

# No separabilidad en el argumento de Popper

MAURICIO BELLINI

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad Nacional de Mar del Plata  
Funes 3350, (7600) Mar del Plata, Buenos Aires, Argentina*

Recibido el 14 de noviembre de 1995; aceptado el 14 de diciembre de 1995

RESUMEN. Se estudia el argumento de Popper, mostrando que éste poseía ya los ingredientes principales que tiempo después pondría de manifiesto el argumento de Einstein, Podolsky y Rosen (EPR).

ABSTRACT. The argument of Popper is studied, showing that it already possessed the principal ingredients that, some time later, would be put in evidence by the argument of Einstein, Podolsky and Rosen (EPR).

PACS: 03.65.Bz

## 1. INTRODUCCIÓN

Einstein nunca quedó satisfecho con la mecánica cuántica. En un principio (a partir de 1927) trató de demostrar que ésta no era correcta, utilizando experimentos mentales (o ideales) para mostrar su invalidez. Para ello atacó el principio de incertidumbre de Heisenberg, que era lo que más perturbaba su idea determinista del mundo, puesto que de ninguna manera estaba dispuesto a renunciar a esta concepción del Universo. Él creía que cada acontecimiento (o evento) era consecuencia de una causa determinada y determinable, y no quería concebir la idea de que existiera una cierta probabilidad de ocurrencia de un evento dado. Luego de varios fracasos en su intento, cambió de estrategia y se propuso demostrar que la mecánica cuántica era una teoría incompleta, o sea, que el hecho de asignar una cierta probabilidad de ocurrencia a un evento determinado era consecuencia de su incompletitud. En 1935 escribió un artículo junto con Podolsky y Rosen [1], que fue decisivo para el desarrollo ulterior del debate cuántico. Este artículo es de una coherencia lógica irreprochable. En él, Einstein, junto a sus colaboradores, demostraron que la mecánica cuántica es una teoría que describe en forma incompleta la realidad física. A ese trabajo normalmente se le conoce como argumento o paradoja de EPR.

En 1964 J.S. Bell escribió un artículo que se publicaría hasta 1966 [2]. Hasta ese momento el argumento de EPR era sólo discutible bajo consideraciones filosóficas y su interés estaba únicamente reservado para unos pocos físicos que trataban de interpretar la mecánica cuántica de una manera satisfactoria. El trabajo de Bell abrió un nuevo y apasionante campo de investigación, tanto teórico como experimental, ya que expresaba las diferencias filosóficas de Einstein y Bohr en forma de una desigualdad ("desigualdades de Bell"), posibilitando de este modo la contrastación experimental. A partir de ese momento

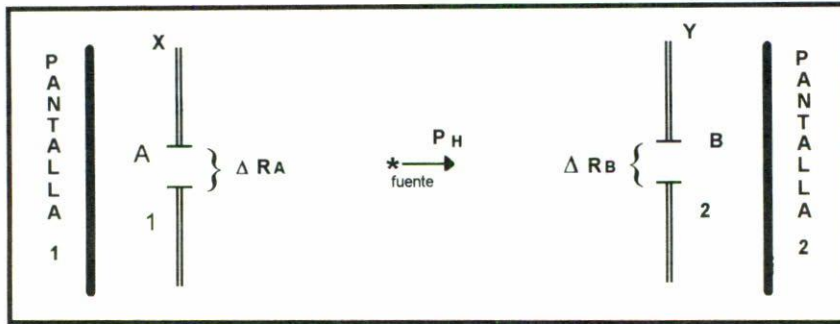


FIGURA 1. Representación gráfica del argumento de Popper (los detectores han sido reemplazados por una pantalla para cada rendija).

se realizaron numerosos experimentos [5–11] en los que se observó que el principio de localidad de Einstein era insostenible en ciertos sistemas cuánticos, al menos en la forma en que fuera enunciado originalmente.

En este trabajo se desarrolla el argumento propuesto por K.R. Popper [3] en el año 1934. Éste, aunque en principio es erróneo, tuvo la virtud de que introdujo a Einstein en esta línea de pensamiento [1]. Las meditaciones de Albert Einstein acerca de este tema concluirían en el trabajo publicado junto a Podolsky y Rosen. Una formalización del argumento de Popper muestra cómo, luego de corregir algún error, presenta los ingredientes esenciales que posee el sistema físico utilizado por EPR en su trabajo, esto es, la no separabilidad de ciertos sistemas cuánticos correlacionados. Esta no separabilidad puede ser estudiada utilizando la función de covarianza cuántica (FCC).

En la siguiente sección se introduce el argumento de Popper tal como fue enunciado originalmente, para luego en las secciones siguientes, formalizarlo y demostrar mediante la FCC [12] que consiste en un sistema físico no separable.

## 2. EL ARGUMENTO DE POPPER

La versión original de este argumento dice así: se tiene un sistema  $S$  (puede ser positronio) desde el cual se emiten, en direcciones opuestas, pares de partículas que han interactuado. Consideremos a estas partículas moviéndose hacia dos ranuras  $A$  y  $B$ . Éstas tendrán un ancho ajustable  $\Delta R_A$  y  $\Delta R_B$ , respectivamente. Más allá de las ranuras, a los lados, hay contadores colocados en semicírculo (véase Fig. 1).

Se supondrá que las intensidades de los haces son muy bajas, de modo que el tiempo medio entre emisiones sucesivas de pares sea mucho mayor que el tiempo transcurrido desde la emisión del par hasta ser detectado por los contadores. Estos contadores son de coincidencia, es decir, sólo cuentan partículas que han pasado al mismo tiempo por  $A$  y  $B$ . Con esto es casi seguro que sólo se detectarán las partículas que han interactuado. En la medida en que las rendijas  $A$  y  $B$  se hagan más angostas, las incertidumbres en la posición de ambas partículas sobre las rendijas ( $\Delta X$  y  $\Delta Y$ ) disminuirán, debiendo aumentar las incertidumbres de los momentos ( $\Delta P_x$  y  $\Delta P_y$ ), para que se cumpla el principio de incertidumbre de Heisenberg.



Supongamos que ahora que hacemos muy angosta la ranura  $A$  y muy ancha la ranura  $B$ ; es decir que  $\Delta R_A \ll \Delta R_B$  (recordar que  $\Delta R_A$  es el ancho de la rendija  $A$  y  $\Delta R_B$  el de la rendija  $B$ ). Las incertidumbres en las posiciones estarán asociadas a las incertidumbres de las cantidades de movimiento  $\Delta P_x$  y  $\Delta P_y$  para las partículas que pasan por las rendijas  $A$  y  $B$ , respectivamente. Debido al principio de incertidumbre se debe cumplir que

$$\Delta R_A \Delta P_x \geq \hbar \quad \text{y} \quad \Delta R_B \Delta P_y \geq \hbar. \quad (1)$$

Según Popper, al medir la posición de la partícula que pasa por  $A$  con precisión  $\Delta R_A$ , debido a que la posición del centro de masa del sistema en la dirección vertical dada por  $r_\nu = \frac{1}{2}(X + Y)$  ya se conoce ( $X$  es la posición de la partícula que pasa por  $A$  e  $Y$  la de la que pasa por  $B$ ), existe una propagación de error sobre la posición de la partícula que pasa por  $B$  y el desconocimiento de ésta ( $\Delta Y$ ) será el mismo que el de la posición de la partícula que pasa por  $A$  ( $\Delta R_A$ ), esto es:  $\Delta R_A = \Delta Y$ . Esto sucede a pesar de que la rendija  $B$  es mucho más ancha que la rendija  $A$  ( $\Delta R_A \ll \Delta R_B$ ). Si Popper estuviera en lo cierto el producto de las incertidumbres de posición y momento de la partícula que pasa por  $B$  estaría dado por

$$\Delta Y \Delta P_y = \Delta R_A \Delta P_y \ll \Delta R_B \Delta P_y \approx \hbar, \quad (2)$$

lo cual violaría el principio de incertidumbre dado por Heisenberg.

Según Popper [3], para que esto no suceda, debe aumentar la dispersión (incertidumbre) del momento de la partícula que pasa por  $B$  ( $\Delta P_y$ ), lo que sería observable experimentalmente. Este hecho implicaría una acción a distancia que estaría contradiciendo el principio de localidad dado por Einstein [3] en el año 1948.

### 3. FUNCIÓN DE COVARIANCIA CUÁNTICA Y NO SEPARABILIDAD

En lo que sigue se utilizará como herramienta a la FCC para establecer la separabilidad o no de un sistema cuántico. En particular estudiaremos qué sucede con los sistemas descritos por funciones de estado factorizables, no factorizables, y con el estado que describe el argumento enunciado por Popper.

#### 3.1. Principio de separabilidad

A continuación presentaremos una forma simple y clara del principio de separabilidad que facilita el formalismo sin perder generalidad [4].

Sea  $S$  un sistema físico (cuántico o clásico) descrito en forma completa por un estado  $\psi$  ( $\in H$  si es un sistema cuántico y  $\in \Phi \equiv$  espacio de fase, si es un sistema clásico), tal que  $S = S_1 + S_2$  se descompone en dos sistemas separados por una distancia que puede hacerse mayor que sus propias extensiones.  $S_1$  y  $S_2$  pueden haber interactuado, es decir que sus estados pueden estar correlacionados. Sea  $A$  un observable de  $S_1$  con posibles autovalores  $a_k$ , ( $k = 1 \dots N$ ) y  $B$  un observable de  $S_2$  con posibles autovalores

$b_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ). Definimos  $(A = a_k|\psi) \equiv (a_k|\psi)$  como la probabilidad de medir  $a_k$  en  $S_1$  y, similarmente,  $(b_n|\psi)$  como la probabilidad de medir  $b_n$  en  $S_2$ .

Sea  $(A = a_k|\psi, B = b_n) \equiv (a_k|\psi, b_n)$  la probabilidad condicional de medir  $a_k$  en  $S_1$ , habiendo medido  $b_n$  en  $S_2$ .

*Definición de separabilidad:* Se dice que el sistema  $S$ , descrito por  $\psi$ , es separable si la distancia  $D(S_1, S_2)$  puede hacerse suficientemente grande para que se cumpla

$$(a_k|\psi) = (a_k|\psi, b_n), \tag{3}$$

para  $A$  y  $B$  observables de  $S_1$  y  $S_2$ , respectivamente.

Sean dos operadores  $\tilde{A} = \tilde{A} \otimes 1$ ,  $\tilde{B} = 1 \otimes \tilde{B}$  y  $\tilde{A}\tilde{B} = \tilde{A} \otimes \tilde{B}$ . la covariancia cuántica entre ellos  $T(A, B|\psi)$ , para un estado

$$\psi = \sum_{i,j} C_{ij}(\varphi_i \otimes \phi_j), \tag{4}$$

será

$$T(\tilde{A}, \tilde{B}|\psi) = \langle \tilde{A}\tilde{B} \rangle - \langle \tilde{A} \rangle \langle \tilde{B} \rangle. \tag{5}$$

En este trabajo requeriremos que la FCC sea nula [4], para que la función de estado del sistema describa un sistema cuántico separable.

### 3.2. FCC para estados no factorizables

Seguidamente se consideran los valores esperados de los operadores  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  y  $\tilde{A}\tilde{B}$  para estados no factorizables:

$$\langle \tilde{A} \rangle = \langle \psi; \tilde{A}\psi \rangle = \sum_{r,s} a_r |C_{rs}|^2, \tag{6}$$

$$\langle \tilde{B} \rangle = \langle \psi; \tilde{B}\psi \rangle = \sum_{r,s} b_s |C_{rs}|^2, \tag{7}$$

$$\langle \tilde{A}\tilde{B} \rangle = \langle \psi; \tilde{A}\tilde{B}\psi \rangle = \sum_{r,s} a_r b_s |C_{rs}|^2. \tag{8}$$

Luego, la FCC entre los observables  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  estará dada por

$$T(\tilde{A}, \tilde{B}|\psi) = \sum_{rs} a_r b_s \left( |C_{rs}|^2 - \sum_{i,j} |C_{ri}|^2 |C_{js}|^2 \right) \neq 0. \tag{9}$$

Esto significa que un estado no factorizable describirá un sistema físico no separable siempre que se cumpla la condición

$$|C_{rs}|^2 - \sum_{i,j} |C_{ri}|^2 |C_{js}|^2 \neq 0. \tag{10}$$

3.3. FCC para estados factorizables

Si un estado es factorizable, es decir, si se puede escribir como

$$\psi = \sum_{i,j} C_{ij}(\varphi_i \otimes \phi_j) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j (\varphi_i \otimes \phi_j), \tag{11}$$

y, teniendo en cuenta las ecuaciones de autovalores

$$\tilde{A}\varphi_k = a_k \varphi_k, \quad \tilde{B}\phi_k = b_k \phi_k, \tag{12}$$

los valores esperados  $\langle \tilde{A} \rangle$ ,  $\langle \tilde{B} \rangle$  y  $\langle \widetilde{AB} \rangle$ , serán

$$\langle \tilde{A} \rangle = \sum_{r,s} a_r |C_{rs}|^2 = \sum_r a_r |\alpha_r|^2, \tag{13}$$

$$\langle \tilde{B} \rangle = \sum_{r,s} b_s |C_{rs}|^2 = \sum_s b_s |\beta_s|^2, \tag{14}$$

$$\langle \widetilde{AB} \rangle = \sum_{r,s} a_r b_s |C_{rs}|^2 = \left( \sum_r a_r |\alpha_r|^2 \right) \left( \sum_s b_s |\beta_s|^2 \right), \tag{15}$$

y la FCC nos dará

$$T(\tilde{A}, \tilde{B}|\psi) = 0. \tag{16}$$

Luego, los estados factorizables siempre describirán sistemas físicos separables. En consecuencia los sistemas descritos por un estado  $\psi$  factorizable son separables. Sin embargo, que un sistema físico sea separable no necesariamente implica que esté descrito por estados factorizables; un sistema físico puede ser separable y estar descrito por un estado no factorizable.

4. FORMALIZACIÓN DEL ARGUMENTO DE POPPER

Karl Popper se retractó de su argumento cuando se dio cuenta de su error [3]. Había supuesto que las incertidumbres de las posiciones de ambas partículas estaban dadas por el ancho de la rendija más angosta (dado por  $\Delta R_A$ ), debido a la no separabilidad del sistema. Si bien es cierto que el sistema es no separable y que las incertidumbres de sus posiciones ( $\Delta X$  y  $\Delta Y$ ) son iguales, sus magnitudes no corresponden al ancho de la rendija  $A$ , esto es:  $\Delta X = \Delta Y \neq \Delta R_A$ .

*Formalización:* Sea  $\{\psi_x\}$  la base de un espacio de Hilbert  $H_1$  para una partícula, y  $\{\phi_y\}$  la base en el espacio  $H_2$  para la otra, correspondientes a los operadores de posición  $X$  e  $Y$  de las partículas 1 y 2, respectivamente.  $\{\psi_r\}$  será la base en  $H = H_1 \otimes H_2$ . El operador posición del centro de masa del sistema en la dirección vertical será  $r_\nu = \frac{1}{2}(X \otimes 1 + 1 \otimes Y)$ .



Se prepara el sistema de modo que la posición vertical del centro de masa  $r_\nu$  y el momento lineal horizontal  $P_H$ , sean nulos, ( $r_\nu = 0, P_H = 0$ ). Esto es posible debido a que  $r_\nu$  y  $P_H$  conmutan. Sobre las rendijas  $A$  y  $B$ , dispuestas en forma simétrica, sólo interesan las posiciones  $X$  e  $Y$  en la dirección vertical.

El estado del sistema está dado por

$$\begin{aligned} \psi &= N \int_{-\infty}^{\infty} dr' \psi'_r r'_\nu \psi_r, \\ &= N \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \psi(x', y') (\varphi_{x'} \otimes \phi_{y'}), \end{aligned} \tag{17}$$

donde  $\psi(x', y')$  son los coeficientes de Fourier dados por  $\langle \psi_{r'}; \psi \rangle = \langle \varphi_{x'} \otimes \phi_{y'}; \psi \rangle$ , y los operadores  $r_\nu$  y  $P_H$  satisfacen las siguientes ecuaciones de autovalores:

$$r_\nu \psi_{r'} r'_\nu = \frac{1}{2}(X' + Y')\psi(x', y') = 0, \tag{18}$$

$$P_H \psi(x', y') = 0. \tag{19}$$

De la Ec. (18), se obtiene

$$\psi(x', y') = e^{-\alpha x'^2} e^{-\beta y'^2} \delta(x' + y'), \tag{20}$$

donde para facilitar el cálculo se suponen “rendijas gaussianas” cuya transparencia está dada por sendas distribuciones gaussianas con anchos efectivos  $\frac{2}{\sqrt{\alpha}}$  y  $\frac{2}{\sqrt{\beta}}$ , para las rendijas  $A$  y  $B$ , respectivamente. Luego, la función de estado estará dada por la expresión

$$\psi = N \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' e^{-\alpha x'^2} e^{-\beta y'^2} \delta(x' + y') (\varphi_{x'} \otimes \phi_{y'}), \tag{21}$$

a la que podemos normalizar

$$\langle \psi; \psi \rangle = N^2 \sqrt{\frac{\pi}{2(\alpha + \beta)}} = 1 \tag{22}$$

donde  $\langle \varphi_{-y'} \otimes \phi_{y'}; \varphi_{-y''} \otimes \phi_{y''} \rangle = \delta(y'' - y')$ . Por lo tanto, la constante de normalización  $N$  vendrá dada por

$$N = \left( \frac{2(\alpha + \beta)}{\pi} \right)^{1/4}. \tag{23}$$

La incertidumbre en la posición de una de las partículas sobre la rendija  $B$  será

$$\Delta^2(Y, \psi) = \langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2, \tag{24}$$

donde

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle &= \langle \psi; Y \psi \rangle \\ &= N^2 \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} dy' e^{-(\alpha+\beta)y'^2} (\varphi_{x'} \otimes \phi_{y'}); \right. \\ &\quad \left. Y \int_{-\infty}^{\infty} dx'' e^{-\alpha x''^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy'' e^{-\beta y''^2} \delta(x'' + y'') (\varphi_{x''} \otimes \phi_{y''}) \right\rangle = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Por lo tanto,  $\Delta^2(Y, \psi) = \langle Y^2 \rangle$ , esto es,

$$\Delta^2(Y, \psi) = \langle \psi; Y^2 \psi \rangle = \frac{N^2 \Gamma(\frac{3}{2})}{[2(\alpha + \beta)]^{3/2}} = \frac{1}{4(\alpha + \beta)}. \quad (26)$$

Análogamente se puede calcular  $\Delta^2(X, \psi) = \langle X^2 \rangle = \frac{1}{4(\alpha+\beta)}$ .

Esto implica que es erróneo suponer que la incertidumbre en la posición de la partícula que pasa por  $B$  está dada solamente por el ancho de la rendija  $A$  ( $\Delta R_A = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$ ). Si esto fuera así la incertidumbre en la posición  $Y$  no dependería del parámetro  $\beta$ . Seguidamente se mostrará que, aunque las incertidumbres en las posiciones de ambas partículas no están dadas por el ancho de la rendija más pequeña (rendija  $A$ ), el sistema físico descrito por el estado  $\psi$  no es separable. Para ello utilizaremos la función de covariancia cuántica. Esta última, calculada entre los observables  $X$  e  $Y$ , está dada por

$$\begin{aligned} T(X, Y|\psi) &= \langle XY \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle \\ &= -N^2 \int_{-\infty}^{\infty} dy' y'^2 e^{-2(\alpha+\beta)y'^2} \\ &= -\frac{1}{4(\alpha + \beta)}, \end{aligned} \quad (27)$$

que es distinta de cero para  $\alpha$  y  $\beta$  finitos. Por lo tanto, el sistema es no separable.

## 5. CONCLUSIONES

Debido a la evidencia experimental acumulada durante los años setenta y ochenta, la característica de la no separabilidad de ciertos sistemas cuánticos se presenta como una de las más prometedoras líneas de investigación en este tipo de sistemas. Sin embargo, todas estas contrastaciones experimentales se han llevado a cabo midiendo correlaciones de espín. Esto es, se realizaron experiencias para contrastar sistemas del tipo de la reformulación de Bohm del argumento de EPR con las desigualdades de Bell. El argumento de Popper tiene la virtud de que brinda una versión contrastable experimentalmente del argumento de EPR donde se puede verificar si hay correlación entre las incertidumbres en las posiciones en ambas rendijas.

Utilizando la FCC se observa que el sistema propuesto en el argumento de Popper es no separable, hecho que se debe a la correlación entre posiciones de las partículas que se dirigen hacia ambas rendijas, dada por la preparación del sistema, lo cual se manifiesta en que la FCC depende de  $\alpha$  y  $\beta$ . El error cometido por Popper en su argumento consiste en suponer que las incertidumbres en las posiciones de las partículas están dadas por el ancho de la rendija más pequeña. Si esto fuera cierto, ambas incertidumbres habrían sido independientes de  $\beta$  (recordar que  $B$  es la rendija más grande y que  $\Delta R_B = 2/\sqrt{\beta}$ ). Esto no sucede, y por lo tanto invalida las conclusiones de K. Popper.

## REFERENCIAS

1. A. Einstein, B. Podolsky y R. Rosen, *Phys. Rev.* **47** (1935) 777.
2. J.S. Bell, *Reviews of Mod. Phys.* **38** (1966) 447.
3. K.R. Popper, *Teoría cuántica y sisma en física*, Ed. Tecnos, Madrid (1985).
4. A.C. de la Torre, P. Catuogno y S. Ferrando, *Found. of Phys. Lett.* **2** (1989) 235.
5. S.J. Freedman y J.F. Clauser, *Phys. Rev. Lett.* **28** (1972) 938.
6. R.A. Holt y F.M. Pipkin, Harvard University, Preprint (1973).
7. J.F. Clauser, *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976) 465.
8. E.S. Fry y R.C. Thomson, *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976) 465.
9. A. Aspect, P. Grangier y G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **47** (1981) 460.
10. F.M. Pipkin, *Progr. in Atomic and Mol. Phys.* **14** (1978) 281.
11. J.F. Clauser y A. Shimony, *Rep. Progr. Phys.* **41** (1978) 1881.
12. M. Bellini, *Anales AFA* **4** (1992) 20; *ibid.* **5** (1993) 63.