Revista Mexicana de Física **41**, *No. 6 (1995) 913–924*

Algungas propiedades de los operadores de escalera

E. Piña*
Departamento de Ciencias Básicas
Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco
Apartado postal 16–306, 02200, México, D.F. México
Recibido el 28 de abril de 1995; aceptado el 9 de agosto de 1995

Resumen. Para una familia de ecuaciones diferenciales lineales, de segundo orden, cuyos coeficientes son funciones de la variable independiente, se han supuesto iguales los coeficientes que multiplican a la segunda y primera derivada de cada función de la familia y se ha supuesto dependiente de un entero n al coeficiente que multiplica a la función. En tal caso, se han estudiado condiciones necesarias para la existencia de operadores de escalera, encontrándose varias propiedades que se pueden verificar en todos los casos conocidos. Asimismo se encuentran de esta forma los operadores de escalera asociados a funciones menos conocidas, como los polinomios de Jacobi y las funciones toroidales.

Abstract. A n-family of second order linear differential equations has been considered, when the coefficient of the term without derivative is a function of the integer n, whereas the coefficients of the first and second derivatives are the same for all the differential equations of the family. In such a case, the properties of ladder operators transforming the solution of the n-member of the family into the neighbor $n-1$ and $n+1$ functions were studied.

PACS: 02.30.+g; 01.50.–i; 03.65.Db

1. Introducción

En la física, la química y la ingeniería aparecen con frecuencia las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes dependientes de la variable independiente. Estas ecuaciones provienen en muchos casos de problemas surgidos de la teoría del potencial, o de fenómenos ondulatorios de índole muy diferente. Aparecen con frecuencia ligados a la solución de ecuaciones diferenciales parciales por el método de separación de variables.

En dichos casos, y otros de interés similar, las ecuaciones diferenciales dependen de un parámetro cuyos valores relevantes para las aplicaciones se vuelven funciones de un entero n.

Desde hace mucho tiempo [1] se ha descubierto la existencia de operadores mediante los cuales, dada una solución para un valor del parámetro, se puede entonces encontrar la solución para los valores contiguos en n del parámetro mediante la aplicación de dichos operadores llamados *de escalera*.

Los operadores de escalera se han usado también para diversas aplicaciones ingeniosas que simplifican procedimientos de cálculo y los evitan con mínimo esfuerzo. Aplicaciones recientes de dichos operadores se encuentran en las Refs. [2] y [3].

---

*Asesor del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, C.E.M., México. Actualmente en la UAM-Iztapalapa.

Por este motivo se han estudiado las propiedades de dichos operadores desde un punto de vista formal, y se han encontrado propiedades comunes e interesantes que aseguran su utilidad como herramientas para aquellos interesados en las matemáticas aplicadas.

2. CONDICIONES NECESARIAS PARA LA EXISTENCIA DE OPERADORES DE ESCALERA

Se tiene una familia de ecuaciones diferenciales, lineales de segundo orden, numeradas por el índice n,

$$P(x)\frac{d^2 y_n(x)}{dx^2} + Q(x)\frac{dy_n(x)}{dx} + R_n(x)\, y_n(x) = 0, \tag{1}$$

donde P, Q, R_n son funciones de x. Las soluciones $y_n(x)$ de distinto índice difieren entre sí porque las ecuaciones diferenciales que satisfacen tienen una función diferente $R_n(x)$, aunque todas comparten las mismas funciones $P(x)$ y $Q(x)$.

Se supone que las soluciones de índices vecinos están relacionadas por operadores diferenciales lineales de primer orden U_n y D_n, llamados de escalera:

$$U_n y_n(x) = A_n y_{n+1}(x), \tag{2}$$

$$D_n y_n(x) = B_n y_{n-1}(x), \tag{3}$$

donde A_n y B_n son constantes, en general diferentes de cero, y donde D_n y U_n son de la forma

$$U_n = g_n(x)\frac{d}{dx} + u_n(x), \tag{4}$$

$$D_n = f_n(x)\frac{d}{dx} + d_n(x), \tag{5}$$

con f_n, g_n, d_n, u_n, funciones de x, las cuales pueden depender también del índice n.

Puesto que las funciones y_n de la familia están definidas hasta una constante multiplicativa, las constantes A_n y B_n están definidas hasta el cociente de dos constantes multiplicativas.

Debido a las Ecs. (2) y (3) se pueden escribir las ecuaciones diferenciales de la familia con ayuda de los operadores de escalera en las formas

$$D_{n+1}\, U_n y_n(x) = A_n B_{n+1} y_n(x), \tag{6}$$

$$U_n D_{n+1}\, y_{n+1}(x) = A_n B_{n+1} y_{n+1}(x). \tag{7}$$

Y en ambas ecuaciones diferenciales (6) y (7), que difieren en índice por el entero uno $(n, n+1)$, se ve aparecer la misma constante

$$k_n = A_n B_{n+1}. \tag{8}$$

Obsérvese que la constante, k_n es independiente de las constantes multiplicativas arbitrarias que pueden haber en cada función de la familia y_n, porque el cociente de constantes arbitrarias en A_n es el inverso del cociente de las mismas constantes en B_{n+1}.

Se sustituyen las formas (4) y (5) de los operadores en las Ecs. (6) y (7) y se supone que el resultado adquiere la forma (1) de las ecuaciones diferenciales asociadas a los índices n y $n+1$, respectivamente. Se encuentran

$$\begin{aligned} D_{n+1}U_n &= \left(f_{n+1}\frac{d}{dx} + d_{n+1}\right)\left(g_n\frac{d}{dx} + u_n\right) \\ &= f_{n+1}g_n\frac{d^2}{dx^2} + \left(f_{n+1}\frac{dg_n}{dx} + f_{n+1}u_n + d_{n+1}g_n\right)\frac{d}{dx} + f_{n+1}\frac{du_n}{dx} + d_{n+1}u_n \\ &= P\frac{d^2}{dx^2} + Q\frac{d}{dx} + R_n + k_n \end{aligned} \tag{9}$$

y

$$\begin{aligned} U_nD_{n+1} &= \left(g_n\frac{d}{dx} + u_n\right)\left(f_{n+1}\frac{d}{dx} + d_{n+1}\right) \\ &= f_{n+1}g_n\frac{d^2}{dx^2} + \left(g_n\frac{df_{n+1}}{dx} + d_{n+1}g_n + f_{n+1}u_n\right)\frac{d}{dx} + g_n\frac{dd_{n+1}}{dx} + d_{n+1}u_n \\ &= P\frac{d^2}{dx^2} + Q\frac{d}{dx} + R_{n+1} + k_n. \end{aligned} \tag{10}$$

Las Ecs. (9) y (10) dan seis ecuaciones entre funciones, de las cuales dos se repiten, por lo cual se tienen las cinco ecuaciones:

$$P = f_{n+1}g_n, \tag{11}$$

$$Q = f_{n+1}\frac{dg_n}{dx} + f_{n+1}u_n + d_{n+1}g_n, \tag{12}$$

$$R_n + k_n = f_{n+1}\frac{du_n}{dx} + d_{n+1}u_n, \tag{13}$$

$$Q = g_n\frac{df_{n+1}}{dx} + f_{n+1}u_n + d_{n+1}g_n, \tag{14}$$

$$R_{n+1} + k_n = g_n\frac{dd_{n+1}}{dx} + d_{n+1}u_n. \tag{15}$$

Puesto que (12) y (14) deben ser iguales, se obtiene la relación de compatibilidad entre ambas ecuaciones:

$$f_{n+1}\frac{dg_n}{dx} = g_n\frac{df_{n+1}}{dx}, \tag{16}$$

la cual implica que f_{n+1} y g_n son proporcionales. Y puesto que los operadores de escalera están definidos en (2) y (3) hasta una constante multiplicativa, sin perder generalidad se tiene que

$$f_{n+1} = g_n, \tag{17}$$

y la sustitución de ésta en (11) permite determinar las funciones f_{n+1} y g_n como

$$f_{n+1} = g_n = \sqrt{P}. \tag{18}$$

La sustitución de este resultado en cualquiera de las Ecs. (12) o (14) produce el resultado

$$u_n + d_{n+1} = \frac{Q}{\sqrt{P}} - \frac{d}{dx}\sqrt{P}. \tag{19}$$

Hasta ahora no se ha hecho uso de las Ecs. (13) y (15), mientras que las Ecs. (11), (12) y (14) se satisfacen con (18) y (19).

La sustitución de (18) en la diferencia de (13) y (15) produce

$$\frac{d}{dx}(d_{n+1} - u_n) = \frac{1}{\sqrt{P}}(R_{n+1} - R_n). \tag{20}$$

Las Ecs. (19) y (20) permiten determinar a las funciones u_n y d_{n+1} que faltaban para conocer a los operadores de escalera, hasta una constante de integración, que resulta de integrar (20).

Falta considerar además una de las dos Ecs. (13) o (15), que se convierten ahora en

$$R_n + k_n = \sqrt{P}\frac{du_n}{dx} + d_{n+1}u_n \tag{21}$$

y

$$R_{n+1} + k_n = \sqrt{P}\frac{dd_{n+1}}{dx} + d_{n+1}u_n, \tag{22}$$

la cual es una condición de compatibilidad sobre dicha constante de integración y sobre la existencia de los operadores de escalera.

Se integra (20):

$$d_{n+1} - u_n = c_n + \int \frac{1}{\sqrt{P}}(R_{n+1} - R_n)\, dx, \tag{23}$$

donde c_n es la constante de integración. Se encuentran

$$d_{n+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{Q}{\sqrt{P}} - \frac{d}{dx}\sqrt{P} + c_n + \int \frac{1}{\sqrt{P}}(R_{n+1} - R_n)\, dx\right], \tag{24}$$

$$u_n = \frac{1}{2}\left[\frac{Q}{\sqrt{P}} - \frac{d}{dx}\sqrt{P} - c_n - \int \frac{1}{\sqrt{P}}(R_{n+1} - R_n)\, dx\right]. \tag{25}$$

La sustitución en (21) da la ecuación de compatibilidad

$$
\begin{aligned}
R_n + k_n = {} & \frac{1}{2}\sqrt{P}\left[\frac{d}{dx}\frac{Q}{\sqrt{P}} - \frac{d^2}{dx^2}\sqrt{P} - \frac{1}{\sqrt{P}}(R_{n+1} - R_n)\right] \\
& + \frac{1}{4}\left[\frac{Q}{\sqrt{P}} - \frac{d}{dx}\sqrt{P} + c_n + \int \frac{1}{\sqrt{P}}(R_{n+1} - R_n)\,dx\right] \\
& \times \left[\frac{Q}{\sqrt{P}} - \frac{d}{dx}\sqrt{P} - c_n - \int \frac{1}{\sqrt{P}}(R_{n+1} - R_n)\,dx\right]. \qquad (26)
\end{aligned}
$$

Se puede tener una perspectiva en sentido contrario, pensar en una familia de operadores de escalera de ascenso y descenso que satisfacen las condiciones anteriores y preguntarse entonces por la familia de ecuaciones diferenciales correspondientes.

En general, para una familia de ecuaciones diferenciales dada no siempre existen los operadores de escalera. Aparentemente está ligada su existencia a un número pequeño de singularidades de la ecuación y a la existencia de soluciones analíticas. Se ilustran estos puntos en las secciones siguientes.

3. EJEMPLOS

En esta sección se introduce un conjunto de familias de ecuaciones de gran utilidad por la aplicación de sus soluciones en la física y la ingeniería. Junto a dichas ecuaciones se han tabulado los operadores de escalera correspondientes. Por supuesto, como se indicó previamente, las constantes A_n y B_{n+1} tabuladas, dependen de la constante multiplicativa arbitraria definida para cada miembro de la familia. Esto explica la diferencia con otros autores. En especial el estudiante inexperto debe tener precaución con las funciones de Laguerre, también llamadas polinomios de Sonine, para las cuales hay muchas diferencias en la literatura.

Todos los ejemplos de esta sección se pueden encontrar con más o menos frecuencia en los libros sobre funciones especiales de la física. Sólo para los dos ejemplos últimos, asociados al nombre de Jacobi, no pude encontrar sino uno de los operadores de escalera.

3.1. Funciones de Bessel

La ecuación de Bessel

$$\frac{d^2 J_n(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_n(x)}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n(x) = 0. \qquad (27)$$

Los operadores de escalera, de ascenso

$$\left(\frac{d}{dx} - \frac{n}{x}\right) J_n(x) = -J_{n+1}(x), \qquad (28)$$

y de descenso

$$\left(\frac{d}{dx}+\frac{n+1}{x}\right)J_{n+1}(x)=J_n(x). \tag{29}$$

3.2. Funciones de Hermite

La ecuación de Hermite

$$\frac{d^2H_n(x)}{dx^2}-2x\frac{dH_n(x)}{dx}+2nH_n(x)=0. \tag{30}$$

Los operadores de escalera, de ascenso

$$\left(\frac{d}{dx}-2x\right)H_n(x)=-H_{n+1}(x), \tag{31}$$

y descenso

$$\frac{d}{dx}H_{n+1}(x)=2(n+1)H_n(x). \tag{32}$$

3.3. Funciones de Laguerre

La ecuación de Laguerre

$$x^2\frac{d^2L_n^\alpha(x)}{dx^2}+\left[(\alpha+1)x-x^2\right]\frac{dL_n^\alpha(x)}{dx}+nxL_n^\alpha(x)=0. \tag{33}$$

Los operadores de escalera, de ascenso

$$\left(x\frac{d}{dx}+\alpha+n+1-x\right)L_n^\alpha(x)=(n+1)L_{n+1}^\alpha(x), \tag{34}$$

y descenso

$$\left(x\frac{d}{dx}-n-1\right)L_{n+1}^\alpha(x)=-(\alpha+n+1)L_n^\alpha(x). \tag{35}$$

3.4. Funciones de Legendre

La ecuación de Legendre

$$(x^2-1)^2\frac{d^2P_n(x)}{dx^2}+2x(x^2-1)\frac{dP_n(x)}{dx}-n(n+1)(x^2-1)P_n(x)=0. \tag{36}$$

Los operadores de escalera, de ascenso

$$\left[(x^2-1)\frac{d}{dx}+(n+1)x\right]P_n(x)=(n+1)P_{n+1}(x), \tag{37}$$

y descenso

$$\left[(x^2-1)\frac{d}{dx}-(n+1)x\right]P_{n+1}(x)=-(n+1)P_n(x) \tag{38}$$

3.5. Funciones asociadas de Legendre

La ecuación asociada de Legendre

$$(1-x^2)\frac{d^2P_n^m(x)}{dx^2}-2x\frac{dP_n^m(x)}{dx}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P_n^m(x)=0. \tag{39}$$

Los operadores de escalera, de ascenso

$$\left[\sqrt{1-x^2}\,\frac{d}{dx}+\frac{mx}{\sqrt{1-x^2}}\right]P_n^m(x)=(m-n)P_n^{m+1}(x), \tag{40}$$

y descenso

$$\left[\sqrt{1-x^2}\,\frac{d}{dx}-\frac{(1+m)x}{\sqrt{1-x^2}}\right]P_n^{m+1}(x)=(m+n+1)P_n^m(x). \tag{41}$$

3.6. Polinomios de Chebischef

La ecuación de Chebischef

$$(x^2-1)^2\frac{d^2T_n(x)}{dx^2}+x(x^2-1)\frac{dT_n(x)}{dx}-n^2(x^2-1)T_n(x)=0. \tag{42}$$

Los operadores de escalera, de ascenso

$$\left[(x^2-1)\frac{d}{dx}+nx\right]T_n(x)=nT_{n+1}(x), \tag{43}$$

y descenso

$$\left[(x^2-1)\frac{d}{dx}-(n+1)x\right]T_{n+1}(x)=-(n+1)T_n(x). \tag{44}$$

3.7. Polinomios de Jacobi

La ecuación de los polinomios de Jacobi (véase Ref. [4], pág. 83)

$$x^2(1-x)^2\frac{d^2 f_n(x)}{dx^2} + x(1-x)\big[\gamma - (\alpha+1)x\big]\frac{df_n(x)}{dx} + x(1-x)n(n+\alpha)f_n(x) = 0. \quad (45)$$

Los operadores de escalera, de ascenso

$$\left[x(1-x)\frac{d}{dx} - (n+\alpha)\left(x - \frac{n+\gamma}{2n+\alpha+1}\right)\right] f_n(x) = \frac{(n+\alpha)(n+\gamma)}{2n+\alpha+1} f_{n+1}(x), \quad (46)$$

y descenso

$$\left[x(1-x)\frac{d}{dx} + (n+1)\left(x - \frac{n+1+\alpha-\gamma}{2n+\alpha+1}\right)\right] f_{n+1}(x) = -\frac{(n+1)(n+1+\alpha-\gamma)}{2n+\alpha+1} f_n(x). \quad (47)$$

3.8. Funciones de Jacobi

La ecuación de las funciones de Jacobi

$$(1-x^2)^2\frac{d^2 P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx^2} + (1-x^2)\big[\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x\big]\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx} + (1-x^2)n(n+\alpha+\beta+1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 0. \quad (48)$$

Los operadores de escalera, de ascenso

$$\left[(1-x^2)\frac{d}{dx} + (n+1+\alpha+\beta)\left(-x + \frac{\beta-\alpha}{2n+2+\alpha+\beta}\right)\right] P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = -\frac{2(n+1)(n+1+\alpha+\beta)}{2n+2+\alpha+\beta} P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad (49)$$

y descenso (Ref. [5], Vol. 2, pág. 170, y Ref. [6], pág. 783)

$$\left[(1-x^2)\frac{d}{dx} + (n+1)\left(x + \frac{\beta-\alpha}{2n+2+\alpha+\beta}\right)\right] P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{2(n+1+\alpha)(n+1+\beta)}{2n+2+\alpha+\beta} P_n^{(\alpha,\beta)}(x). \quad (50)$$

4. Otros ejemplos

Los ejemplos de la sección anterior son los más importantes. A partir de ellos se pueden construir otros ejemplos menos conocidos o desconocidos. En primer lugar se considera la posibilidad de modificar la dependencia en el entero n de alguna familia de ecuaciones. Para ello, en las ecuaciones anteriores se sustituye la constante, dependiente de n, por una función más general del entero n. A continuación se supone la existencia de los operadores de escalera y se les sujeta a las condiciones necesarias (17) a (26). Se encuentran relaciones discretas de recurrencia entre las constantes dependientes del parámetro n, las cuales son todas linealizables. El resultado general es la posibilidad de cambiar en la ecuación diferencial el entero n por $n + q$, donde q es una constante cualquiera. Este resultado permite renumerar la familia a partir de otro origen cuando q es un entero. El resultado permite también interpolar para valores no enteros, que se incrementan por números enteros. Veremos dos ejemplos más interesantes.

Cuando se aplica este esquema a la ecuación de Bessel

$$\frac{d^2 y_n(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy_n(x)}{dx} + \left(1 - \frac{N(n)}{x^2}\right) y_n(x) = 0, \tag{51}$$

se llega a encontrar

$$k_n = -1, \qquad c_n = 0, \tag{52}$$

y se demuestra la ecuación no lineal en diferencias para la función $N(n)$

$$1 = 2N(n+1) + 2N(n) - [N(n+1) - N(n)]^2. \tag{53}$$

Ésta se linealiza por el siguiente procedimiento. Se incrementa n a $n+1$ en esa ecuación y se resta de la misma ecuación. Se obtiene otra ecuación en diferencias la cual se factoriza en

$$0 = [N(n+2) - N(n)][2 - N(n+2) + 2N(n+1) - N(n)], \tag{54}$$

y el segundo factor es el interesante que nos lleva a la iteración lineal

$$N(n+2) + 2N(n+1) - N(n) = 2, \tag{55}$$

cuya solución general es [7]

$$N(n) = n^2 + n[N(1) - N(0) - 1] + N(0), \tag{56}$$

pero la constante $N(1)$ depende de $N(0)$ por el valor $n = 0$ de la Ec. (53):

$$1 = 2N(1) + 2N(0) - [N(1) - N(0)]^2, \tag{57}$$

para dar finalmente

$$N(n) = \left[n + \sqrt{N(0)}\right]^2. \tag{58}$$

El cálculo de los operadores de escalera da entonces los operadores de ascenso

$$\left(\frac{d}{dx} - \frac{n+\sqrt{N(0)}}{x}\right) y_n(x) = -y_{n+1}(x) \tag{59}$$

y de descenso

$$\left(\frac{d}{dx} + \frac{n+1+\sqrt{N(0)}}{x}\right) y_{n+1}(x) = y_n(x). \tag{60}$$

En resumen, se han obtenido ecuaciones similares a las de la ecuación de Bessel de índice entero, excepto por la sustitución dondequiera del entero n por el real $n + \sqrt{N(0)}$.

De las funciones con índice no entero las más frecuentes son las de índice semientero, para las cuales

$$N(0) = 1/4. \tag{61}$$

Los operadores de escalera, de ascenso

$$\left(\frac{d}{dx} - \frac{n+1/2}{x}\right) J_{n+1/2}(x) = -J_{n+3/2}(x), \tag{62}$$

y de descenso

$$\left(\frac{d}{dx} + \frac{n+3/2}{x}\right) J_{n+3/2}(x) = J_{n+1/2}(x). \tag{63}$$

Otro caso de interés para el cual interesan los valores semienteros es el de la ecuación de Legendre con índice no entero:

$$(x^2-1)^2 \frac{d^2 y_n(x)}{dx^2} + 2x(x^2-1)\frac{dy_n(x)}{dx} - N(n)(x^2-1)y_n(x) = 0, \tag{64}$$

donde se ha sustituido la constante $n(n+1)$ por la función más general $N(n)$.

Una solución similar a la que se hizo con la ecuación de Bessel nos lleva a obtener la existencia de operadores de escalera cuando

$$c_n = 0, \qquad k_n = -\left(\frac{N(n+1)-N(n)}{2}\right)^2 \tag{65}$$

y

$$N(n) = (n+\alpha)(n+1+\alpha), \tag{66}$$

donde α es la constante de integración de la ecuación en diferencias. De esta ecuación se encuentra

$$k_n = -(n+1+\alpha)^2. \tag{67}$$

Los operadores de escalera de ascenso

$$\left[(x^2-1)\frac{d}{dx} + (n+\alpha+1)x\right] y_n(x) = (n+\alpha+1)y_{n+1}(x), \tag{68}$$

y descenso

$$\left[(x^2-1)\frac{d}{dx} - (n+\alpha+1)x\right] y_{n+1}(x) = -(n+\alpha+1)y_n(x). \tag{69}$$

En este caso se ve que los operadores de escalera fueron modificados en las funciones u_n y d_{n+1}, como en la generalización de la ecuación de Bessel, pero ahora se afectan también las constantes A_n y B_{n+1}.

El caso $\alpha = 1/2$ es importante porque da lugar a las funciones anillo o toroidales (véase Ref. [4], pág. 75 o Ref. [8], pág. 433).

Los operadores de escalera resultan en los operadores de ascenso

$$\left[(x^2-1)\frac{d}{dx} + (n+3/2)x\right] P_{n+1/2}(x) = (n+3/2)P_{n+3/2}(x), \tag{70}$$

y descenso

$$\left[(x^2-1)\frac{d}{dx} - (n+3/2)x\right] P_{n+3/2}(x) = -(n+3/2)P_{n+1/2}(x). \tag{71}$$

En muchas ocasiones la familia de funciones $y_n(x)$ aparece en las aplicaciones con un factor común $f(x)$ para todos los elementos de la familia $f(x)y_n(x)$. Las nuevas funciones tienen los operadores de escalera de ascenso

$$\left[\sqrt{P(x)}\frac{d}{dx} + u_n(x) - \sqrt{P(x)}\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}\right] f(x)y_n(x) = A_n f(x)y_{n+1}(x), \tag{72}$$

y de descenso

$$\left[\sqrt{P(x)}\frac{d}{dx} + d_{n+1}(x) - \sqrt{P(x)}\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}\right] f(x)y_n(x) = B_{n+1} f(x)y_n(x). \tag{73}$$

La presencia del factor $f(x)$ en todas las funciones afecta los operadores de escalera únicamente en el mismo sumando independiente de n de las funciones $u_n(x)$ y $d_{n+1}(x)$.

Por ejemplo, las funciones esféricas de Bessel, asociadas a la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 j_n(x)}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dj_n(x)}{dx} + \left(1 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right) j_n(x) = 0, \tag{74}$$

tienen los operadores de escalera de ascenso

$$\left(\frac{d}{dx} - \frac{n}{x}\right) j_n(x) = -j_{n+1}(x), \tag{75}$$

y de descenso

$$\left(\frac{d}{dx} + \frac{n+2}{x}\right) j_{n+1}(x) = j_n(x), \tag{76}$$

que se pueden obtener de los operadores (62) y (63) por medio de la identificación

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x). \tag{77}$$

En las Refs. [2] y [3] se han presentado operadores de escalera para las funciones de Hermite y Laguerre, los cuales son operadores de segundo orden que no dependen del índice n. Éstos se obtienen de cancelar el factor lineal en n del operador de escalera con el término lineal en n de la ecuación diferencial. Y viceversa, a partir de los operadores de escalera de dichos autores se pueden obtener otros operadores de primer orden si cancelamos el término de segundo orden del operador de escalera con el de segundo orden de la ecuación diferencial.

Agradecimientos

La versión final de este trabajo se escribió en una estancia sabática en el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Estado de México. Agradezco la hospitalidad del TEC, y en especial al Dr. Pedro L. Grasa por el tiempo concedido para este estudio.

Referencias

1. L. Infeld y T.E. Hull, *Rev. Mod. Phys.* **23** (1951) 21.
2. J. Morales, J.J. Peña, M. Sánchez, y J. López-Bonilla, *Int. J. Quantum Chem.* **S25** (1991) 155.
3. J. Morales, J.J. Peña, y J. López-Bonilla, *Phys. Rev.* **A45** (1992) 4259.
4. W. Magnus y F. Oberhettinger, *Functions of Mathematical Physics*, Chelsea, New York (1954).
5. A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger y F.G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, Bateman Manuscript Project, Mc Graw Hill, New York (1953).
6. M. Abramowitz y I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York (1965).
7. Ch. Jordan, *Calculus of Finite Differences*, Chelsea, New York (1965).
8. E.W. Hobson, *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, Chelsea, New York (1965).