

Mapeo en una mecánica cuántica SUSY para la ecuación de Dirac en $D = 1 + 1$

M. BELLINI*, R.R. DEZA†

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de Mar del Plata
Funes 3350-(7600) Mar del Plata, Buenos Aires, Argentina*

Y

R. MONTEMAYOR‡

*Centro Atómico Bariloche e Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
E. Bustillo 9500, (8400) S.C. de Bariloche, Río Negro, Argentina*

Recibido el 13 de enero de 1995; aceptado el 29 de septiembre de 1995

RESUMEN. Aprovechando el mapeo existente entre el hamiltoniano de Dirac en $1 + 1$ dimensiones y uno supersimétrico cuyas componentes son hamiltonianos de Schrödinger, se estudian las condiciones de resolubilidad en mecánica cuántica de sistemas fermiónicos, mediante el método de Riccati modificado.

ABSTRACT. Exploiting the mapping between the Dirac Hamiltonian in $1 + 1$ dimensions and a supersymmetric one whose components are Schrödinger Hamiltonians, we study the solvability conditions for the Quantum Mechanics of fermionic systems through the modified Riccati method.

PACS: 03.65.-w; 03.65.Ge

1. INTRODUCCIÓN

El número de ecuaciones de Schrödinger que tienen soluciones analíticas es pequeño. Sin embargo, utilizando el método de Riccati modificado en el contexto de la ecuación de Schrödinger es posible ampliar el espectro de soluciones analíticas. Por otro lado, la ecuación de Dirac en $D = 1 + 1$ (una sola dimensión espacial) da lugar a un par de ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas para las componentes del bispinor. En el caso de soluciones estacionarias, estas ecuaciones se desacoplan en dos de segundo orden del tipo de Schrödinger, que pueden interpretarse definiendo un hamiltoniano supersimétrico [1-3]. Cada una de las componentes del bispinor pasa a ser componente de la función de onda supersimétrica. A partir de este punto es inmediato establecer las condiciones de resolubilidad [4], que se caracterizan en forma muy compacta bajo la condición de invariancia de forma supersimétrica [5].

* Correo electrónico: mbellini@uni-mdp.edu.ar.

† Correo electrónico: deza@uni-mdp.edu.ar.

‡ Investigador del CONICET. Correo electrónico: montemay@cab.cnea.edu.ar.

Pero ésta no es la única información que se puede obtener de la relación entre la ecuación de Dirac y la mecánica cuántica supersimétrica (SUSY). El concepto usual de hamiltoniano resoluble implica tener expresiones cerradas para el conjunto completo de autofunciones y autovalores. Existe una categoría más amplia de hamiltonianos, los denominados cuasiexactamente resolubles, que tienen sólo un subconjunto de su espacio de estados expresable en forma cerrada. En el contexto de la mecánica cuántica no relativista pueden ser estudiados y clasificados con relativa facilidad en base a una ecuación de Riccati modificada para la derivada logarítmica de la función de onda [6]. Como las soluciones para espinores relativistas en $1 + 1$ están directamente relacionadas con las soluciones de una ecuación de Schrödinger en una dimensión (componente de un hamiltoniano SUSY), el método de Riccati modificado puede fácilmente ser extendido para su análisis y utilizado para el cálculo de los autoestados fermiónicos en la ecuación de Dirac en $1 + 1$.

Posteriormente mostraremos la relación entre la ecuación de Dirac y la ecuación de Schrödinger en $1 + 1$. A partir de allí, en la segunda sección, haremos el análisis de resolubilidad para la ecuación de Dirac, para luego desarrollar algunos ejemplos simples. En particular sólo consideraremos términos de interacción dados por una densidad $V(x)$ unidimensional y no ahondaremos en otro tipo de interacciones, tales como densidades de potenciales asociadas a campos escalares $V(\varphi(x))$, campos complejos o densidades de potenciales asociadas a la interacción de un campo electromagnético con una corriente externa $J(x)$.

Dada la ecuación de Dirac en $1 + 1$

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - V(x))\psi(x) = 0, \quad (1)$$

consideraremos la siguiente representación para la matrices γ^0 y γ^1 :

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^1 &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

En $1 + 1$ la parte real e imaginaria de cada una de las componentes de los espinores

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

sólo difieren en un factor de fase. Esto se debe a que en la ecuación de Dirac en una dimensión no hay términos imaginarios. Las soluciones de (1) con energía ω pueden escribirse $\psi(x, t) = e^{i\omega t} \chi(x)$, con lo cual la ecuación de Dirac da lugar a un par de ecuaciones de movimiento acopladas para las componentes del espinor,

$$\begin{aligned} (\partial_x - V)\chi_1 &= i\omega\chi_2, \\ (\partial_x + V)\chi_2 &= -i\omega\chi_1, \end{aligned} \quad (4)$$

que pueden reducirse a un par de ecuaciones de Schrödinger unidimensionales desacopladas

$$[-\partial_x^2 - (V' - V^2)]\chi_1 = \omega^2\chi_1, \tag{5}$$

$$[-\partial_x^2 + (V' + V^2)]\chi_2 = \omega^2\chi_2. \tag{6}$$

Los operadores correspondientes pueden considerarse como las componentes de un hamiltoniano supersimétrico

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} QQ^+ & 0 \\ 0 & Q^+Q \end{pmatrix}, \tag{7}$$

donde las cargas SUSY son

$$Q = -i(\partial_x - V), \tag{8}$$

$$Q^\dagger = -i(\partial_x + V). \tag{9}$$

De las Ecs. (4) se sigue que las cargas Q y Q^\dagger inducen transformaciones entre el “sector bosónico” (χ_1) y el “sector fermiónico” (χ_2). Además satisfacen el álgebra [7, 8, 10]

$$\frac{1}{2}\{Q, Q^\dagger\} = H, \quad \{Q, Q\} = 0, \quad \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0, \quad [Q^\dagger, H] = [Q, H] = 0. \tag{10}$$

Así, las ecuaciones de Schrödinger (5) y (6) corresponden a un par de sistemas isoespectrales (tienen los mismos niveles de energía excepto por un estado base con $\omega = 0$). Además, conocido el espacio de Hilbert de uno de ellos, el otro puede construirse fácilmente a partir de él aplicando un operador diferencial de primer orden. De esta forma, la solución de la ecuación de Dirac en 1+1 con un potencial V está íntimamente relacionada con la solución de la ecuación de Schrödinger 1D con un potencial $U_\pm = V^2 \pm V'$.

2. CONDICIONES DE RESOLUBILIDAD Y APLICACIONES

Es interesante extender el método de Riccati modificado, ya aplicado [7, 8, 10] a una ecuación tipo Schrödinger para el cálculo de autoestados fermiónicos en la ecuación de Dirac (en 1 + 1). En la sección anterior se mostró la conexión entre la ecuación de Dirac y un par de ecuaciones tipo Schrödinger con sus componentes de un hamiltoniano SUSY. A continuación presentaremos brevemente el método de Riccati modificado para luego ilustrarlo mediante algunos ejemplos sencillos.

Dado un hamiltoniano SUSY, como (7), es posible generar a partir de él una cadena de hamiltonianos SUSY tal que dos consecutivos tienen el mismo espectro excepto el estado base. La cardinalidad de esta familia es la dimensión del espacio de Hilbert discreto del primer hamiltoniano. Si además se verifica invariancia de forma supersimétrica, el problema es exactamente resoluble [2]. En otras palabras, la condición suficiente para que el hamiltoniano sea resoluble es que $V' - V^2$ y $V' + V^2$ tengan la misma dependencia funcional en x , y sólo se diferencien en una reparametrización.

Para el estado base, $\omega = 0$ es una manifestación del carácter supersimétrico del hamiltoniano H . El espinor correspondiente está dado por

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_1^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

con χ_1^0 tal que es aniquilado por Q . De aquí resulta que $V(x)$ es directamente la derivada logarítmica de χ_1^0 :

$$\chi_1^0(x) \propto \exp \int_x dy V(y). \quad (12)$$

Tomando la primera componente $H^+ = \frac{1}{2}QQ^\dagger$, y reescribiendo la ecuación anterior para cualquier χ_1

$$\chi_1 \propto \exp \int_x dy g(y), \quad (13)$$

la Ec. (5) adopta la forma de una ecuación de Riccati:

$$g^2(x) + g'(x) = V^2(x) + V'(x) - \omega^2. \quad (14)$$

Si el potencial $V(x)$ admite estados ligados, el χ_1^n correspondiente al n -ésimo estado excitado tiene n ceros simples $\{x_j\}$ sobre el dominio físico en el eje x , y por lo tanto $g(x)$ tiene n polos simples con residuo 1:

$$g(x, n) = \bar{g}(x) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{x - x_j}, \quad (15)$$

donde $\bar{g}(x) = \frac{d}{dx} \log[\chi_1(x)]$ es regular en todo el dominio físico. De aquí se deduce la siguiente ecuación, que es una generalización inmediata de la ya obtenida en el análisis de la ecuación de Schrödinger [3]:

$$\bar{g}^2 + \bar{g}' + 2 \sum_{j=1}^n \frac{\bar{g}(x) - \bar{g}(x_j)}{x - x_j} = V^2(x) + V'(x) - \omega^2, \quad (16)$$

donde debe satisfacerse

$$\bar{g}(x_j) = \sum_{k=1, k \neq j}^n \frac{1}{x_k - x_j}. \quad (17)$$

Este sistema de ecuaciones, para un cierto \bar{g} , puede tener más de una solución. Si es así, el tipo de resolubilidad del potencial se manifiesta por la estructura de $\sum_{j=1}^n \frac{\bar{g}(x) - \bar{g}(x_j)}{x - x_j}$. Si esta expresión evaluada en las distintas soluciones da lugar a expresiones que difieren

en su dependencia en x , cada solución corresponde a un distinto potencial y estamos ante un caso de los denominados parcialmente resolubles. En cambio, si difieren sólo en una constante aditiva, todas las soluciones corresponden a un mismo potencial, pero con diferentes valores de ω : el hamiltoniano es cuasiexactamente resoluble. Finalmente, si para cada valor de n existe sólo una solución estamos ante un hamiltoniano exactamente resoluble.

A continuación consideraremos, a título de ejemplo, tres conjuntos de potenciales directamente relacionados con casos ya analizados en detalle en el contexto de la ecuación de Schrödinger. Sólo nos restringiremos al estudio de la interacciones dadas por densidades de potenciales $V(x)$ unidimensional y no nos referiremos a otro tipo de interacciones.

2.1. Potenciales polinómicos

Están definidos por la expresión

$$V_N(x) = \sum_{n=1}^N a_n x^n. \tag{18}$$

En esta familia el único miembro que cumple con la condición de resolubilidad exacta es el lineal:

$$V_1(x) = a_0 + a_1 x, \tag{19}$$

para el cual

$$V^2 \pm V' = (a_0^2 \pm a_1) + 2a_0 a_1 x + a_1^2 x^2. \tag{20}$$

Aquí es trivial observar que ambos potenciales son isoenergéticos: en los dos potenciales los niveles de energía están igualmente espaciados, y además tienen un desplazamiento relativo de un nivel. El autoestado de energía nula es

$$\chi_1^0(x) = \begin{pmatrix} \exp[-\frac{a_1}{2}x^2 + a_0x] \\ 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

La condición de normalizabilidad exige $a_1 > 0$.

Dentro de esta familia también existen potenciales cuasiexactamente resolubles, que son los que corresponden a $N > 1$ con $a_N > 0$ y tienen como función de onda para el estado base:

$$\chi_1^0(x) = \begin{pmatrix} \exp[-\sum_{n=0}^N \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}] \\ 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

2.2. *Potenciales mapeables en polinómicos-familia de Morse*

El método basado en la derivada logarítmica adquiere su forma más sencilla cuando se consideran potenciales polinómicos o racionales. Sin embargo se lo puede extender a potenciales más generales utilizando transformaciones de coordenadas que permitan reescribirlos como tales [7, 8]. En este apartado nos restringiremos a los que se reducen a un polinomio mediante un mapeo exponencial, esto es, aquellos potenciales que constituyen la denominada *familia de Morse*: $u = e^{\alpha x}$, (con $0 < u < \infty$) [9]. En este caso tenemos

$$\frac{dV}{dx} = \frac{du}{dx} \frac{dV}{du} = \alpha u \frac{dV}{du}. \tag{23}$$

Los potenciales que le corresponden a las ecuaciones de segundo orden son

$$U_{\pm} = V^2 \pm \alpha u V' = \sum_{n=-L}^N a_n u^n, \tag{24}$$

y la ecuación de Riccati que ahora deben satisfacer, en lugar de la (20), es

$$V^2 + \alpha u V' = (\alpha u)^2 \left[\bar{g}^2(u) + \bar{g}'(u) + \alpha^2 u + 2\alpha u \sum_{j=-L}^N \frac{\bar{g}(u) - \bar{g}(u_j)}{u - u_j} \right] + \omega^2, \tag{25}$$

donde hemos tenido en cuenta explícitamente la transformación de coordenadas. El único miembro de esta clase que es exactamente soluble tiene a $L = 1$, tal que los potenciales U_{\pm} corresponden a potenciales de Morse [9]. Los restantes son potenciales cuasiexactamente resolubles.

2.3. *Electrones relativistas en un cristal unidimensional*

En esta sección presentamos otro ejemplo basado en resultados presentados en un artículo anterior [10]. Consideremos el potencial triparamétrico

$$V = U + m = a \operatorname{ctg}(x) + b \tan(x) + c \cos(x) \operatorname{sen}(x), \tag{26}$$

donde los parámetros a , b , c y m definen el potencial que aparece en la ecuación de Dirac (1), que ahora puede interpretarse como la ecuación para un fermión con masa m con un término de interacción dado por U . Si definimos al potencial asociado a la ecuación de Schrödinger como $U_{\text{Sch}} = U^2 - U'$ (con $U = V - m$), tendremos que

$$U_{\text{Sch}} = \frac{a(a-1)}{\operatorname{sen}^2(x)} + \frac{b(b+1)}{\cos^2(x)} - \frac{c^2}{4} \cos^2(x) + \left[\frac{c^2}{4} + c(a+b) - (a-b)^2 \right] \tag{27}$$

Si $a(a-1)$ y $b(b-1)$ son ambos no positivos, la ecuación de Schrödinger correspondiente tiene soluciones de Bloch con parámetro de red 2 o 1, según $ab(a-1)(b-1)$ sea igual o distinto de cero, respectivamente, y los bordes de banda estarán dados por [10]:

$$\Psi(x) \propto \operatorname{sen}^{a/2}(x) \cos^{b/2}(x) e^{cu/4} {}_2F_1 \left[-n, n+a+b; a+\frac{1}{2}; \operatorname{sen}^2(x) \right], \tag{28}$$

con energías

$$E = (2n + a + b)^2, \quad (29)$$

que como se observa no presentan dependencia de la masa.

3. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos planteado la relación entre la ecuación de Dirac y la ecuación de Schrödinger en $d = 1 + 1$. Las soluciones estacionarias de la ecuación de Dirac con energía ω satisfacen un par de ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas. Al desacoplarlas se genera un sistema isoespectral de dos ecuaciones de segundo orden, que corresponden a dos ecuaciones de Schrödinger con autovalor ω^2 . En esta forma el hamiltoniano de Dirac se mapea en un hamiltoniano supersimétrico tipo Schrödinger. Apartir de aquí se hace evidente que en esta dimensión las diversas técnicas de análisis desarrolladas en mecánica cuántica pueden extenderse con relativa facilidad a espinores relativistas. Como aplicación de estos resultados hemos considerado potenciales polinómicos y mapeables en ellos (tales como la familia de Morse) por medio de una transformación adecuada, y en particular un modelo cuasixactamente resoluble para un fermión en un cristal unidimensional.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado con el apoyo parcial del CONICET.

REFERENCIAS

1. F. Cooper and B. Freedman, *Ann. Phys.* **146** (1983) 262.
2. R.W. Haymaker and A.R.P. Rau, *Am. J. Phys.* **54** (1986) 928.
3. F. Ravndal, "Elementary Supersymmetry", CERN School of Physics (November 1985). CERN 85-11, pp. 300.
4. L. Infeld y T.D. Hull, *Rev. Mod. Phys.* **23** (1951) 21.
5. L.E. Gedenstein, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **38** (1983) 229; *JETP Lett.* **38** (1983) 356; R. Montemayor y L. Salem, *Phys. Rev.* **A40** (1989) 2170.
6. L. Salem y R. Montemayor, *Phys. Rev.* **A43** (1991) 1169.
7. R. Montemayor y L. Salem, *Phys. Rev.* **A44** (1991) 7037.
8. L. Salem y R. Montemayor, *Phys. Rev.* **A47** (1993) 105.
9. N. Rosen and P.M. Morse, *Phys. Rev.* **42** (1932) 210.
10. L. Salem y R. Montemayor, *Phys. Rev.* **A44** (1991) 7065.