*Revista Mexicana de Física* **42**, *No. 1 (1996) 24–32*

# Universo inflacionario: soluciones estacionarias exactas de la ecuación de Starobinsky

MAURICIO BELLINI* Y PABLO SISTERNA†
*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales*
*Universidad Nacional de Mar del Plata*
*Funes 3350, (7600) Mar del Plata, Buenos Aires, Argentina*

Recibido el 4 de abril de 1995; aceptado el 9 de agosto de 1995

RESUMEN. En este trabajo se estudian soluciones estacionarias para probabilidades de transición, en la ecuación de difusión de Starobinsky, dentro del marco del tratamiento estocástico del modelo inflacionario del universo con rodadura lenta del campo escalar.

ABSTRACT. Within the framework of the stochastic treatment of the inflationary model of the universe with a slow rolling scalar field, we study stationary solutions of the Starobinsky diffusion equation for the transition probabilities.

PACS: 9.80.Hw; 4.60.Gw

## 1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años mucha gente ha trabajado en el tratamiento estocástico de modelos inflacionarios del Universo [1–5, 9]. Una de las propiedades más importantes de la cosmología inflacionaria es el proceso de autorreproducción incesante de dominios que conduce a una eterna evolución inflacionaria del Universo. Este proceso divide al mismo en muchos dominios desconectados causalmente unos de otros, creciendo exponencialmente con toda variedad de rupturas de simetría y compactificaciones del espacio-tiempo compatibles con la inflación. La estructura global del Universo se describe mediante la distribución de probabilidad $P_c(\varphi, t)$ de encontrar un campo dado $\varphi$ en un instante $t$, en un punto dado, o bien, mediante $P_p(\varphi, t)$ que es la distribución de probabilidad de encontrar un campo dado $\varphi$ en un tiempo $t$, en un punto dado, con un volúmen físico determinado.

En la siguiente sección consideraremos la ecuación de movimiento para un campo escalar fluctuante, y a partir de ella obtendremos soluciones estacionarias para $P_c(\varphi)$, de la ecuación de difusión de Starobinsky para teorías con $V(\varphi) = a\varphi^n$. En la Sec. 3 obtendremos soluciones exactas para la ecuación de Focker-Planck en la versión de Starobinsky para $P_p(\varphi)$ en teorías ya consideradas por otros autores [6, 10, 13]. En la Sec. 4, a partir de los tiempos propios $\tau$ de miniuniversos introducidos por Linde [15], estudiaremos soluciones estacionarias para distribuciones de probabilidad $P_p(\varphi, \tau)$ en la ecuación de difusión de Starobinsky.

* Correo e: bellini@uni.mdp.edu.ar.
† Correo e: sisterna@uni.mdp.edu.ar.

## 2. Ecuación de campo y ecuación de Starobinsky

Consideremos un campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad, con una lagrangiana

$$L = \tfrac{1}{16\pi} R + \tfrac{1}{2}\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi), \tag{1}$$

donde $G = M_p^{-2} = 1$ es la constante gravitacional y $R$ es la curvatura escalar. La ecuación clásica de movimiento para $\varphi$ será

$$\ddot{\varphi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} - \frac{1}{a^2}\Delta\varphi = -\frac{dV}{d\varphi}, \tag{2}$$

donde el laplaciano $\Delta$ está en un espacio tridimensional con una métrica independiente del tiempo dada por la expresión

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\,(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2). \tag{3}$$

Si consideramos que el valor clásico del campo escalar $\varphi$ en un dominio dado, es suficientemente uniforme y que varía suavemente,[1] se obtiene

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{3H}\frac{dV}{d\varphi}. \tag{4}$$

La Ec. (4) describe el movimiento clásico del campo para un dominio con un potencial escalar $V(\varphi)$ y un parámetro de Hubble $H(\varphi)$. En la aproximación adiabática [hipótesis de deslizamiento muy suave del campo escalar $\varphi$ a través del potencial $V(\varphi)$] $H(\phi)$ y $V(\phi)$ están relacionadas por la expresión

$$H^2(\varphi) = \frac{8\pi}{3M_p^2}V(\varphi). \tag{5}$$

El efecto de las fluctuaciones cuánticas se puede asociar a una fuerza estocástica gaussiana $\xi(t)$ que actúa sobre el campo clásico "ambiente". La evolución del campo se podrá escribir en la forma de una ecuación de Langevin

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{3H}\frac{dV}{d\varphi} + \frac{H^{3/2}}{4\pi}\xi(t). \tag{6}$$

Supondremos $\langle\xi(t)\rangle = 0$, $\langle\varphi(t)\,\xi(t)\rangle = 0$, $\langle\xi(t)\,\xi(t')\rangle = 2D\,\delta(t-t')$, donde $D = \frac{H^3(\varphi)}{8\pi^2}$ es el coeficiente de difusión.

[1] Esto implica que $(\Delta\varphi)^2 \ll V$ y $\ddot{\varphi} \ll \frac{dV}{d\varphi}$.

La Ec. (6) para el campo escalar $\varphi$ estará asociada a una de Fokker-Planck para distribuciones de probabilidad $P_c(\varphi, t)$. Discutiremos a continuación las soluciones estacionarias, asociadas a la ecuación más general de Fokker-Planck para $P_c$, dada por la expresión

$$\frac{\partial P_c}{\partial t} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3\pi}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ V^{3/2(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial \varphi}(V^{3/2\beta} P_c) + \frac{3V'}{8V^{1/2} P_c} \right]. \tag{7}$$

Esta ecuación nos da información acerca de la distribución de dominios (sin tener en cuenta su volumen) con diferentes valores del campo $\varphi$.

En un trabajo reciente [15] se consideró como solución estacionaria a esta ecuación el caso $J_\varphi = 0$, donde la corriente de probabilidades $J_\varphi$ es[2]

$$J_\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3\pi}} \left[ V^{3/2(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial \varphi}(V^{3/2\beta} P_c) + \frac{3V'}{8V^{1/2}} P_c \right]. \tag{8}$$

Consideremos ahora el caso $J_\varphi = C$, donde $C \geq 0$ es una constante cualquiera. El motivo por el que vale la pena considerar este tipo de soluciones es que $J_\varphi = 0$ sólo brinda una solución particular al problema, dado que la ecuación se aplica en el intervalo inflacionario del campo escalar[3] donde las soluciones con flujo de probabilidad no nulo pueden ser de interés.

La solución general de (8) (para $V(\varphi) = a\varphi^n$ y $\phi = \varphi^{-n}$) está dada por la expresión (para $M_p = 1$)

$$P_c(\varphi) \propto V^{-3/2\beta} e^{\frac{3}{8V}} \left[ 1 - \frac{1}{n} C \frac{3\sqrt{3\pi}}{2\sqrt{2}} \int_{\varphi_0}^{\varphi_f} d\varphi\, \varphi^{\frac{3/2\beta n^2 - (n+1)}{n}} e^{-\frac{3}{8a}\varphi} \right]. \tag{9}$$

Obsérvese que el caso $\beta = 0$ con $C = 0$ es la raíz cuadrada de la función de onda del universo, obtenida por Hartle y Hawking [6], y coincide con la distribución de probabilidad que se obtiene a partir de esta última. Un ejemplo interesante a considerar es el caso $\beta = 1/2$ y $n = 2$. La solución general para éste estará dada por la expresión cerrada

$$P_c(\varphi) \propto \left[ e^{-3/4} \varphi^{-3/2} e^{\frac{3}{8a}\varphi^{-2}} + \frac{4C}{3} a^{1/4} \frac{3\sqrt{3\pi}}{2\sqrt{2}} \varphi^{-3/2} \right] \Bigg|_{\varphi_e < \varphi < \varphi_p} \tag{10}$$

Nótese que la distribución de probabilidades en este caso tiende a infinito cuando $\varphi \to 0$. Esto significa que no hay soluciones estacionarias en el contexto de inflación estocástica con rodadura lenta. Sólo para el caso particular $\beta = 0$ no tendremos este problema y $P_c(\varphi)$ estará bien definida en el dominio físico. En general requeriremos que $V(\varphi_e) \neq 0$ para tener una $P_c$ bien definida en el intervalo de interés $\varphi_e < \varphi < \varphi_p$.

---

[2] $\beta$ es un parámetro que varía en el intervalo $0 \leq \beta \leq 1$.

[3] El estadío inflacionario se desarrolla en el intervalo $\varphi_e \leq \varphi \leq \varphi_p$, donde $\varphi_e$ es el valor del campo escalar para el cual $V(\varphi_e)$ es un mínimo absoluto, y $\varphi_p$ es el valor del campo para el cual $V(\varphi_p) = M_p$.

## 3. SOLUCIONES ESTACIONARIAS PARA $P_p(\varphi)$

En esta sección, y siempre en la aproximación adiabática [véase Ec. (5)], estudiaremos la ecuación de Starobinsky para $P_p(\varphi, t)$ en la versión de Stratonovich, que está dada por la expresión

$$\partial_t P_p = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{V'}{3H}P_p + \frac{1}{8\pi^2}H^{3/2}\frac{\partial}{\partial\varphi}H^{3/2}P_p\right) + 3(H - \langle H\rangle)P_p, \tag{11}$$

donde $\langle H\rangle = \int d\varphi\, H(\varphi)P_p(\varphi, t)$. Esta ecuación sólo difiere de la misma para $P_c$ en que esta última no tiene el último término. Soluciones estacionarias normalizables de (11), fueron consideradas por Y. Nambu y M. Sasaki [10], pero sin poder hallar expresiones exactas. En su trabajo mapean la ecuación de difusión anterior en una de Schrödinger para $\psi(y)$, utilizando un potencial escalar $V(\varphi) = \frac{\lambda}{2n}M_p^2(\frac{\varphi}{M_p})^{2n}$, esto es,

$$-\frac{\partial\psi}{\partial v} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + U(y)\,\psi, \tag{12}$$

donde

$$\begin{aligned} x &= \frac{\varphi}{M_p}, & u &= \frac{M_p}{8\pi^2}\left(\frac{4\pi\lambda}{3n}\right)^{3/2} t, \\ y &= x^{-(3n-2)/2}, & v &= \left(\frac{3n-2}{2}\right)^2 u, \\ P_p(x) \to \tilde{P}(y) &= \frac{2}{3n-2}x^{3n/2}\,P_p(x), & \psi(y, v) &= e^{-\frac{3n}{8\lambda}y^{4n/(3n-2)}}\,\tilde{P}(y, v). \end{aligned} \tag{13}$$

La Ec. (12) es una ecuación del tipo Schrödinger con autovalores nulos de energía y un potencial efectivo $U(y)$ dado por la expresión (para $\langle f(y)\rangle = \int dy\, f(y)\,\tilde{P}(y)$)

$$\begin{aligned} U(y) &= \frac{3n^2(n+2)}{2\lambda(3n-2)^2}y^{(-2n+4)/(3n-2)} + \frac{9n^4}{4\lambda^2(3n-2)^2}y^{(2n+4)/(3n-2)} \\ &\quad -\frac{72\pi n}{\lambda(3n-2)^2}\,y^{-2n/(3n-2)} + E, \\ E &= \frac{72\pi n}{\lambda(3n-2)^2}\langle y^{-2n/(3n-2)}\rangle. \end{aligned} \tag{14}$$

Consideremos el caso $n = 2$, para el cual el potencial efectivo adopta la forma

$$U(y) = \frac{3}{2\lambda} + \frac{9}{4\lambda^2}y^2 - 9\pi y^{-1} + E, \tag{15}$$

donde $E$ está dado por la expresión

$$E = 9\pi \left\langle \frac{1}{y} \right\rangle, \qquad \left\langle \frac{1}{y} \right\rangle = \int_{\delta=\sqrt{\frac{2\lambda}{3}}}^{\infty} \frac{dy}{y}\, \tilde{P}(y). \tag{16}$$

El autoestado correspondiente a este potencial está dada por

$$\psi_f \propto y \left( y - \sqrt{\frac{2\lambda}{3}} \right) e^{-\frac{3}{4\lambda} y^2}, \tag{17}$$

y su correspondiente autovalor de energía será

$$E_f = \frac{9}{\lambda} \left( 1 + \pi \left\langle \frac{1}{y} \right\rangle \right), \tag{18}$$

donde las relaciones de consistencia entre coeficientes exigen

$$2 \left( \frac{3}{2\lambda} \right)^{1/2} = 9\pi \quad \rightarrow \quad \lambda \approx 0.0075. \tag{19}$$

Si calculamos $\langle \frac{1}{y} \rangle = \frac{\lambda}{3}$, obtenemos para $E_f$

$$E_f = \frac{9}{\lambda} \left( 1 + \frac{\lambda}{3} \right). \tag{20}$$

Esto significa que $P_p(x)$ estará dada por

$$P_p(x) \propto 2x^{-5} \left( x^{-2} - \sqrt{\frac{2\lambda}{3}} \right). \tag{21}$$

Un tratamiento alternativo que también involucra soluciones estacionarias para la distribución de probabilidades $P_c(\varphi, t)$, es el considerado por Mijić [13]:

$$\frac{\partial P_c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{V'(\varphi)}{3H(\varphi)} P_c \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{1}{2} \frac{H^3}{4\pi^2} P_c \right). \tag{22}$$

En su trabajo considera una expansión de la distribución de probabilidades $P_c$ en un conjunto de automodos ortogonales del operador de Fokker-Planck, para considerar el decaimiento de sus contribuciones en el tiempo:

$$P_c(\varphi, t) = \sum_{\lambda} e^{-\lambda(t-t_0)}\, C_\lambda(\varphi_o)\, P_\lambda(\varphi). \tag{23}$$

Esos modos obedecen a las relaciones de ortogonalidad

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_{\varphi_e}^{\varphi_p} d\varphi \, P_s^{-1} \, P_1 P_2 = P_s^{-1} (P_1 J_2 - P_2 J_1) \big|_e^p. \tag{24}$$

Un reescaleo de los modos $P_\lambda = P_s q_\lambda$ conduce a la ecuación de Fokker-Planck

$$-\lambda q_\lambda = \tfrac{1}{2} \sigma q_\lambda'' - f q_\lambda', \tag{25}$$

donde (para la teoría $V(\varphi) = \frac{g}{4}\varphi^4$):

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= \frac{V'(\varphi)}{3H(\varphi)}, \\ \sigma(\varphi) &= \frac{H^3(\varphi)}{4\pi^2} = \frac{\varphi^6}{128\pi} \left( \frac{8\pi g}{3M_p^2} \right)^{3/2}, \\ P_s(\varphi) &= \left( \frac{V(\varphi_0)}{V(\varphi)} \right)^{3/2} e^{\frac{3}{8G^2} \left( \frac{1}{V(\varphi)} - \frac{1}{V(\varphi_0)} \right)}. \end{aligned} \tag{26}$$

La última de las Ecs. (26) nos da la distribución estacionaria de probabilidades para una corriente asociada nula ($J_\varphi = 0$). Un nuevo cambio de variables $dy = d\varphi (\frac{2}{\sigma(\varphi)})^{1/2}$, seguido de otro más $\tilde{y} = \sqrt{M}\, y$, posibilita obtener una ecuación del tipo Schrödinger para $\rho_\lambda(\tilde{y})$:

$$\rho'' - \left[ \tfrac{4}{25} y^2 - \tfrac{3}{16} y^{-2} - \left( 1 + \frac{\lambda}{M} \right) \right] \rho = - \left( - \frac{\lambda}{M} \right) \rho. \tag{27}$$

Éste es un potencial polinómico cuasi exactamente soluble [8] que tiene como solución $\rho_f$ a

$$\rho_f \propto y^{3/4} \, e^{-\frac{y^2}{5}}, \tag{28}$$

asociada a un autovalor de energía

$$E_f = -\frac{\lambda}{M}. \tag{29}$$

Obsérvese que $\rho_{f_{\varphi \to 0}} \to \infty$ y $\rho_{f_{\varphi \to \infty}} \to 0$, lo que significa que $\rho_f$ no es normalizable en en el intervalo $0 \leq \varphi \leq \varphi_p$. Aquí sucede lo mismo que en caso de la Ec. (10) en el que no se puede normalizar la distribución de probabilidades, por lo que no tendremos una solución estacionaria en el contexto de inflación estocástica con rodadura lenta para este tipo de teorías.

## 4. TIEMPOS PROPIOS DE LOS DISTINTOS DOMINIOS

Consideremos ahora el factor de escala inicial del universo $a(x^{(i)}, t)$, asociado a un dominio denotado con la letra $i$, que evoluciona desde $t = 0$. La evolución de este factor de escala, estará caracterizada por la ecuación

$$a(x^{(i)}, t) = a(x^{(i)}, 0)\, e^{\int_0^t H[\varphi(x^{(i)}, t')]\, dt'} \tag{30}$$

Podemos definir coordenadas temporales propias $\tau^{(i)}$ de un dominio determinado $i$, dadas por

$$\tau^{(i)} = \ln \frac{a(x^{(i)}, t)}{a(x^{(i)}, 0)} = \int_0^t H[\varphi(x^{(i)}, t')]\, dt'. \tag{31}$$

Esto significa que un conjunto de miniuniversos con un mismo potencial escalar $V(\varphi)$ evolucionarán con tiempos propios iguales (para un dado tiempo coordenado $t$). Las longitudes de onda propias de las perturbaciones $\lambda_c^{(i)} = H^{-1} \exp\{-\int_0^t dt'\, H[\varphi(x^{(i)}, t')]\}$, caracterizarán a dominios con un mismo $V(\varphi) \propto H^2$. En particular consideremos un conjunto de dominios, caracterizados por un tiempo propio $\tau^{(i)}$, y un potencial escalar $V(\varphi)$. Dado que

$$\frac{d}{d\tau}\langle \varphi^2 \rangle = \frac{H^2[\varphi(x^{(i)}, t)]}{4\pi^2}, \tag{32}$$

y que la evolución del campo clásico $\varphi$ para ese conjunto de dominios es

$$\frac{d}{d\tau}\varphi = -\frac{V'(\varphi)}{3H^2(\varphi)}, \tag{33}$$

la distribución de probabilidades estará descripta por la bien conocida ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial P_c(\varphi, \tau^{(i)})}{\partial \tau^{(i)}} = \frac{1}{3\pi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( V^{1-\beta}(\varphi)\, \frac{\partial (V^{\beta}(\varphi)\, P_c(\varphi, \tau^{(i)}))}{\partial \varphi} + \frac{3V'(\varphi)}{8V(\varphi)}\, P_c(\varphi, \tau^{(i)}) \right), \tag{34}$$

donde ahora nuestro coeficiente de difusión será $D = \frac{H^2}{8\pi^2}$. Una de las ventajas de escribir las distribuciones de probabilidad $P_c$ en función del tiempo parametrizado $\tau^{(i)}$ es que la solución para $P_p[\varphi(x^{(i)}, \tau^{(i)})]$ queda inmediatamente determinada mediante la expresión

$$P_p[\varphi(x^{(i)}, t)] = P_c[\varphi(x^{(i)})]\, e^{3\tau^{(i)}} \tag{35}$$

Sin embargo, ahora $P_p$ habrá de interpretarse de un modo diferente. Es la distribución global de miniuniversos (o dominios) con un dado potencial escalar $V(\varphi)$ y a un dado tiempo $\tau^{(i)}$, pero ahora no sincronizado.

La solución general para una corriente $J_\varphi = C$ $(C > 0)$, viene dada por

$$P_c[\varphi(x^{(i)})] \propto H^{-2\beta} e^{-\frac{2\pi}{3}\int^{\varphi} H^{-3}\,d\varphi'} \left[1 + 2\pi C \int^{\varphi} d\varphi'\, H^{2(\beta-1)}\, e^{\frac{2\pi}{3}\int^{\varphi'} H^{-3}\,d\varphi''}\right]\Bigg|_{H_e}^{H_p}, \quad (36)$$

donde $H_e = H(\varphi_e)$ y $H_p = H(\varphi_p)$. Obsérvese que para $\beta \neq 0$ la distribución $P_c[\varphi(x^{(i)})]$ no es normalizable y por consiguiente no habrá distribuciones estacionarias, al igual que ocurría en el caso de distribuciones asociadas al tiempo cósmico $t$.

LLamemos $\varphi_p$ al valor del campo escalar en la escala de Planck donde comienza la inflación. Es evidente, de la ecuación de evolución para el campo clásico, que éste disminuye conforme transcurre la inflación. Un dominio dejará de crecer exponencialmente cuando su valor de campo sea $\varphi_e$.[4] Supondremos [15] que no puede haber inflación si $V(\varphi) > M_p^4 = 1$.

### *4.1. Condiciones de contorno*

Respecto a las condiciones de contorno para $P_c$ y $P_p$, en principio tomaremos corrientes de probabilidades tales que

$$J(\varphi) = C \geq 0, \quad (37)$$

donde $C$ es una constante finita tal que deberá cumplirse la convencional condición de contorno:

$$P_c(\varphi) \geq 0 \quad \text{para} \quad \varphi_e \leq \varphi \leq \varphi_p. \quad (38)$$

Esto es, la distribución de probabilidades debe ser positiva en todo el dominio físico donde se desarrolla la inflación. Por supuesto, $P_p$ también deberá ser positiva en todo el dominio físico:

$$P_p(\varphi) \geq 0 \quad \text{para} \quad \varphi_e \leq \varphi \leq \varphi_p. \quad (39)$$

## 5. CONCLUSIONES

Hemos visto como en el modelo estocástico inflacionario en la aproximación de rodadura lenta, es posible obtener soluciones estacionarias normalizables exactas para la ecuación de difusión de probabilidades $P_c$, asociadas a corrientes de probabilidades no nulas. El problema de las soluciones estacionarias para $P_c$ y $P_p$ está aún abierto, y ha sido discutido por otros autores [10, 13, 15]. La imposibilidad de normalizar ciertas distribuciones $P_c$ y $P_p$ surge de que, para ciertos potenciales,[5] éstas no están bien definidas en el valor del campo para el cual finaliza la inflación $\varphi = \varphi_e$ cuando $\beta \neq 0$.

---

[4] $V(\varphi_e)$ es un mínimo absoluto, donde $\varphi_e < \varphi_p$, y la inflación se desarrollará en el intervalo $\varphi_e < \varphi < \varphi_p$.

[5] Esto no sucede en teorías tales como $V(\varphi) = \alpha e^{m\varphi}$, para las cuales el potencial escalar $V(\varphi)$ no es nulo en su mínimo absoluto.

Por otro lado, cada dominio evoluciona con un tiempo propio o característico $\tau^{(i)}$ diferente, asociado a su parámetro de Hubble $H(\varphi)$ y no sincronizado. Bajo una descripción como ésta, las hipersuperficies $\tau^{(i)} = \text{cte}$ no solamente difieren completamente de aquéllas con $t = \text{cte}$, sino que pueden tener características fractales y aleatorias. Luego, desde el punto de vista de $\tau^{(i)}$, la ecuación de Starobinsky para $P_p$ ahora tendrá un significado completamente diferente, siendo ahora difícil establecer una visión global del Universo. En virtud de esto puede concluirse, fundamentalmente, cuán peculiares o no pueden ser los dominios que están próximos a regiones de escape de la inflación.

REFERENCIAS

1. A.H. Guth and S.-Y. Pi, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 1110.
2. S.W. Hawking, *Phys. Lett.* **115B** (1982) 295.
3. A.A. Starobinsky, *Phys. Lett.* **117B** (1982) 175; *Phys. Lett.* **19** (1974) 183; *Rep. Progr. Phys.* **42** (1979) 389.
4. A.D. Linde, *Rep. Prog. Phys.* **B108** (1982) 389.
5. A. Albrecht and P.J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1220; A.H. Guth and P.J. Steinhardt, *Sci. Am.* (May 1984) 90.
6. J.B. Hartle and S.W. Hawking, *Phys. Rev.* **D28** (1983) 2960.
7. L. Salem and R. Montemayor, *Phys. Rev.* **A43** (1991) 1169.
8. R. Montemayor and L. Salem, *Phys. Rev.* **A44** (1991) 7037.
9. A.A. Starobinsky, in *Fundamental interacctions* [in Russian], MGPI, Moscow (1984) p. 55.
10. Y. Nambu and M. Sasaki, *Phys. Lett.* **B219** (1989) 240.
11. A.D. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, Harwood, Chur, Switzeland (1990).
12. García Bellido, A.D. Linde, D.A. Linde, *Phys. Rev.* **D50** (1994).
13. M. Mijić, *Physical Rev.* **D42** (1990) 2469.
14. A. Linde and D. Linde, *Phys. Rev.* **D50** (1994) 2456.
15. A. Linde, D. Linde and A. Mezhlumian, *From the big bang theory to the theory of a stationary universe*, preprint SU-ITP-93-13.