales

$$\chi = \frac{x_{\text{eq}}}{\sigma}, \quad \tau = 2\pi ft, \quad d = \frac{D}{\sigma}, \quad (5)$$

podemos escribir la Ec. (4) en la forma

$$I(\tau; \chi, d) = I_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\chi + d \operatorname{sen}(\tau))^2 \right\}. \quad (6)$$

Dado que la expresión (6) nos servirá para medir la amplitud del oscilador, es conveniente colocar la posición de equilibrio de la oscilación del haz (x_{eq}) en un punto tal que $I(\tau; d, \eta)$ sea lo más sensible al movimiento del haz. Esto sucede en $x_{\text{eq}} = \sigma$, en donde la expresión gaussiana (1) tiene su máxima pendiente; así, un pequeño movimiento

alrededor de este punto lleva consigo un cambio grande en la señal detectada. En lo que sigue, nuestro análisis se restringirá al caso $x_{eq} = \sigma$, y por lo tanto a $\chi = 1$.

Un desarrollo en serie de (6) con $\chi = 1$, nos lleva a

$$I(\tau; d) = I_0 \exp\left(\frac{1}{2}\right) \left\{ 1 - d \operatorname{sen}(\tau) + \frac{1}{3}d^3 \operatorname{sen}^3(\tau) - \frac{1}{8}d^5 \operatorname{sen}^5(\tau) + \dots \right\}. \quad (7)$$

En donde vemos sólo la contribución de las potencias impares del desarrollo debido a que estamos localizados en un punto de inflexión.

De la expresión (7) podemos distinguir la componente DC de la señal eléctrica,

$$I_0 \exp\left(\frac{1}{2}\right). \quad (8)$$

Y restándole (8) a (6) obtenemos la componente AC:

$$I(\tau; d) = f_A I_0 \left(\exp\left\{-\frac{1}{2}(\chi - d \operatorname{sen}(\tau))^2\right\} - I_0 \exp\left(\frac{1}{2}\right) \right), \quad (9)$$

donde se hemos introducido el factor de amplificación f_A , que está presente en las mediciones de esta parte y que depende de la electrónica de detección.

Para propósitos de un cálculo numérico, la expresión (9) la escribiremos como

$$f(\tau; d) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(1 - d \operatorname{sen}(\tau))^2\right\} - \exp\left(\frac{1}{2}\right), \quad (10)$$

con

$$f(\tau; d) = \frac{I(\tau, d)}{I_0 f_A}. \quad (11)$$

Para poder apreciar cómo esta última función es sensible al movimiento del haz, consideremos el caso particular en el que $d < 0.2$. En esta situación el tercer término de la expresión (7) contribuye aproximadamente en 1% respecto al resto, por lo que (10) se simplifica a

$$f(\tau; d) = -d \exp\left(\frac{1}{2}\right) \{\operatorname{sen}(\tau)\}. \quad (12)$$

Tomando el promedio RMS de la ecuación (12) y despejando el valor de la amplitud, obtenemos

$$A = \frac{k I_{\text{rms}}}{f_A I_0} \sigma \cos(\alpha), \quad (13)$$

con $k = \sqrt{2} \exp\left(\frac{1}{2}\right) = 2.33164$.

Sin embargo, en el caso más general no es posible despejar en forma explícita la amplitud de la oscilación, por lo que debemos resolver el problema en forma numérica.

El promedio RMS de la Ec. (10) es

$$f_{\text{rms}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t, d) dt \right)^{1/2}, \quad (14)$$

con

$$f_{\text{rms}} = \frac{I_{\text{rms}}}{I_0 f_A}, \quad (15)$$

por lo que procedimos a integrar numéricamente el lado derecho de la Ec. (14) para un conjunto de valores de d para hacer una correspondencia entre los valores de f_{rms} medidos. Una vez obtenido el valor de d de esta comparación procedimos a obtener la amplitud de la oscilación mecánica dada por

$$A = d\sigma \cos(\alpha), \quad (16)$$

La integración se realizó por el método de Simpson [6], donde se aseguró que el valor del residual nunca excediera al 1%. El valor de σ fue determinado a partir del perfil gaussiano de intensidad como se describe en la Sec. 4.

3. DISPOSITIVO EXPERIMENTAL

El arreglo se montó en una mesa holográfica de mármol de $2.40 \text{ m} \times 0.9 \text{ m}$, la cual descansa sobre tres colchones de poliuretano de 10 cm de ancho con los cuales se absorbían las vibraciones mecánicas externas. El láser, la bocina con el espejo y el sistema de detección fueron pegados en un plano paralelo a la superficie de la mesa, de tal manera que la determinación del ángulo θ se redujo a la medición de la mitad del ángulo entre las rectas que describen el haz incidente y el reflejado sobre la mesa y correspondió al valor de $\alpha = 62 \pm 1$ grados.

El láser usado fue un Spectra Physics, mod 105-1, de 5 mWatts de potencia nominal que emite en la longitud de onda de 632.8 nm. El láser junto con una lente convergente de $f = 50 \text{ cm}$ fueron montados en un riel óptico para poder aumentar la intensidad en el punto de detección.

Se pegó un espejo pequeño al diafragma de la bocina de audio (Magnum-Atlas de 70 Watts y 8 Ohms de impedancia), la cual fue atornillada a una placa y ésta a su vez a un bloque de acero y en su conjunto tenían una masa de 8 kg, aproximadamente. El sistema de detección consta de un fotodiodo de respuesta rápida que, junto con un circuito amplificador, convertían la intensidad luminosa en un voltaje de salida. De esta forma se obtuvo el perfil de intensidades estático. En el caso dinámico fue necesario agregar un amplificador de corriente alterna Ortec (mod. 9452) debido a que la señal de salida era pequeña. El voltaje final era mandado a un osciloscopio para monitorear la señal, y a un multímetro digital TRMS Keithley (mod. 179).

Para medir el haz láser colocamos un *pinhole* de $5 \mu\text{m}$ delante de un fotodiodo y ambos fueron montados en un desplazador mecánico, el cual era accionado por un tornillo micrométrico Mitutoyo con una mínima escala de una milésima de pulgada. El sistema de detección fue montado en una placa que era orientada por medio de cinco tornillos, tres de nivel y dos de rotación, para poner la detección en un nivel óptimo. Para excitar la bocina usamos un generador de señales Wavetek (mod. 180) que, junto con un amplificador Teletec AP-50, alimentaban la bocina. La frecuencia fue medida con un frecuencímetro

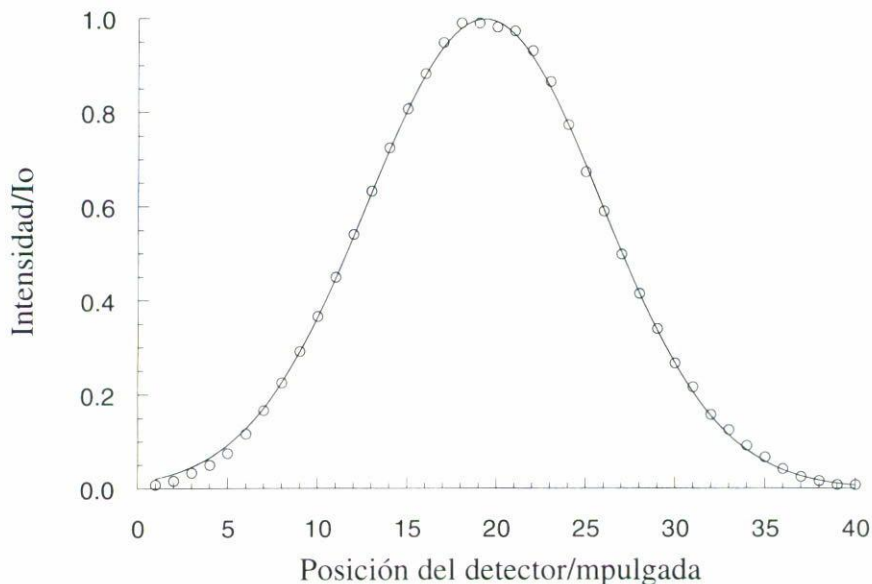


FIGURA 2. Patrón de intensidad medido con el dispositivo descrito en el texto y el ajuste hecho por mínimos cuadrados no lineales. Para una serie de este tipo de curvas obtuvimos un valor de σ de $166 \pm 1 \mu\text{m}$.

Hewlett Packard (mod. 5302 A) y el voltaje y la intensidad de corriente fueron medidas en todo momento con dos multímetros digitales Keithley (mod. 177).

4. RESULTADOS

Primeramente se midió el perfil de intensidad del haz que se normalizó con el valor máximo I_0 , para después analizar los datos con un programa de mínimos cuadrados no lineales, el cual ajustaba el parámetro σ de la Ec. (1). La Fig. 2 muestra una curva típica de calibración obtenida, donde podemos ver, como la curva teórica ajusta bien los puntos experimentales, sobre todo en la zona de interés $x = \pm\sigma$. El análisis para varias curvas nos llevó al valor de $\sigma = 166 \pm 1 \mu\text{m}$.

En el caso dinámico colocamos el *pinhole* de detección en $x = \sigma$, indicado por el máximo valor RMS detectado; medimos el valor de I_{rms} a diferentes frecuencias de excitación a un voltaje fijo, 500 mV, con lo cual detectamos las primeras cuatro frecuencias naturales de resonancia del sistema mecánico: 700, 1450, 2400, y 3500 Hz, como lo muestra la Fig. 3, donde posteriormente se determinó la amplitud de la bocina en función del voltaje aplicado.

Los factores de amplificación para las frecuencias de interés fueron: 15.0, 14.8, 35.6 y 26.5 para 700 Hz, 1450 Hz, 2400 Hz y 3500 Hz, respectivamente.

La amplitud del oscilador mecánico en función del voltaje aplicado se muestra en la Fig. 4. Como podemos observar, la amplitud de la bocina guarda una relación lineal con el voltaje aplicado. Las líneas sólidas que aparecen en la gráfica 4 es el ajuste lineal

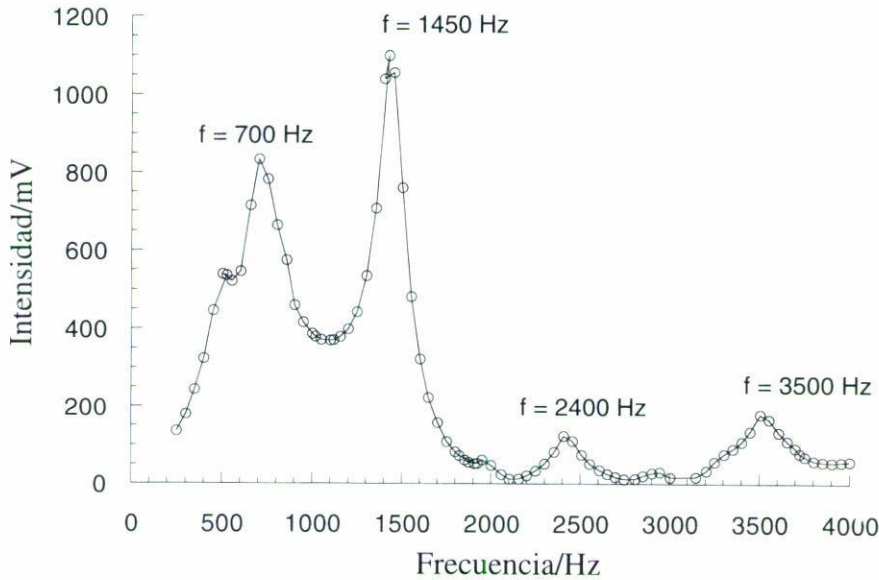


FIGURA 3. La intensidad RMS del haz, I_{rms} , para diferentes frecuencia a un voltaje fijo de alimentación del dispositivo mecánico (0.5 Volts), donde podemos apreciar las primeras frecuencias de resonancia del oscilador.

correspondiente. Las barras de incertidumbre son estimadas a partir de la Ec. (16), como es detallado en el apéndice, y corresponden al 5% del valor de la amplitud.

5. CONCLUSIONES

Se mostró cómo puede ser utilizado el perfil de intensidad de un haz láser para la determinación de la amplitud de oscilación de una bocina de audio. Se encontraron las primeras frecuencias de resonancia del sistema y un comportamiento lineal de la amplitud con el voltaje de alimentación. La precisión con la cual se pudo medir la amplitud del movimiento es del orden del 5%.

Como consecuencia de la forma gaussiana del haz es necesaria una integración numérica para el análisis de los resultados. Sin embargo, este tipo de calculos numéricos es común en estos experientos.

Creemos que es interesante este tipo de aplicaciones de la luz láser donde se hace uso de la forma gaussiana de su intensidad.

APÉNDICE

De la Ec. (16) podemos ver que el error asociado a la amplitud es

$$\frac{\delta A}{A} = \frac{\delta d}{d} + \frac{\delta \sigma}{\sigma} + \frac{\delta \cos(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

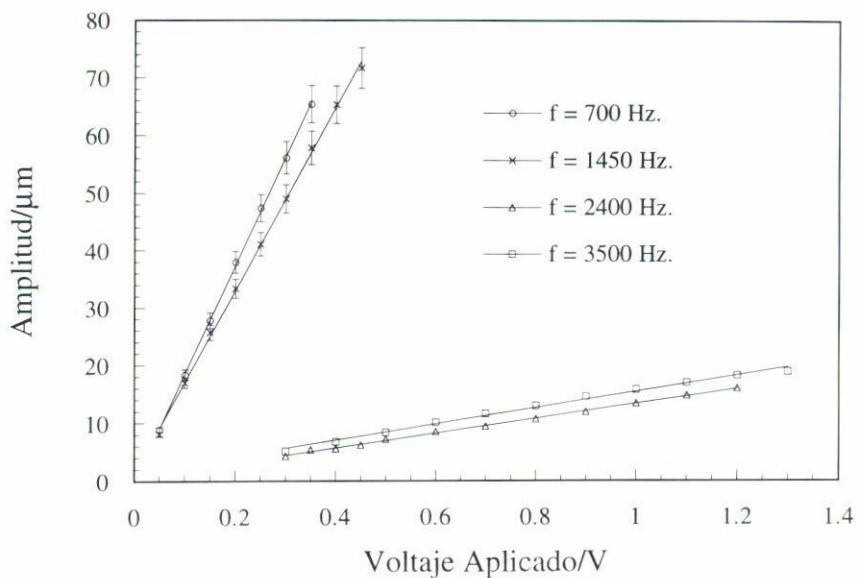


FIGURA 4. Amplitud de la bocina en función del voltaje aplicado para sus primeras cuatro frecuencias de resonancia. Podemos ver la dependencia lineal que hay entre estas dos variables.

A la vez que el error en d viene de la comparación de la definición expresada por la Ec. (15) con la integral de la Ec. (14). La mínima escala con la que se midieron los voltajes I_{rms} , I_0 y el factor de amplificación f_A y su repetibilidad indican que sus errores asociados son del orden del 1%, por lo que podemos considerar que el error de d está en la región

$$\frac{\delta d}{d} \leq 3\%.$$

A partir de los valores de σ y $\delta\sigma$ reportados antes, tenemos que $\delta\sigma/\sigma \approx 0.6\%$. El error en la determinación del ángulo también es menor al 1%, por lo que $\delta A/A \approx 5\%$.

REFERENCIAS

1. E. Hecht, y A. Zajac, *Optics*, Adison Wesley, Massachusetts, EU (1974).
2. R. Díaz-Uribe, M. Rosete-Aguilar y R. Ortega-Martínez, *Rev. Mex. Fís.* **39** (1993) 484.
3. Esta manera de detectar fue implementada por S. Alexander, L. Hellemans, O. Marti, J. Schneir, V. Elings y P.K. Hansma, *J. Appl. Phys.* **65** (1) (1989) 164. Sin embargo, toda la serie de microscopios "Nanoscope" de Digital Instrument trabajan bajo este principio.
4. J.M. Khosroffian y B.A. Garetz, *Appl. Opt.* **22** Núm. 21 (1983).
5. En nada cambia nuestro análisis si hubiéramos supuesto un movimiento de la forma $A \cos(2\pi ft)$.
6. Ver, por ejemplo, R.I. Burden y J. Douglas, *Análisis Numérico*, Grupo Editorial Iberoamericano, México (1985).